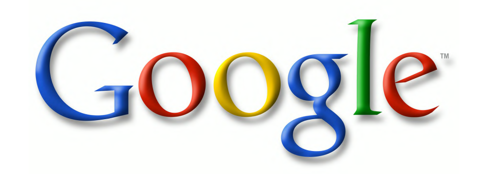


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

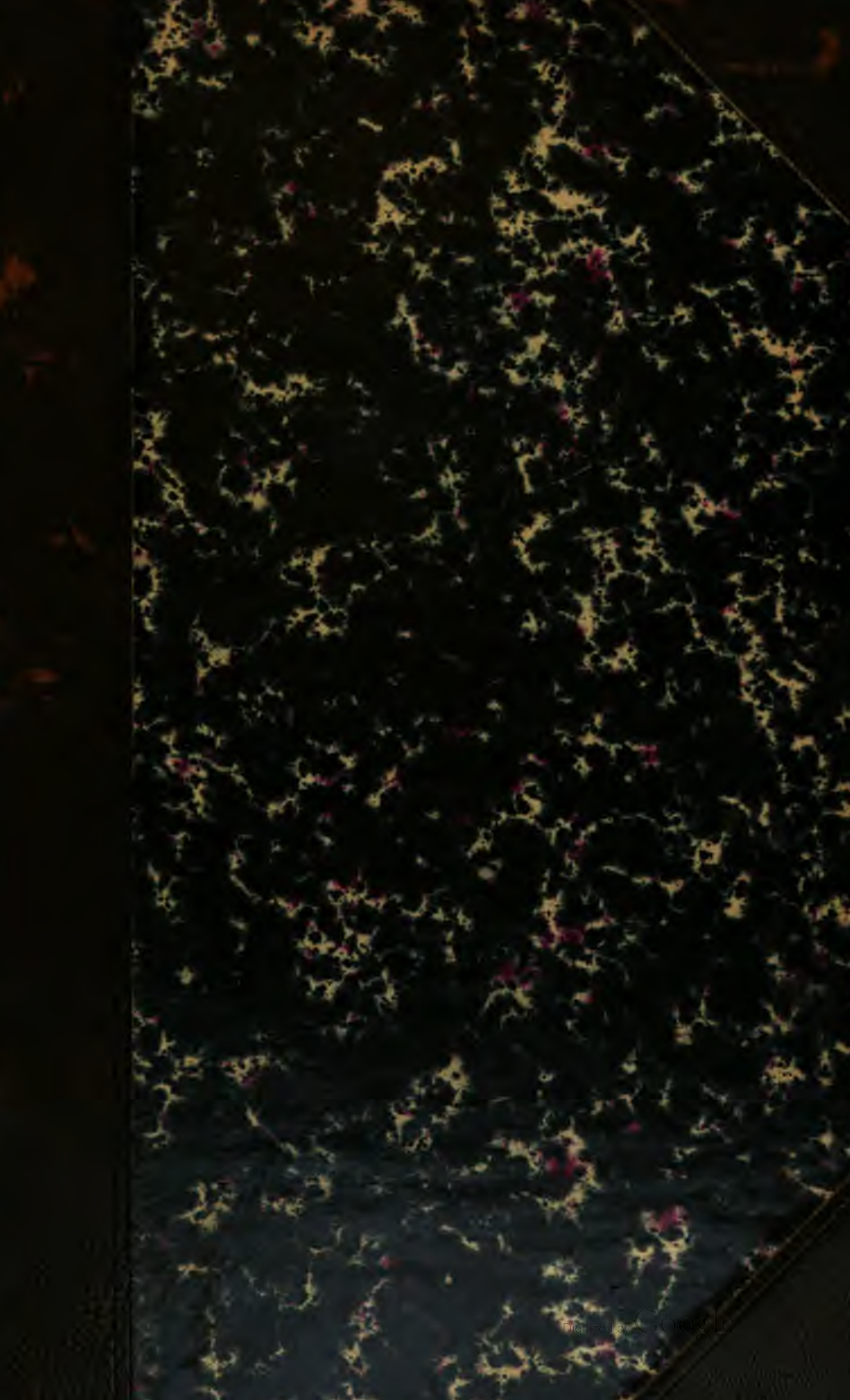
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Digitized by Google

Sci 880.20



Harvard College Library

FROM THE BEQUEST OF

HORACE APPLETON HAVEN,

OF PORTSMOUTH, N. H.

(Class of 1842.)

SCIENCE CENTER LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

Digitized by Google



Digitized by Google

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,

Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,

Ingénieur des Manufactures de l'État.
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE.

TOME IV.

(LXIIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

(Tous droits réservés.)

Digitized by Google

Sci 880.20

1143
28

Digitized by Google

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION

HARVARD COLLEGE LIBRARY
MAR 2 1904
CAMBRIDGE, MASS.

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME IV.

JANVIER 1904.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris,
à M. Laisant, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,
ou à M. Bourlet, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,
ou à M. Bricard, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.
(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Digitized by Google

Rédacteur de service : M. C. Bourlet.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences.

Besançon : M. N.... — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Duport. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. — Montpellier : M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers : M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES
JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION
DIRIGÉ PAR
C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Publication fondée en 1842 par Gerono et Terquem,
et continuée par Prouhet, Bourget, Brisse, Rouché, Antomari et Duporcq.

Prix pour un an (12 *numéros*) :
Paris, 15 fr. — Départements et Union postale, 17 fr.

BIBLIOGRAPHIE SCIENTIFIQUE FRANÇAISE. — Recueil mensuel publié sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique par le Bureau français du Catalogue international de la Littérature scientifique.

Prix pour un an :

	Paris.	Départ. et Union post.
	fr	fr
1re **Série** (6 numéros par an)	**5,50**	**6,50**
2e **Série** (6 numéros par an)	**9,50**	**10,50**
Les deux Séries réunies	**15,00**	**17,00**

Le numéro double **1-2** *du Tome I, qui contient la liste des périodiques avec leurs abréviations et la classification scientifique, se vend séparément* **2** *fr.* **50** *c.*

Digitized by Google

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

HARVARD COLLEGE LIBRARY
MAR 2 1904
CAMBRIDGE, MASS.

[L¹3b]

CONSTRUIRE EN GRANDEUR ET EN DIRECTION LES AXES D'UNE ELLIPSE DONT ON CONNAIT DEUX DIAMÈTRES CONJUGUÉS;

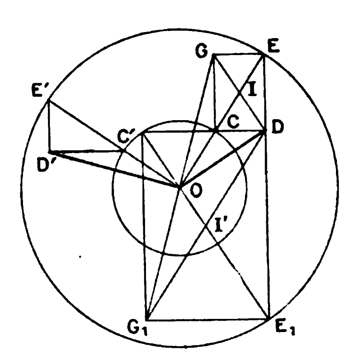
Par M. A. MANNHEIM.

Le problème dont il s'agit a donné lieu à un assez grand nombre de constructions. Une démonstration nouvelle de l'une d'elles ne peut évidemment constituer qu'une simple curiosité géométrique. C'est à ce titre qu'il me semble intéressant de signaler la suivante, inédite je crois, qui est curieuse en ce qu'il suffit que l'on connaisse seulement la génération de l'ellipse et la construction de deux de ses diamètres conjugués obtenues en considérant l'ellipse comme projection d'un cercle. De plus, cette construction se trouvant démontrée, on peut en déduire un certain nombre de théorèmes qui sont précisément ceux sur lesquels on s'appuie en général pour y arriver : les théorèmes d'Apollonius par exemple.

Soient OC, OE les rayons de deux cercles concentriques égaux respectivement au demi-petit axe et au demi-grand axe d'une ellipse. Les droites CD, ED paral-

Digitized by Google

lèles aux axes de cette courbe se coupent en un de ses points D : c'est le mode de génération de l'ellipse qui est bien connu. Au moyen de E′, extrémité du diamètre perpendiculaire à OE, on obtient de la même manière le point D′ extrémité du diamètre de l'ellipse qui est conjugué de OD. Tout ceci, comme je l'ai dit, s'obtient



en considérant l'ellipse comme projection d'un cercle, et suffit pour la démonstration qui suit.

Les triangles CDE, C′D′E′ ont des hypoténuses égales et leurs côtés respectivement perpendiculaires; ils sont donc égaux et l'on a :

$$E'D' = CD.$$

Faisons tourner d'un angle droit le triangle E′D′O autour de son sommet O. Le point E′ vient en E et le point D′ en G. On a alors

$$GE = E'D',$$

Par suite, d'après ce qui précède,

$$GE = CD.$$

Digitized by Google

La figure CDEG est donc un rectangle et l'on a cette construction pour le problème proposé :

Sur la perpendiculaire OG *à* O'D' *on porte le segment* OG *égal à* OD'. *On mène la droite* OI *qui passe par le milieu* I *de* DG *et l'on prend sur cette droite les segments* IE, IC *égaux à* ID.

La droite CD, *qui passe par le point* C *plus rapproché de* O *que le point* E, *est parallèle au grand axe ; les demi-axes sont égaux à* OE, OC.

Prolongeons ED jusqu'au point E_1 où elle coupe le cercle de rayon OE. Si l'on fait correspondre le point D au point E_1, on est conduit à employer le point G_1 extrémité du segment OG_1 qui est perpendiculaire et égal à OD'. On achève alors la construction comme précédemment, en faisant usage du milieu I' du segment DG_1.

Ainsi que je l'ai dit en commençant, la construction étant obtenue, on peut en déduire divers résultats. Par exemple :

Les bissectrices des angles formés par les droites DG, DG_1 *sont parallèles aux axes de l'ellipse.*

En effet, le triangle isoscèle GIE a ses côtés également inclinés sur les axes de l'ellipse, DG_1 est parallèle à IO, donc, etc.

On peut ajouter que DG *étant égal à* CE *est égal à la demi-différence des axes*. De même DG_1 *est égal à la demi-somme des axes.*

Digitized by Google

[R1e]

SUR LE SYSTÈME ARTICULÉ DE M. KEMPE;

PAR M. G. FONTENÉ.

(*Suite.*)

§ III. — AUTRES POINTS DE VUE.

10. Si l'on construit la figure de proche en proche, on utilisera seulement 13 conditions (au lieu de 17), et l'on aura à démontrer que quatre longueurs (tiges surabondantes) conservent des longueurs invariables dans la déformation du système obtenu. On peut procéder de diverses manières.

On peut partir de la figure 3, avec les 5 conditions (7) et (12),

$$\hat{M} = \hat{M}, \qquad \hat{N} = \hat{N}, \qquad \hat{P} = \hat{P}, \qquad \hat{Q} = \hat{Q},$$
$$\bar{A} + \bar{C} = \bar{B} + \bar{D}.$$

La comparaison des relations (13) et (14) montre d'abord, comme on l'a déjà dit, que le rapport AB : CD reste constant dans la déformation du quadrilatère MNPQ. De plus, si l'on pose

$$\left\{\begin{array}{l}\widehat{MAD} = x,\\ \widehat{NAB} = x',\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\widehat{NBA} = y,\\ \widehat{PBC} = y',\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\widehat{PCB} = z,\\ \widehat{QCD} = z',\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\widehat{QDC} = t,\\ \widehat{MDA} = t',\end{array}\right.$$

on a

$$(17) \qquad \left\{\begin{array}{l} x + x' + z + z' = 2^d,\\ y + y' + t + t' = 2^d.\end{array}\right.$$

Pour le démontrer, projetons les points A, B, C, D

en A′, B′, C′, D′ sur les côtés du quadrilatère MNPQ. On a, avec les notations déjà employées,

$$\frac{\overline{\text{MA}'}}{\overline{\text{A}'\text{N}}} = \frac{m}{n}, \qquad \frac{\overline{\text{NB}'}}{\overline{\text{B}'\text{P}}} = \frac{n}{p}, \qquad \ldots,$$

d'où l'on déduit en passant

$$\frac{\overline{\text{MA}'}}{\overline{\text{A}'\text{N}}} \times \frac{\overline{\text{NB}'}}{\overline{\text{B}'\text{P}}} \times \ldots = 1.$$

La condition

$$\overline{\text{A}} + \overline{\text{C}} = \overline{\text{B}} + \overline{\text{D}},$$

ou

$$\frac{a^2}{m+n} - \frac{b^2}{n+p} + \frac{c^2}{p+q} - \frac{d^2}{q+m} = 0,$$

équivaut à ceci : *les quatre points* A′, B′, C′, D′ *sont à un cercle*. En effet, à cause de

$$\frac{\overline{\text{MA}'}}{m} = \frac{\overline{\text{A}'\text{N}}}{n} = \frac{\overline{\text{MN}}}{m+n}, \qquad \frac{\overline{\text{NB}'}}{n} = \frac{\overline{\text{B}'\text{P}}}{p} = \frac{\overline{\text{NP}}}{n+p}, \qquad \ldots,$$

si O est un point quelconque, le théorème de Stewart donne

$$\overline{\text{OM}}^2 \times n + \overline{\text{ON}}^2 \times m - \overline{\text{OA}'}^2 \times (m+n) = \frac{a^2 mn}{m+n},$$

$$\overline{\text{ON}}^2 \times p + \overline{\text{OP}}^2 \times n - \overline{\text{OB}'}^2 \times (n+p) = \frac{b^2 np}{n+p},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

en ajoutant ces égalités divisées respectivement par mn, $-np$, ..., on obtient, d'après la relation ci-dessus,

$$\overline{\text{OA}'}^2 \times \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) - \overline{\text{OB}'}^2 \times \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right) + \ldots - \ldots = 0,$$

et l'on sait qu'une telle relation sans constante n'a lieu que si les points A′, B′, C′, D′ sont à un cercle. Or, comme les triangles DMA et D′MA′, ANB et A′NB′, ...,

Digitized by Google

sont semblables deux à deux, la première des relations (17) devient

$$\widehat{MA'D'} + \widehat{NA'B'} + \widehat{PC'B'} + \widehat{QC'D'} = 2^d,$$

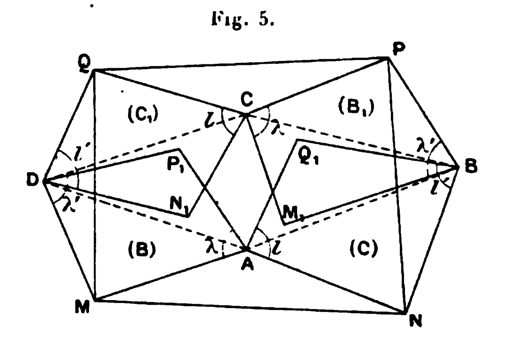
ou encore

$$\widehat{D'A'B'} + \widehat{B'C'D'} = 2^d,$$

ce qui a lieu dans le quadrilatère inscriptible A′B′C′D′.

Construisons alors (*fig.* 5) le triangle AQ_1B inver-

Fig. 5.



sement semblable au triangle CQD et le triangle CN_1D inversement semblable au triangle ANB; les quadrilatères

$$ANBQ_1 \quad \text{et} \quad CN_1DQ,$$

ou (C) et (C_1), sont inversement semblables, et, en raison de la constance du rapport $\frac{AB}{CD}$, cette similitude persiste dans la déformation du système. Il en sera de même pour les quadrilatères inversement semblables

$$AMDP_1 \quad \text{et} \quad CM_1BP,$$

ou (B) et (B_1), obtenus d'une manière analogue.

La figure satisfait ainsi à 13 conditions, et il faut montrer que les 4 côtés du quadrilatère $M_1N_1P_1Q_1$ con-

Digitized by Google

servent des longueurs invariables dans la déformation du système.

Les angles en A, B, C, D des triangles AP_1Q_1, BQ_1M_1, ..., qui bordent ce quadrilatère doivent donc être constants.

Or on a, avec les notations de la figure,

$$\lambda = x + z, \qquad l = x' + z',$$
$$l' = y + t, \qquad \lambda' = y' + t',$$

et les relations (17) donnent

$$\lambda + l = 2^d, \qquad \lambda' + l' = 2^d,$$

d'où l'on conclut que les angles en question sont supplémentaires des angles en A, B, C, D des triangles AMN, BNP, ...

On peut chercher à établir directement les égalités

$$\lambda + l = 2^d, \qquad \lambda' + l' = 2^d.$$

On a d'abord

$$(18) \qquad (\lambda + l) + (\lambda' + l') = 4^d.$$

D'autre part, on a facilement, entre les angles opposés λ et λ' du quadrilatère (B), la relation

$$\frac{ac}{\sin A \sin C} \cos\lambda - \frac{bd}{\sin B \sin D} \cos\lambda' = \text{const.};$$

on a de même

$$\frac{ac}{\sin A \sin C} \cos l - \frac{bd}{\sin B \sin D} \cos l' = \text{const.};$$

on peut voir sans calcul que les deux constantes ont une somme nulle, et l'addition donne, en tenant compte de (18), une relation qui admet la solution cherchée $\lambda + l = 2^d$, et une solution étrangère.

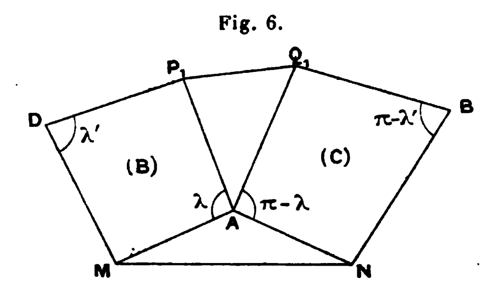
Digitized by Google

11. On peut encore partir de la figure 6, où l'on suppose d'abord

$$\widehat{P_1AQ_1} + \widehat{MAN} = 2^d,$$

afin d'avoir au point A les angles variables supplémentaires λ et $\pi - \lambda$. Les cosinus des angles variables B et D sont alors liés par une relation linéaire, et, sous deux conditions nouvelles, les angles B et D varieront

Fig. 6.



en restant constamment supplémentaires; si l'on pose

$$AN = b, \quad AQ_1 = b', \quad BN = \beta, \quad BQ_1 = \beta',$$
$$AM = d, \quad AP_1 = d', \quad DM = \delta, \quad DP_1 = \delta',$$

les deux conditions sont

$$(19) \qquad \frac{bb'}{\beta\beta'} = \frac{dd'}{\delta\delta'} = \frac{(bd + b'd')(bd' + b'd)}{(\beta\delta + \beta'\delta')(\beta\delta' + \beta'\delta)}.$$

La figure dépend de 7 paramètres, puisque les 10 longueurs vérifient 3 conditions.

Si l'on construit alors sur les côtés NB et MD deux triangles convenables, NBP et MDQ, on pourra démontrer que la longueur PQ reste constante dans la déformation de la figure; deux des 4 conditions seront

$$\hat{M} = \hat{M}, \qquad \hat{N} = \hat{N}.$$

De même, si l'on construit sur les côtés Q_1B et P_1D

Digitized by Google

deux triangles convenables, Q_1BM_1 et P_1DN_1, la longueur M_1N_1 restera constante dans la déformation de la figure. Enfin, si l'on construit le triangle PQC au moyen des angles P et Q, les côtés CM_1 et CN_1 du triangle M_1N_1C auront des longueurs constantes.

Si, dans la figure 2, on supprime les 4 tiges surabondantes CB', BC'_1, $C_1B'_1$, B_1C', la figure obtenue est formée par la réunion de deux figures analogues à la figure 6, l'une des deux figures déterminant complètement l'autre.

12. Revenons à la figure 1. On peut de quatre manières différentes, en isolant un couple de triangles opposés, regarder le système comme formé d'une *chaîne de 6 triangles, dans laquelle les sommets libres des 3 triangles de rangs impairs sont articulés avec les sommets d'un triangle de rattachement, et les sommets libres des 3 triangles de rangs pairs sont de même articulés avec les sommets d'un autre triangle de rattachement*. Ces chaînes de triangles bordent des contours hexagonaux dont l'un forme le périmètre de la figure 1, et dont les trois autres sont

$$CBA'C_1B_1A'_1, \quad \ldots;$$

elles généralisent les 4 pentagones de l'appareil à 8 tiges auquel conduit l'appareil à ligne droite de Hart.

Considérons (*fig.* 2) l'hexagone articulé $B'C'_1A'B'_1C'A'_1$, bordé par les triangles a, b_1, c, a_1, b, c_1 qui forment deux systèmes. En premier lieu, ces triangles doivent satisfaire aux conditions suivantes. D'une part, en chaque sommet de l'hexagone, les angles de triangles marqués sur la figure sont égaux ; les 6 angles changés de signe sont d'ailleurs

$$\gamma_1 - \alpha, \quad \alpha - \beta_1, \quad \ldots, \quad \beta - \gamma_1,$$

Digitized by Google

de sorte que leur somme est nulle; ils satisfont en outre à la condition

$$\sin A' \sin B' \sin C' = - \sin A'_1 \sin B'_1 \sin C'_1.$$

D'autre part, on a les trois relations d'aires

$$\overline{a} + \overline{a_1} = 0, \qquad \overline{b} + \overline{b_1} = 0, \qquad \overline{c} + \overline{c_1} = 0.$$

On a ainsi 11 conditions, qui laissent 7 paramètres pour les triangles.

En second lieu l'hexagone, dont la forme dépend de 3 paramètres, doit se déformer sous les 2 conditions suivantes, qui laissent un paramètre de déformation : *les angles égaux* λ' *marqués au point* A' *doivent être égaux aux angles égaux* λ' *marqués au point* A'_1, *et il doit en être de même pour les angles* μ' *aux points* B' *et* B'_1; *il en est alors de même pour les angles* ν' *aux points* C' *et* C'_1; car, en admettant qu'il en est ainsi, la somme des angles de l'hexagone est

$$\begin{aligned}\mu' &+ (\alpha - \gamma_1) + (2^d - \nu') + (\beta_1 - \alpha)\\ &+ \lambda' + (\gamma - \beta_1) + (2^d - \mu') + (\alpha_1 - \gamma)\\ &+ \nu' + (2^d + \beta - \alpha_1) + (2^d - \lambda') + (\gamma_1 - \beta),\end{aligned}$$

ou 8^d.

Sous les 13 conditions qui viennent d'être indiquées, les côtés des deux triangles ABC et $A_1 B_1 C_1$ restent constants pendant la déformation. Ces 6 côtés complètent les 6 quadrilatères (A), (B), (C), (A_1), (B_1), (C_1) inversement semblables deux à deux.

§ IV. — Tiges au lieu de plaques.

13. Examinons le cas (*fig.* 7) où *les plaques triangulaires sont remplacées par de simples tiges*. En général (*fig.* 3), si l'on donne le quadrilatère MNPQ, les points A, B, C, D dépendent de 3 paramètres.

Digitized by Google

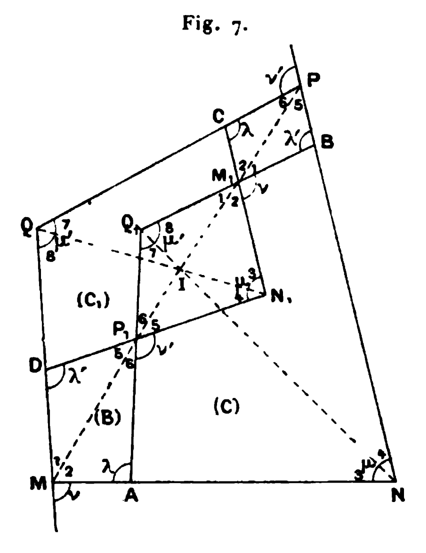
On peut se donner, avec 2 paramètres, les projections A′, B′, C′, D′ de ces points sur les côtés du quadrilatère :

1° On doit avoir

$$\frac{\overline{MA'}}{\overline{A'N}} \times \frac{\overline{NB'}}{\overline{B'P}} \times \ldots = 1;$$

2° Les 4 points A′, B′, C′, D′ doivent être à un

Fig. 7.



cercle; on se donne en outre l'angle AMN. Si cet angle devient nul, les points A, B, C, D viennent en A′, B′, C′, D′; on peut se donner le quadrilatère MNPQ, et les points A, B, C, D sous les 2 conditions suivantes :

1° On doit avoir

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AN}} \times \frac{\overline{NB}}{\overline{BP}} \times \ldots = 1,$$

c'est-à-dire que *les droites* AB, CD *doivent se couper*

Digitized by Google

en un point J *situé sur* MP, *ou encore les droites* AD, CB *doivent se couper en un point* K *situé sur* NQ;

2° *Les* 4 *points* A, B, C, D *doivent être à un cercle.*

Le système dépend alors de 6 paramètres.

14. Les 8 tiges forment 2 tétrades et 4 couples :

ANM	BM_1Q_1	CQP	DP_1N_1
CN_1M_1	DMQ	AQ_1P_1	BPN

2 tiges qui n'appartiennent ni à une même tétrade ni à un même couple sont articulées entre elles. De trois manières différentes, le système est formé de 2 quadrilatères articulés, qui sont articulés entre eux; dans le Tableau suivant, la dernière colonne indique les points d'articulation pour MN et P_1Q_1, ... :

$$(M, N, P, Q;\ P_1, Q_1, M_1, N_1), \quad (A, B, C, D),$$
$$(A, M, D, P_1;\ B, P, C, M_1), \quad (N, Q, N_1, Q_1),$$
$$(A, N, B, Q_1;\ D, Q, C, N_1), \quad (M, P, M_1, P_1);$$

les quadrilatères MNPQ et $M_1N_1P_1Q_1$ sont inversement semblables, ainsi que les quadrilatères $AMDP_1$ et CM_1BP, $ANBQ_1$ et CN_1DQ.

15. De la méthode employée au § II pour le cas général, je retiendrai seulement ceci. Si l'on pose

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AN}} = \frac{m}{n}, \quad \frac{\overline{NB}}{\overline{BP}} = \frac{n}{p}, \quad \dots,$$
$$\frac{\overline{M_1C}}{\overline{CN_1}} = \frac{m_1}{n_1}, \quad \frac{\overline{N_1D}}{\overline{DP_1}} = \frac{n_1}{p_1}, \quad \dots,$$

Digitized by Google

il faut, dans les formules (10′), remplacer m, n, ... par Gm, Gn, ..., remplacer m_1, n_1, ... par

$$Gm_1 \times (nq - mp), \quad Gn_1 \times (nq - mp), \quad \ldots,$$

et faire G infini; cela donne

$$m_1 = \frac{p}{(p+n)(p+q)},$$

$$-n_1 = \frac{q}{(q+p)(q+m)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On a encore

$$\frac{k^2}{(nq-mp)^2} = \frac{m_1 p_1}{mp} = \frac{n_1 q_1}{nq}$$
$$= \frac{1}{(m+n)(m+q)(p+n)(p+q)},$$

la dernière expression de k^2 étant celle de M. Darboux; on peut écrire

$$\frac{-k^2}{nq-mp} = \frac{m_1+n_1}{m+n} = \frac{n_1+p_1}{n+p} = \ldots.$$

16. La première méthode du § III (n° 10) est ici la plus simple, en partant des hypothèses du n° 13, dont la seconde se traduit par la relation

$$\frac{a^2}{m+n} - \frac{b^2}{n+p} + \frac{c^2}{p+q} - \frac{d^2}{q+m} = 0.$$

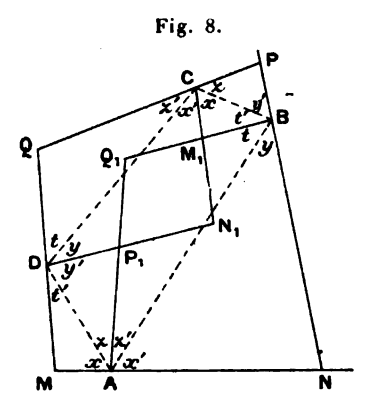
On verra d'abord que le rapport $\frac{AB}{CD}$ reste constant dans la déformation du contour, ainsi que le rapport $\frac{AD}{CB}$.

On construira les quadrilatères inversement sem-

Digitized by Google

blables $ANBQ_1$ et CN_1DQ; et l'on démontrera que le point de croisement M_1 des tiges BQ_1 et CN_1 reste

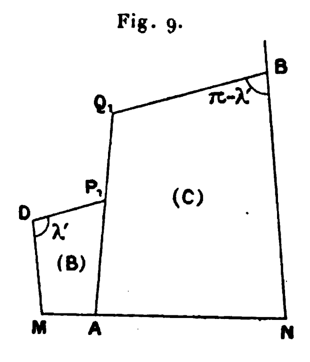
Fig. 8.



fixe *sur chacune de ces tiges* dans la déformation du système, de même que le point de croisement P_1, ... (*voir* la figure 8).

17. Avec la méthode du n° 11, on partira de la figure 9, supposée telle que les angles marqués en B et D

Fig. 9.



soient supplémentaires; etc. La figure complète peut être regardée comme formée de cette figure 9 et d'une figure

Digitized by Google

analogue comprenant les quadrilatères (B_1) et (C_1); si l'on rapproche les points D des deux figures, ainsi que les points B, on doit obtenir les lignes droites

$$DMQ, \quad BNP, \quad BM_1Q_1, \quad DN_1P_1.$$

18. Enfin, d'après ce qu'on a vu au n° 12, on peut de quatre manières différentes (*fig.* 7), en isolant un couple de tiges (AQ_1P_1 et CQP par exemple), regarder le système comme formé d'un contour hexagonal ($MNBM_1N_1D$) dont les trois côtés de rangs impairs sont articulés avec l'une des tiges du couple isolé, les trois côtés de rangs pairs étant articulés avec l'autre tige de ce couple. L'hexagone considéré doit se déformer de manière que les angles opposés, marqués sur la figure en M et M_1, N et N_1, B et D, soient égaux deux à deux, ce qui forme deux conditions et non trois.

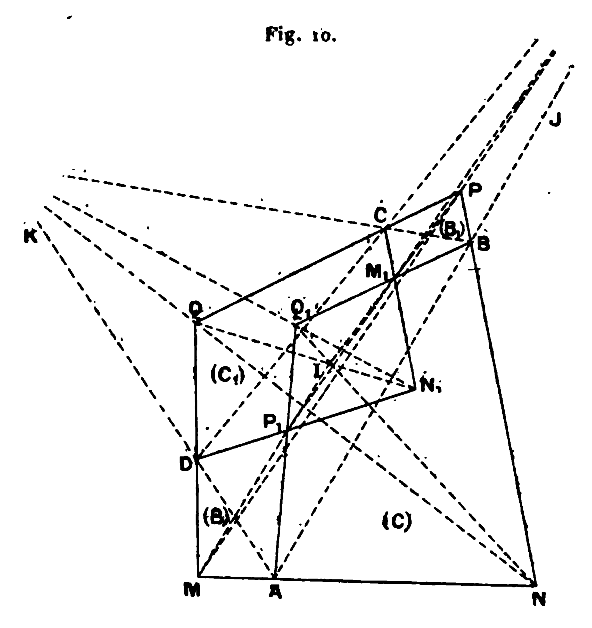
19. Par symétrie, il résulte de ce qu'on a vu au n° 13 que les diagonales homologues AB, CD des quadrilatères (C) et (C_1) et les diagonales homologues MP, M_1P_1 des quadrilatères (A), (A_1) passent par un même point J (*fig.* 10); que, de même, les diagonales AD, CB des quadrilatères (B), (B_1) et les diagonales NQ, N_1Q_1 des quadrilatères (A) et (A_1) passent par un même point K; enfin, les diagonales MP_1, M_1P des quadrilatères (B) et (B_1) et les diagonales NQ_1, N_1Q des quadrilatères (C) et (C_1) passent par un même point I. En outre, les quatre points d'articulation A, B, C, D sont à un cercle, et il en est de même des quatre points d'articulation N, Q, N_1, Q_1, des quatre points d'articulation M, P, M_1, P_1.

L'existence du point I peut d'ailleurs s'établir directement; le point de rencontre des diagonales homo-

Digitized by Google

logues MP_1, M_1P des quadrilatères (B) et (B_1) est, en effet (*fig.* 8), *homologue de lui-même* pour les deux quadrilatères inversement semblables (A) et (A_1), et il en est de même du point de rencontre des diagonales homologues NQ_1, N_1Q des quadrilatères (C) et (C_1);

Fig. 10.



or, il existe un seul point I tel que les deux triangles IMN, IM_1N_1 soient inversement semblables. Les relations

$$\frac{IM_1}{IM} = \frac{IN_1}{IN} = \frac{IP_1}{IP} = \frac{IQ_1}{IQ}$$

donnent, en particulier,

$$IM_1 \times IP = IP_1 \times IM, \qquad IN_1 \times IQ = IQ_1 \times IN,$$

et l'on voit ainsi directement que les quatre points M, P, M_1, P_1 sont à un cercle, de même que les quatre points N, Q, N_1, Q_1.

Digitized by Google

On a, en outre,

$$\widehat{MIN} + \widehat{PIQ} = \widehat{MIN} + \widehat{P_1IQ_1} = 2^d;$$

le point I *est donc foyer d'une conique inscrite au quadrilatère* MNPQ, *et ce point a la même propriété pour le quadrilatère* $M_1N_1P_1Q_1$.

De la similitude inverse des quadrilatères (A) et (A_1) par exemple, il résulte que les quatre couples de tiges

$$\left\{\begin{matrix} ANM, \\ CN_1M_1, \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} BM_1Q_1, \\ DMQ, \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} CQP, \\ AQ_1P_1, \end{matrix}\right. \quad \left\{\begin{matrix} DP_1N_1, \\ BPN \end{matrix}\right.$$

ont mêmes directions de bissectrices : ce sont les directions des axes autour desquels on doit replier (A) pour le rendre parallèle à (A_1), etc. Ces mêmes directions sont celles des bissectrices des angles que forment

$$\text{en I}\left\{\begin{matrix} MP_1 & \text{et} & M_1P, \\ NQ_1 & \text{et} & N_1Q, \end{matrix}\right. \quad \text{en J}\left\{\begin{matrix} AB & \text{et} & CD, \\ MP & \text{et} & M_1P_1, \end{matrix}\right. \quad \text{en K}\left\{\begin{matrix} AD & \text{et} & CB, \\ NQ & \text{et} & N_1Q_1; \end{matrix}\right.$$

le fait que les angles formés en I par IM et IP ont mêmes bissectrices que ceux formés par IN et IQ se traduit encore ainsi : le point I est foyer d'une conique inscrite à MNPQ.

On peut se donner le quadrilatère articulé MNPQ ; le point I étant foyer d'une conique inscrite à ce quadrilatère, pour l'une des formes qu'on peut lui donner, on peut prendre M_1 quelconque sur IP, et déterminer N_1, P_1, Q_1 par les propriétés précédentes.

§ V. — L'APPAREIL DE HART.

20. D'après la formule générale

$$k^2 = \frac{(nq - mp)^2 + (m + n + p + q)^2}{(m + n)(m + q)(p + n)(p + q)},$$

Digitized by Google

si l'on veut avoir $k = 0$, pour des valeurs finies de m, n, p, q, il faut faire simultanément

$$n + q = -(m + p), \qquad nq = mp,$$

de sorte que n et q doivent être m et p changés de signe, soit

$$m + n = 0, \qquad p + q = 0;$$

mais alors la valeur de k^2 se présente sous la forme illusoire $\frac{0}{0}$. [Cela donne d'ailleurs

$$\beta = \gamma, \qquad \beta_1 = \gamma_1,$$

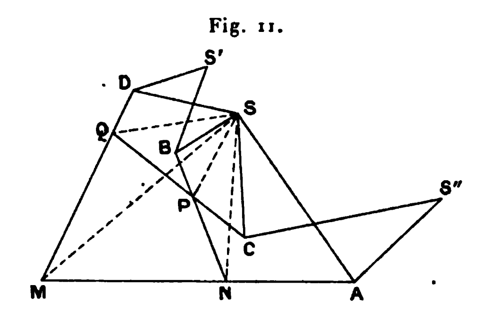
de sorte que (*fig.* 2) les points A et A_1 sont rejetés à l'infini; ce cas est sans intérêt.]

Pour pouvoir faire $k = 0$, il faut se placer dans le cas où les plaques triangulaires sont remplacées par des tiges; la condition est alors, en prenant m, n, p, q dans le sens indiqué au n° 15,

$$mp = nq;$$

les divisions de points MAN et QCP (*fig.* 11) doivent

Fig. 11.



être semblables, ainsi que les divisions de points MDQ et NBP; les 4 points A, B, C, D doivent d'ailleurs être à un cercle; le système dépend de 5 paramètres.

Digitized by Google

21. On obtient une théorie simple de l'appareil en le présentant comme il suit :

Soit un contour quadrangulaire plan MNPQ *et* S *un point* (foyer d'une conique inscrite) *tel que les directions* SM *et* SP *d'une part,* SN *et* SQ *d'autre part, aient même bissectrice. Menons* SA, SB, SC, SD *telles que chacune de ces droites et le côté du contour opposé à celui auquel elle aboutit soient également inclinés, en sens contraires, sur ces bissectrices. Le système articulé, représenté par la figure, est déformable dans le plan.*

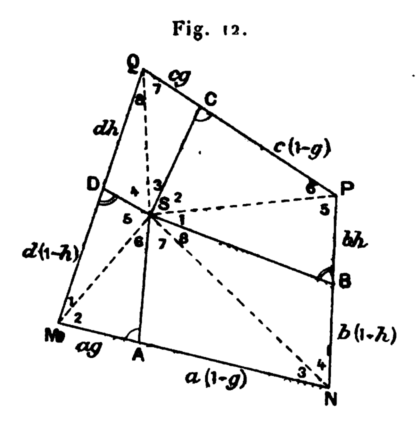
Les quadrilatères MDSA et SBPC sont inversement semblables, ainsi que les quadrilatères NBSA et SDQC, comme le montre un renversement autour de l'une des bissectrices indiquées; cette remarque servira dans un instant.

Dès 1877, Hart avait donné dans les *Proceedings* (t. VIII, p. 288) l'appareil à ligne droite qui porte son nom et qui est un cas singulier du système de Kempe considéré ici (*fig.* 11); en 1879, M. Darboux (*Bulletin*, 1879, p. 144) appliquait la méthode de Hart à ce dernier système, et une partie du calcul de cet auteur doit être conservée. Si l'on supprime d'abord la liaison PQ, et si l'on se borne à considérer le pentagone SDMNB, on trouve que *la liaison* SA *est celle qui assure l'égalité des angles marqués en* B *et* D *sur la figure :* cela résulte de la relation linéaire entre $\overline{SM}^2$ et $\overline{SN}^2$ qui traduit cette égalité. Au lieu de continuer l'emploi du calcul pour remplacer la tige SA par la tige PQ sans s'occuper de la tige SC, nous considérerons avec M. J. Réveille (*Nouvelles Annales*, 1902, p. 128) l'ensemble du système tel que Kempe l'a envisagé le premier, c'est-à-dire le

Digitized by Google

système de la figure 11 ; les points Q et P sont définis par les triangles semblables SDQ et NBS, SBP et MDS (la figure 12 est plus connue). Si l'on dénoue seulement

Fig. 12.



l'articulation Q, et si l'on appelle Q le point d'intersection des droites MD et PC dans la figure déformée, la similitude des quadrilatères MDSA et SBPC entraine celle des deux autres, les longueurs DQ et CQ gardent leurs valeurs premières, l'articulation Q se maintient d'elle-même.

Des quatre tiges qui guident le point S dans la déformation du contour MNPQ, on peut en supprimer deux, soit consécutives, soit opposées.

22. Avec les notations de la figure, en appelant O le point d'intersection des droites AC, BC, le théorème de Stewart pour les deux systèmes d'obliques SA, SO, SC et SB, SO, SD donne immédiatement, entre les longueurs SA $= \alpha$, SB $= \beta$, ..., la relation

$$h\alpha^2 + (1-h)\gamma^2 = g\beta^2 + (1-g)\beta^2.$$

La déformabilité du système se traduit alors par les 5 re-

Digitized by Google

lations

$$\frac{\alpha}{\frac{c}{h}} = \frac{\gamma}{\frac{a}{1-h}} = \frac{\beta}{\frac{d}{g}} = \frac{\delta}{\frac{b}{1-g}} = \sqrt{g(1-g)\times h(1-h)},$$

$$c\alpha + a\gamma = d\beta + b\delta.$$

23. On en déduit

$$\frac{c^2}{h} + \frac{a^2}{1-h} = \frac{d^2}{g} + \frac{b^2}{1-g};$$

si a, b, c, d sont donnés, g et h sont ainsi liés par une relation doublement quadratique à cause du cercle ABCD. Pour une même valeur de h, on a deux valeurs de g; si l'on désigne ces valeurs par g et g', on a

$$\frac{d^2}{g} + \frac{b^2}{1-g} = \frac{d^2}{g'} + \frac{b^2}{1-g'},$$

ou

$$\frac{d^2}{gg'} = \frac{b^2}{(1-g)(1-g')},$$

ou

$$\frac{d^2(1-g)}{g} = \frac{b^2 g'}{1-g'},$$

ou

$$\frac{d^2}{g^2}\times g(1-g) = \frac{b^2}{(1-g')^2}\times g'(1-g');$$

en appelant β' et δ' les nouvelles tiges S'B, S'D, on a donc $\beta' = \delta$, $\delta' = \beta$, de sorte que BSDS' est un contre-parallélogramme, comme on le voit d'ailleurs par l'examen du pentagone fondamental S'DMNB; Kempe signale ce fait, que Hart avait déjà indiqué pour le cas singulier considéré par lui.

24. Si l'on regarde g et h comme les coordonnées cartésiennes d'un point, la courbe représentée par l'équa-

Digitized by Google

tion ci-dessus est une cubique circonscrite au quadrilatère complet $g=0$, $g=1$, $h=0$, $h=1$. Cette cubique est nodale si l'on a

$$c+a=d+b \qquad (=l),$$

c'est-à-dire si le quadrilatère MNPQ est circonscriptible à un cercle; on a au point double

$$g=\frac{d}{l}, \qquad 1-g=\frac{b}{l},$$

$$h=\frac{c}{l}, \qquad 1-h=\frac{a}{l},$$

et, si l'on adopte ces valeurs de g et de h, on a

$$\text{NA}=\text{NB}=\frac{ab}{l}, \qquad \text{PB}=\text{PC}=\frac{bc}{l}, \qquad \dots.$$

On a alors

$$\alpha=\beta=\gamma=\delta=\frac{\sqrt{abcd}}{l},$$

de sorte que S est centre du cercle ABCD; d'après NA = NB, ..., ce point est en même temps centre du cercle inscrit au quadrilatère (foyer double).

M. Darboux a déjà montré (*Bulletin*, 1879, p. 67) que, si l'on déforme le quadrilatère circonscriptible MNPQ en maintenant fixes les points M et N, le lieu du centre du cercle inscrit est un cercle.

25. L'appareil de Hart pour le guidage rectiligne d'un point s'obtient en prenant g infini, d'où résulte

$$\frac{c^2}{h}+\frac{a^2}{1-h}=0.$$

Dans la figure 12, le pentagone de Hart est S'DMNB, sous la condition

$$\text{DS}'\times\text{DM}=\text{BS}'\times\text{BN};$$

Digitized by Google

on a donc

$$\overline{S'M}^2 - \overline{S'N}^2 = \text{const.}$$

Les points Q et P étant définis par les triangles semblables S'DQ et NBS', S'BP et MDS', *les triangles* S'PQ *et* S'MN *sont semblables*, avec le rapport de similitude $\frac{DS'}{BN}$ ou $\frac{BS'}{DM}$, et la tige PQ maintient l'égalité des angles en D et B. Les projections du point S' sur MN, et, par suite, sur PQ, occupent des positions fixes sur ces droites quand on déforme le contour.

La propriété du dernier sommet S du contre-parallélogramme BS'DS, propriété signalée par Hart, donne lieu aux remarques suivantes (Note de M. Réveille) :

En raison de l'hypothèse

$$\frac{DS}{DM} = \frac{BS}{BN},$$

les triangles SDM et SBN sont semblables, le rapport $\frac{SM}{SN}$ est constant, ce qui est un cas particulier de la relation linéaire entre $\overline{SM}^2$ et $\overline{SN}^2$, et le point S reste à une distance constante d'un certain point A de la droite MN. Si l'on définit les points Q et P par les triangles SDQ et SBP semblables aux triangles MDS et NBS qui le sont déjà, le triangle SPQ est évidemment semblable au triangle SNM, et la longueur PQ est constante; on peut introduire une dernière tige SC.

Ce point S de la figure 12 est d'ailleurs celui que l'on obtient en supposant que, dans la dernière relation du n° 22, les deux membres sont nuls (β et γ sont ici négatifs). On a

$$\frac{\beta}{\delta} + \frac{b}{d} = 0, \qquad \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{a}{c} = 0$$

Digitized by Google

ou encore

$$\frac{SB}{SD} = \frac{PN}{QM} = \frac{BN}{DM}, \qquad \frac{SA}{SC} = \frac{MN}{PQ} = \frac{AM}{CQ};$$

comme les angles B et D sont égaux, ainsi que les angles A et C, *le point* S *est à chaque instant centre de similitude des segments* QM *et* PN, MN *et* QP. Les valeurs de h et g pour ce point S étant données par les équations

$$\frac{c^2}{h} + \frac{a^2}{1-h} = 0, \qquad \frac{d^2}{g} + \frac{b^2}{1-g} = 0,$$

la relation doublement quadratique entre g et h montre que la seconde valeur de g qui correspond à la valeur considérée de h est infinie; dans la déformation du contour MNPQ, les projections du point S′ sur MN et PQ occupent donc des positions fixes sur ces droites. Le point S″, donné par le contre-parallélogramme ASCS″, joue un rôle analogue pour QM et PN. Si l'on se donne le contour MNPQ, on peut construire S′ et S″ en construisant d'abord S.

26. La théorie de l'appareil général (*fig.* 11), faite par le calcul indépendamment de la tige SC, repose sur les deux relations suivantes où d' et b' désignent MD et NB :

$$b'\beta.\overline{SM}^2 + d'\delta.\overline{SN}^2 = (b'd' + \beta\delta)(b'\delta + d'\beta),$$

$$c^2 b'^2 d'^2 + a^2 b'\beta.d'\delta = (b'\beta + d'\delta)\left(b'\beta.\overline{SM}^2 + d'\delta.\overline{SN}^2\right);$$

on utilise pour la seconde l'égalité des angles $\widehat{QSP}$ et $\widehat{MSN}$. En écartant le cas de l'appareil à ligne droite, pour lequel on suppose $b'\beta + d'\delta = 0$, on peut remplacer, dans chacune de ces relations, le binome

Digitized by Google

en SM, SN, par

$$(b'\beta + d'\delta)\,\overline{SA}^2 + \frac{a^2 b'\beta . d'\delta}{b'\beta + d'\delta};$$

on obtient, d'une part, l'expression de SA, et l'on a, d'autre part, pour la longueur de la tige PQ

$$c = \frac{b'\beta + d'\delta}{b'd'} \times SA;$$

la figure 11 donne immédiatement ce résultat :

$$\frac{c}{a} = \frac{QC}{a} + \frac{CP}{a} = \frac{\delta}{b'} + \frac{\beta}{d'}.$$

On peut écrire, dans tous les cas, et c'est en somme la première relation du n° 23,

$$c^2 b'd' + a^2\beta\delta = \left(1 + \frac{\beta\delta}{b'd'}\right)(b'\beta + d'\delta)(b'\delta + d'\beta);$$

β et δ sont échangeables, comme l'exige la substitution possible du point S' au point S; les deux membres sont nuls quand il s'agit du point S' de la figure 12 :

$$\frac{c}{a} = \frac{\beta}{d'} = \frac{-\delta}{b'};$$

ils le sont également quand il s'agit du point S.

[B2c]

SUR LES SUBSTITUTIONS QUI TRANSFORMENT UNE FORME DU SECOND DEGRÉ DONNÉE EN UNE AUTRE ÉGALEMENT DONNÉE;

Par M. H. LAURENT.

Je me propose de montrer comment on peut former facilement *toutes* les substitutions linéaires qui transforment une forme quadratique donnée en une autre

également donnée, quand cette opération est possible. J'aurai pour cela besoin d'établir quelques propositions préliminaires.

Soit

$$x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, x)$$

une substitution orthogonale, c'est-à-dire telle que

$$x'^2_1 + x'^2_1 + \ldots = x^2_1 + x^2_2 + \ldots,$$

alors on a, comme l'on sait

$$(1) \quad \begin{cases} a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \ldots + a_{in}a_{jn} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \gtrless j, \\ 1 & \text{si} \quad i = j, \end{cases} \\ a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \ldots + a_{ni}a_{nj} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \gtrless j, \\ 1 & \text{si} \quad i = j. \end{cases} \end{cases}$$

Je dis que la substitution inverse de

$$(2) \quad \begin{cases} x'_i = a_{i1}x_1 + \ldots + (a_{ii} + 1)x_i + \ldots + a_{in}x_n \\ (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

que nous écrivons ainsi :

$$\mathrm{A}x_i = \mathrm{A}_{i1}x'_1 + \mathrm{A}_{i2}x'_2 + \ldots + \mathrm{A}_{in}x'_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

est gauche et que l'on a

$$\mathrm{A}_{ij} = -\mathrm{A}_{ji}, \qquad \mathrm{A}_{11} = \mathrm{A}_{22} = \ldots = \mathrm{A}_{nn}.$$

Nous poserons

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+1 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}, \qquad \mathrm{A}_{ij} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial a_{ij}},$$

alors on aura

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \mathrm{A}_{11}(a_{11}+1) + \mathrm{A}_{12}a_{12} + \ldots + \mathrm{A}_{1n}a_{1n}, \\ 0 &= \mathrm{A}_{11}a_{21} + \mathrm{A}_{12}(a_{22}+1) + \ldots + \mathrm{A}_{1n}a_{2n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

Digitized by Google

multipliant la première de ces formules par a_{11}, la seconde par a_{21}, etc., et ajoutant, on aura, en vertu de (1),

$$A a_{11} = A_{11} + A_{11} a_{11} + A_{12} a_{21} + \ldots + A_{1n} a_{n1}$$

ou

$$A a_{11} = A_{11}(a_{11} + 1) + A_{12} a_{21} + \ldots + A_{1n} a_{n1};$$

on aurait de même

$$\begin{aligned} A a_{12} &= A_{11} a_{12} + A_{12}(a_{22} + 1) + \ldots + A_{1n} a_{n2}, \\ A a_{13} &= A_{11} a_{13} + A_{12} a_{23} \qquad + \ldots + A_{1n} a_{n3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Mais on a, en résolvant ces équations par rapport aux A,

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}+1 & \ldots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & \ldots & a_{n3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}, \\ A_{12} &= \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & 0 & \ldots & a_{n2} \\ a_{13} & 0 & \ldots & a_{n3} \\ \ldots & . & \ldots & \ldots \end{vmatrix}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

D'un autre côté, on a directement

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22}+1 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33}+1 & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33}+1 & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} & \ldots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{33}+1 & \ldots & a_{n3} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dès lors, il est manifeste que

$$A_{12} = - A_{21},$$

et en général :

$$A_{ij} = - A_{ji}.$$

Mais, en développant A suivant les éléments de la première ligne, on a

$$A = (a_{11} + 1)A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n},$$

et en développant la valeur (3) de A_{11}

$$A_{11} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n};$$

on en tire

$$A - A_{11} = A_{11},$$

donc

$$A = 2A_{11} = 2A_{22} = \ldots \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Réciproquement, si l'on a

$$c_{ii} = 0, \qquad c_{ij} = -c_{ji},$$

et si l'on forme les équations

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_i - x_i = c_{i1}(x'_1 + x_1) + c_{i2}(x'_2 + x_2) + \ldots + c_{in}x'_n + x_n) \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

ces équations résolues par rapport à x'_1, x'_2, ... fourniront une substitution orthogonale.

Ce que l'on vérifie facilement en multipliant par $x'_i + x_i$, en faisant $i = 1, 2, \ldots, n$ et, en ajoutant, tout disparait dans le second membre et l'on a

$$x'^2_1 - x^2_1 + x'^2_2 - x^2_2 + \ldots = 0$$

ou

$$x'^2_1 + x'^2_2 + \ldots = x^2_1 + x^2_2 + \ldots.$$

Si l'on prend

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} - 1 & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - 1 & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

et si l'on écrit $\frac{\partial C}{\partial c_{ii}}$ au lieu de $\frac{\partial C}{\partial c_{ii} - 1}$, les formules (4)

Digitized by Google

donnent successivement

$$-c_{i1}x'_1 - c_{i2}x'_2 \ldots (c_{ii}-1)x'_i - \ldots$$
$$= c_{i1}x_1 + \ldots + (c_{ii}+1)x_i + \ldots,$$

puis

$$-Cx'_1 = \left\{ \frac{\partial C}{\partial c_{11}}[(c_{11}+1)x_1 + c_{12}x_2 + \ldots] + \frac{\partial C}{\partial c_{12}}[c_{21}x_1 + (c_{22}+1)x_2 + \ldots] + \ldots\ldots \right\};$$

enfin, en observant que $c_{ij} = -c_{ji}$ et que

$$(c_{11}-1)\frac{\partial C}{\partial c_{11}} + \qquad c_{12}\frac{\partial C}{\partial c_{21}} + \ldots = C,$$
$$c_{21}\frac{\partial C}{\partial c_{11}} + (c_{22}-1)\frac{\partial C}{\partial c_{12}} + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on a

$$Cx'_1 = x_1\left(2\frac{\partial C}{\partial c_{11}} + C\right) + x_2 2\frac{\partial C}{\partial c_{12}} + \ldots.$$

Ces résultats peuvent se résumer comme il suit : en général, si s désigne la substitution

$$x'_i = \alpha_{i1}x_1 + \ldots + \alpha_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et si t désigne la substitution

$$x'_i = \beta_{i1}x_1 + \ldots + \beta_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

convenons de représenter par $ps + qt$ la substitution

$$x'_i = (p\alpha_{i1} + q\beta_{i1})x_1 + \ldots + (p\alpha_{in} + q\beta_{in}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On voit que si G désigne une substitution gauche et symétrique (les c_{ii} sont nuls) et si ω désigne une substitution orthogonale, on aura

$$\omega = \frac{2}{G \pm 1} \pm 1 \qquad \text{et} \qquad G \pm 1 = \frac{2}{\omega \pm 1};$$

Digitized by Google

les signes $\pm$ proviennent d'une part de ce que, dans la démonstration de notre premier théorème, on aurait pu remplacer les $a_{ii}+1$ par les $a_{ii}-1$, et que dans la réciproque on aurait pu remplacer dans les premiers membres de (4), $x'_i - x_i$ par $x_i - x'_i$.

Il résulte de là que nous avons trouvé le moyen de construire *toutes* les substitutions orthogonales, sans autres calculs que des additions, des soustractions, des multiplications et des divisions.

Les résultats auxquels nous venons de parvenir ne sont qu'un cas particulier d'une question beaucoup plus générale. Soient

$$f = \Sigma\, \alpha_{ij} x_i x_j, \qquad f' = \Sigma\, \beta_{ij} x_i x_j$$

deux formes quadratiques; décomposons-les en carrés, et supposons

$$f = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2, \qquad f' = X_1'^2 + X_2'^2 + \ldots + X_n'^2,$$

les X et les X' étant des fonctions linéaires, que nous supposerons d'abord réelles. Posons

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} X'_i - X_i = c_{i1}(X'_1 + X_1) + c_{i2}(X'_2 + X_2) + \ldots + c_{in}(X'_n + X_n) \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

et supposons

$$c_{ji} = -c_{ji}, \qquad c_{ii} = 0;$$

on aura

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots = X_1'^2 + X_2'^2 + \ldots.$$

La substitution (5) transforme f en f', elle n'est pas réelle, si les fonctions f et f' ne sont pas toutes deux des sommes de carrés positifs. Supposons

$$f = -X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2, \qquad f' = -X_1'^2 + X_2'^2 + \ldots + X_n'^2.$$

Pour transformer f en f', on fera usage de la trans-

Digitized by Google

formation

$$-(X'_1 - X_1) = c_{11}(X_1 + X'_1) + c_{12}(X_2 + X'_2) + \ldots,$$
$$(X'_2 - X_2) = c_{21}(X_1 + X'_1) + c_{22}(X_2 + X'_2) + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si f et f' contenaient un plus grand nombre de carrés négatifs on voit sans peine comment il faudrait modifier les formules de transformation pour changer f en f'.

Au fond, on peut représenter toutes les transformations de f en f' au moyen de la formule (5) et si l'on désigne par s et s' les substitutions qui changent f et f' en sommes de carrés, et par Ω la substitution orthogonale (5), les substitutions changeant f en f' seront de la forme

$$s\Omega s'^{-1}.$$

Les substitutions laissant f invariant seront de la forme

$$s\Omega s^{-1};$$

ce sont des transformées de substitutions orthogonales.

L'équation en s

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & \ldots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22}-s & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

est ce que l'on appelle l'équation caractéristique de la substitution s :

$$(7)\qquad x'_1 = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les transformées de s ont même équation caractéristique que s et, en effet, en développant l'équation caractéristique, on a

$$s^n + p_1 s^{n-1} + \ldots = 0,$$

et en appelant t une substitution quelconque

$$ts^n t^{-1} + p_1 ts^{n-1} t^{-1} + \ldots = 0;$$

Digitized by Google

mais

$$ts^n t^{-1} = (tst^{-1})^n.$$

Donc, etc.

Les équations caractéristiques des substitutions qui laissent les formes quadratiques invariantes sont les équations caractéristiques des substitutions orthogonales.

Supposons la substitution (7) orthogonale, élevons le premier membre de son équation caractéristique au carré, nous aurons

$$\begin{vmatrix} -2a_{11}s+1+s^2 & -2a_{12}s & \dots & -2\alpha_{1n}s \\ -2\alpha_{21}s & -2a_{22}s+1+s^2 & \dots & -2a_{2n}s \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} 2a_{11}-\left(s+\frac{1}{s}\right) & 2\alpha_{12} & \dots & 2\alpha_{1n} \\ 2\alpha_{21} & 2a_{22}-\left(s+\frac{1}{s}\right) & \dots & +2a_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots \end{vmatrix} = 0,$$

avec

$$2\alpha_{ij} = a_{ij} + a_{ji} = 2\alpha_{ji};$$

cette équation montre que si $v_1, v_2, \dots$ sont les racines de l'équation caractéristique, les quantités $v_i + \frac{1}{v_i}$ sont réelles (si les a_{ij} sont réels).

Maintenant l'équation (6) s'obtient en faisant $x'_i = sx_i$ dans (7) et en éliminant les x_{ij} elle s'obtiendra aussi en faisant $x'_i = sx_i$ dans les équations correspondantes

$$x'_i - x_i = c_{i1}(x'_i + x_1) + c_{i2}(x'_2 + x_2) + \dots,$$

ce qui donne

$$(s-1)x_i = c_{i1}(s+1)x_1 + c_{i2}(s+1)x_2 + \dots,$$

Digitized by Google

d'où l'on tire cette nouvelle forme de l'équation en s,

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\frac{s-1}{s+1} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-\frac{s-1}{s+1} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on remplace $\frac{s-1}{s+1}$ par t et si l'on élève au carré, on trouve

$$\begin{vmatrix} t^2+\dots & c_{13}c_{23}+\dots & c_{12}c_{32}+\dots \\ c_{13}c_{23}+\dots & t^2+\dots & c_{13}c_{32}+\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{vmatrix} = 0,$$

équation en t^2 qui a toutes ses racines réelles.

On sait que si l'on forme les mineurs du premier membre obtenus en supprimant : 1° la dernière ligne et la dernière colonne; 2° les deux dernières lignes et les deux dernières colonnes, etc., on obtient des fonctions de Sturm. Or, pour $t^2 = -\infty$ on n'obtient que des variations, pour $t^2 = 0$ on n'a que des permanences, en vertu des propriétés connues des déterminants symétriques, donc l'équation en t^2 a ses racines nulles ou négatives, donc les valeurs de s sont données par des équations de la forme

$$\frac{s-1}{s+1} = \alpha\sqrt{-1}$$

ou

$$s = \frac{1+\alpha\sqrt{-1}}{1-\alpha\sqrt{-1}} = \frac{1+2\alpha\sqrt{-1}-\alpha^2}{1+\alpha^2},$$

ou en posant

$$\frac{r\alpha}{1+\alpha^2} = \sin\varphi, \qquad \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} = \cos\varphi,$$

on a

$$s = e^{\varphi\sqrt{-1}},$$

Digitized by Google

telle est la forme d'une racine de l'équation caractéristique d'une substitution orthogonale à coefficients réels.

En adoptant notre symbolique pour la représentation des substitutions linéaires, on voit qu'une substitution orthogonale est de la forme

$$\xi_1 e^{\varphi_1\sqrt{-1}} + \xi_2 e^{\varphi_2\sqrt{-1}} + \ldots + \xi_n e^{\varphi_n\sqrt{-1}}, \qquad \xi_i\xi_j = 0, \qquad \xi_i^2 = 1,$$

de sorte que la puissance $p^{\text{ième}}$ d'une substitution orthogonale s'obtient en multipliant par p les arguments φ.

[R8aα]

REMARQUES AU SUJET DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE POSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1903;

PAR M. DE SPARRE.

L'énoncé de cette question, en la réduisant à ce qui est nécessaire pour ce qui suit, est le suivant :

Une sphère solide homogène de masse m et de rayon a est mobile autour de son centre O *supposé fixe. Dans la sphère est creusé un canal rectiligne de section infiniment petite, suivant un diamètre* DD'; *deux insectes ayant chacun la même masse que la sphère se trouvent dans ce canal, en deux points* I *et* I' *symétriques par rapport au centre* O. *A l'instant initial,* $t = 0$, *la sphère est animée d'une rotation* ω *autour d'un axe instantané donné et, à partir de cet instant, les insectes marchent dans le canal, suivant une loi donnée, en prenant appui sur ses parois et restant toujours symétriques par rapport au centre* O.

Digitized by Google

Trouver le mouvement du système, en réduisant les insectes à des points matériels.

Si z et — z sont les distances des deux insectes au centre O, *dans le canal* DD′, *on suppose z une fonction donnée du temps* $z = f(t)$.

Cas particuliers. — 1° *A l'instant initial l'axe instantané est dans le plan perpendiculaire à* DD′;

2° *L'axe instantané initial est quelconque, mais on a* $z = ae^{-kt}$, *k étant une constante positive.*

Une partie de l'énoncé que je ne reproduis pas invitait les candidats à calculer tout d'abord les composantes p, q, r de la rotation instantanée de la sphère suivant trois axes fixes par rapport à cette sphère. Cette méthode conduit à des calculs beaucoup plus compliqués que la suivante, presque intuitive.

Le moment d'inertie du système par rapport à DD′ est

$$\frac{2}{5}ma^2.$$

Le moment d'inertie par rapport à un diamètre perpendiculaire à DD′ est

$$2m\left(\frac{a^2}{5} + z^2\right).$$

Les forces extérieures, qui se réduisent à la pesanteur, ont un moment nul par rapport à l'origine, les deux insectes occupant des positions toujours symétriques; par suite l'axe du couple résultant des quantités de mouvement est invariable de grandeur et de position.

Prenons cet axe pour axe des Z fixes et soit $\frac{2}{5}ma^2h$ la grandeur de cet axe.

Digitized by Google

Soient :

θ l'angle de DD' avec l'axe du couple résultant des quantités de mouvement OZ;

ψ l'angle avec OX de la trace OR sur XOY du plan perpendiculaire à OD mené par O;

φ l'angle d'un rayon de la sphère, fixe par rapport à cette sphère avec OR.

En exprimant que la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à OD, OR et à la perpendiculaire O et OD' dans le plan ZOD sont les projections sur ces droites de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement, on a

$$(1) \qquad \frac{2}{5} ma^2 h \cos\theta = \frac{2}{5} ma^2 (\psi' \cos\theta + \varphi'),$$

$$(2) \qquad \theta' = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{2}{5} ma^2 h \sin\theta = 2m\left(\frac{a^2}{5} + z^2\right)\psi' \sin\theta,$$

puisque les composantes de la rotation suivant OD, OR, OQ sont $\psi' \cos\theta + \varphi'$, θ' et $\psi' \sin\theta$, et que ces axes sont principaux.

La deuxième équation donne

$$\theta = \text{const.}$$

et l'on déduit alors de la première

$$(4) \qquad \psi' \cos\theta + \varphi' = h \cos\theta = \text{const.},$$

et de la troisième

$$(5) \qquad \psi' = \frac{h}{1 + \frac{5z^2}{a^2}}.$$

Le problème est donc complètement résolu par les

Digitized by Google

formules suivantes, z étant fonction du temps :

(6) $$\theta = \text{const.},$$

(7) $$\psi = \int_0^t \frac{h\,dt}{1 + \frac{5z^2}{a^2}},$$

(8) $$\varphi = (ht - \psi)\cos\theta.$$

Si l'on veut de plus les composantes p et q de la rotation suivant deux diamètres perpendiculaires à OD, fixes par rapport à la sphère et rectangulaires entre eux, on aura

$$p = \psi' \sin\theta \sin\varphi, \qquad q = \psi' \sin\theta \cos\varphi.$$

L'axe instantané initial est d'ailleurs situé dans le plan ZOD, et si λ est l'angle qu'il fait avec OD, on a

(9) $$\omega \cos\lambda = \psi'_0 \cos\theta + \varphi'_0 = h\cos\theta,$$

(10) $$\omega \sin\lambda = \psi'_0 \sin\theta \qquad = \frac{h}{1 + \frac{5z_0^2}{a^2}} \sin\theta;$$

d'où l'on déduira, si λ et ω sont donnés, ainsi que z_0, θ et h :

1° Si $\lambda = 90°$, on aura

$$\theta = 90°, \qquad h = \left(1 + \frac{5z_0^2}{a^2}\right)\omega;$$

on en déduit

$$\varphi' = 0,$$

et le mouvement se réduit à une rotation autour de l'axe fixe OZ dont la vitesse angulaire est fournie par (5);

2° $z = ae^{-kt}$, on a

$$\psi = \int_a^t \frac{h\,dt}{1 + 5e^{-2kt}} = h\int_0^t \left(1 - \frac{5e^{-2kt}}{1 + 5e^{-2kt}}\right) dt,$$

Digitized by Google

ou

$$\psi = ht + \frac{h}{2k} L\left(\frac{1 + 5e^{-2kt}}{6}\right)$$

et, par suite,

$$\varphi = \frac{h\cos\theta}{2k} L \frac{6}{1 + 5e^{-2kt}}.$$

Ces valeurs font voir que φ tend vers une valeur finie et que le mouvement tend vers une rotation uniforme autour de l'axe OZ du couple résultant des quantités de mouvement avec la vitesse angulaire h.

Dans ce cas, d'ailleurs, on a, en vertu de (9) et (10),

$$\omega\cos\lambda = h\cos\theta,$$

$$\omega\sin\lambda = \frac{h}{6}\sin\theta,$$

d'où

$$h^2 = \omega^2(1 + 35\sin^2\lambda), \qquad \tang\theta = 6\tang\lambda.$$

De plus, la valeur limite de φ est

$$\frac{h\cos\theta}{2k} L6.$$

CORRESPONDANCE.

Au sujet de la question 1913 (*voir* 1903, p. 422), nous avons reçu de M. H. Brocard une étude de l'équation

$$2x^3 = 3y^2 - 1$$

dont il a signalé la solution

$$x = 61, \qquad y = 389.$$

Digitized by Google

BIBLIOGRAPHIE.

Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1904. — In-16 de près de 850 pages avec figures. Prix : $1^{fr},50$ (franco, $1^{fr},85$). Paris, Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins.

La librairie Gauthier-Villars vient de publier, comme chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes pour* 1904.

Ce petit Volume compact contient, comme toujours, une foule de renseignements indispensables à l'ingénieur et à l'homme de science. Parmi les Notices de cette année, signalons tout spécialement celle de M. P. Hatt : *Explication élémentaire des marées.*

La règle a calcul; par M. *A. Jully*. — 1 vol. petit in-8. Chez E. Bernard, à Paris.

M. A. Jully, inspecteur de l'enseignement manuel dans les écoles de la Ville de Paris, vient de publier chez E. Bernard, imprimeur-éditeur, un petit Volume sur la *Règle à calcul,* à l'usage des élèves des écoles et des cours professionnels. On y trouve les notions théoriques nécessaires à l'emploi de la règle à calcul et ses applications pratiques. Au moyen de ce Livre, on peut se servir facilement de la règle de Mannheim, sans avoir étudié les logarithmes et épargner ainsi un temps précieux pour exécuter des calculs ordinairement longs et difficiles. Le prix de ce Livre ($1^{fr},50$) le met à la portée de tous.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Rennes.

Épreuve écrite. — I. *Exposer le théorème général relatif à la somme des moments des quantités de mouvement d'un système de points libres soit par rapport à un point, soit par rapport à un axe.*

Digitized by Google

II. *En les supposant liés par quelque condition*

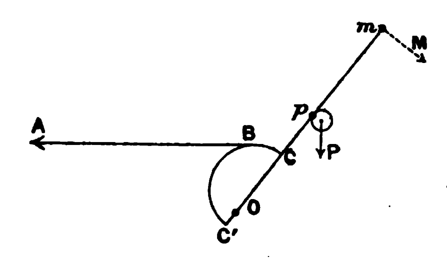
$$f(x, y, z, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0,$$

que doit être le premier membre f pour que les forces de liaison n'influent pas sur la somme des moments par rapport à l'axe coordonné Ox?

Problème. — *Un fil flexible et inextensible prend pour figure d'équilibre un arc de la courbe* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ *limité à la circonférence concentrique à cette courbe dont le rayon est* $\frac{a}{\sqrt{2}}$. *La force qui agit sur lui émane de ce centre. Quelle en est la loi en fonction de la distance r? Trouver également l'expression de la tension en chaque point du fil, soit en fonction de r, soit en fonction de l'arc s compté à partir du sommet.*

Quelles sont les forces à appliquer aux extrémités pour retenir ces points et obtenir effectivement l'équilibre?

Épreuve pratique. — *On veut au moyen d'un long fil métallique* CBA *transmettre à un objet éloigné* A *une force horizontale constante* T. *Dans ce but on fixe l'une* C *des extrémités de ce fil sur le contour* CBC′, *après quoi il*



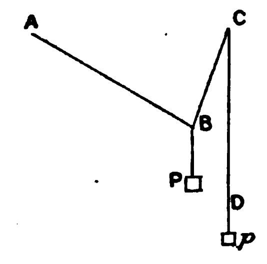
s'en détache tangentiellement de B *jusqu'à l'objet* A. *La plaque verticale* CBC′ *est évidée intérieurement de façon que son poids soit négligeable. Elle est liée à un levier, mobile dans le plan vertical autour du point* O, *qui porte en p un contrepoids* P *et sur la manette duquel agira en m, perpendiculairement à* Om, *la force* M *développée par la manœuvre. On donne les forces* T, P, M, *et les dis-*

Digitized by Google

tances $Op = p$, $Om = m$. *Quelle forme faut-il donner au profil inconnu de la plaque pour que la force* M *soit constante en toute position du système?* (Juillet 1902.)

Épreuve écrite. — I. *Étude du pendule de Foucault.*

II. *Une tige rigide* AB *de masse négligeable, mobile autour de son extrémité* A, *supporte à l'autre extrémité* B *un poids* P. *Un fil flexible, inextensible et sans masse,* BCD, *est attaché en* B *à la tige, passe sur une très petite poulie* C *et retombe verticalement en* D *en supportant un autre poids* p. *Le point* C *est situé dans le plan horizontal*



du point A *et la distance* AC *est égale à la longueur de la tige.*

A l'instant initial, le système est au repos; le point B *maintenu en* C. *On l'abandonne à lui-même : examiner s'il se produit un mouvement, l'étudier quand il a lieu.*

(Novembre 1902.)

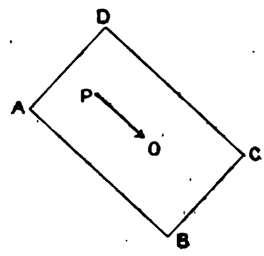
Toulouse.

Épreuve écrite. — *Étudier le mouvement d'un point matériel attiré par un centre fixe en raison inverse de la cinquième puissance de la distance : forme générale de la trajectoire, détermination des coordonnées du point mobile en fonction du temps, cas particulier où les données initiales sont telles qu'on peut effectuer les intégrations au moyen des fonctions élémentaires.*

Épreuve pratique. — *Une plaque rectangulaire* ABCD,

Digitized by Google

homogène, pesante, de centre O, *est mobile autour d'un axe horizontal, perpendiculaire à la plaque qu'il perce en un point* P. *La droite* PO *est parallèle au côté* AB *du*



rectangle, et l'on a

$$AB = 0^m,40, \qquad OP = 0^m,15.$$

Calculer le second côté BC *du rectangle, par la condition que ce pendule batte la seconde dans le vide.*

L'accélération de la pesanteur est de $9^m,81$ *par seconde.*

(Novembre 1901.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étudier le mouvement d'une sphère pesante, homogène, parfaitement polie, assujettie à se mouvoir sur la surface interne d'un cylindre circulaire droit, parfaitement poli, dont l'axe est horizontal. On supposera que, à l'instant initial, la sphère est en contact avec la génératrice la plus basse du cylindre et que le point de contact est animé d'une vitesse* v_0 *faisant avec la génératrice un angle* α. *Calculer la réaction du cylindre.*

On examinera les diverses circonstances de ce mouvement, en particulier le cas où la sphère atteindra ou n'atteindra pas la génératrice supérieure du cylindre.

On donne le rayon de la sphère a, *celui du cylindre* $a+b$ *et la masse de la sphère.*

II. *Démontrer que, dans le mouvement général d'un corps solide entièrement libre dans l'espace, le lieu des points pour lesquels l'accélération centripète est nulle ou dont les trajectoires ont une inflexion en ces points est une cubique gauche.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — II. *Calculer l'attraction exercée par*

Digitized by Google

un cône circulaire droit homogène sur un point placé à son sommet. On supposera l'attraction proportionnelle à la $n^{ième}$ puissance de la distance. Pour quelles valeurs de n l'attraction est-elle finie ou infinie?

Cas particulier de l'attraction newtonienne.

On donne la hauteur du cône h, l'angle au sommet 2α et la densité ρ.

Généralement, l'attraction d'un corps quelconque sur un point de sa surface étant proportionnelle à la $n^{ième}$ puissance de la distance, pour quelles valeurs de n l'attraction sera-t-elle finie ou infinie? On supposera que la surface limitant le corps est telle que les rayons vecteurs menés du point attiré ne rencontrent cette surface qu'en un seul point. (Juillet 1902.)

Caen.

Un disque circulaire, homogène, très mince, posé sur un plan horizontal H, *peut tourner autour de son centre* O, *qui est fixe. En un point de la circonférence est attachée une extrémité d'un fil, de masse négligeable, qui s'enroule sur le disque et se termine par un point* M *de masse m. La masse du disque est* $6m$: *chacun de ses éléments exerce sur* M *une répulsion proportionnelle à la masse de l'élément et à sa distance à* M. *A l'instant initial,* M *est sur la circonférence du disque et le système en repos : déterminer le mouvement qu'il va prendre, le fil se déroulant sur le point* H : *trajectoire du point* M. *On néglige toute résistance passive.*

SOLUTION.

Supposons qu'à l'instant initial la masse m ait été sur O en coïncidence avec un point du disque qui, à l'instant t, vient en A : au même instant, le fil se détache du disque en un point B tel que BM = arc AB : soient AOB = θ, AOX = φ, φ compté en sens contraire de θ. La droite BM, égale à $R\theta$, fait avec OX l'angle $\theta - \varphi - \frac{\pi}{2}$ et la vitesse de M peut être regardée comme résultant de la vitesse $R\varphi'$ suivant BM et $R\theta(\theta' - \varphi')$ perpendiculaire. La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à O reste nulle et l'on a

$$mR^2\theta^2(\theta' - \varphi') - 4mR^2\varphi' = 0, \qquad \frac{\theta - \varphi}{2} = \text{arc tang}\,\frac{\theta}{2}.$$

Digitized by Google

Les coordonnées de M sont

$$x = R[\cos(\theta - \varphi) + \theta \sin(\theta - \varphi)] = R\frac{3\theta^2 + 4}{\theta^2 + 4},$$

$$y = R[\sin(\theta - \varphi) - \theta \cos(\theta - \varphi)] = \frac{R\theta^3}{\theta^2 + 4}:$$

M décrit la cissoïde

$$y^2 = \frac{(x - R)^3}{3\lambda - x)}.$$

L'intégrale des forces vives est de la forme

$$mR^2[\theta^2(\theta' - \varphi')^2 + \varphi'^2] + 3mR^2\varphi'^2 = m\lambda^2R^2\theta^2,$$

d'où $\theta = e^{\frac{\lambda t}{2}} - e^{-\frac{\lambda t}{2}}$ croît indéfiniment, tandis que $\theta - \varphi$ tend vers π. (Juillet 1903.)

QUESTIONS.

1988. On donne une quadrique et trois droites α, β, γ. Si D est un point de la quadrique, le trièdre de sommet D dont les plans des faces passent par α, β, γ appartient à un tétraèdre DABC inscrit à la quadrique. De quelle classe est l'enveloppe du plan ABC?

Application au problème :

Inscrire à une quadrique un tétraèdre dont les plans des faces passent par quatre droites données. (G. Fontené.)

1989. On donne les demi-diamètres conjugués OD, OD' d'une ellipse et les segments OG, OG_1 perpendiculaires et égaux à OD'. Démontrer que les bissectrices de l'angle GDG_1, limitées au diamètre OD', se projettent orthogonalement sur DG, ou DG_1, suivant des segments respectivement égaux aux demi-axes de l'ellipse. (Mannheim.)

1990. On considère une hypocycloïde à trois rebroussements qui varie de manière à avoir, avec un cercle donné, trois tangentes communes fixes. Les deux courbes ont, en outre, trois tangentes communes variables. Quel est le lieu des sommets du triangle formé par ces trois dernières tangentes?

(R. Bricard.)


Digitized by Google

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES,

Fondé en 1836 par *Liouville*, publié par CAMILLE JORDAN, Membre de l'Institut, avec la collaboration de MM. M. Lévy, A. Mannheim, E. Picard, H. Poincaré. In-4, trimestriel. 5e SÉRIE. Tome IX; 1903.

1re Série. 20 vol. in-4, années 1836 à 1855 (au lieu de 600 fr.). 400 fr.
Chaque volume pris séparément (au lieu de 30 fr.)........ 25 fr.
2e Série. 19 vol. in-4, années 1856 à 1874 (au lieu de 570 fr.). 380 fr.
Chaque volume pris séparément (au lieu de 30 fr.)........ 25 fr.
3e Série. 10 vol. in-4, années 1875 à 1884 (au lieu de 300 fr.) .. 200 fr.
Chaque volume pris séparément (au lieu de 30 fr.)....... 25 fr.
4e Série. 10 vol. in-4, années 1885 à 1894 (au lieu de 300 fr.).. 200 fr.
Chaque volume pris séparément (au lieu de 30 fr.)....... 25 fr.

Table générale des 20 volumes composant la **1re Série.** In-4 .... 3 fr. 50 c.
Table générale des 19 volumes composant la **2e Série.** In-4 .... 3 fr. 50 c.
Table générale des 10 volumes composant la **3e Série.** In-4...... 1 fr. 75 c.
Table générale des 10 volumes composant la **4e Série,** avec une Table générale des auteurs des 59 volumes des 4 Séries (1836-1894). In-4.. 1 fr. 75 c.

La **5e Série,** commencée en 1895, se publie, chaque année, en 4 fascicules d'une quinzaine de feuilles, paraissant chaque trimestre.

L'abonnement est annuel et part de janvier.

Prix pour un an (4 fascicules) :

Paris.................................... 30 fr.
Départements et Union postale. .... 35 fr.

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, E. PICARD ET J. TANNERY,

avec la collaboration de plusieurs savants.

Le *Bulletin des Sciences mathématiques*, fondé en 1870, a formé par an, jusqu'en 1872, un volume grand in-8 (tomes I, II, III). — A partir de cette époque, jusqu'en décembre 1876, ce Journal s'est composé de 2 volumes par an (1 volume par semestre, avec Tables). Les Tomes I à XI, 1870 à 1876, constituent la **1re Série.**

La **1re Série,** Tomes I à XI, 1870 à 1876, suivie de la Table générale des onze volumes, se vend .... **90** fr.
Chaque année de la Ire Série (1870 à 1876) se vend séparément...... 15 fr.
Table générale des Matières et Noms d'Auteurs contenus dans la Ire Série, grand in-8; 1877.. 1 fr. 50 c.

La **2e Série,** qui a commencé en janvier 1877, continue à paraître par livraisons mensuelles, et comprend, chaque année, deux Parties ayant une pagination spéciale et pouvant être reliées séparément. La Ire PARTIE contient : 1° *Comptes rendus de Livres et Analyses de Mémoires*; 2° *Mélanges scientifiques, Traduction de Mémoires importants et peu répandus, et Réimpression d'Ouvrages rares.* La IIe PARTIE contient : *Revue des Publications académiques et périodiques.*

Les 10 premières années de la IIe Série (1877 à 1886) se vendent.... **120** fr.
Les 10 années suivantes (1887-1896) se vendent ensemble.......... **120** fr.
Chacune des 20 premières années de la IIe Série (1877 à 1896) se vend séparément.. 15 fr.
Chaque année suivante.. 18 fr.

L'abonnement est annuel et part de janvier.

Prix pour un an (12 NUMÉROS) :

Paris.. 18 fr.
Départements et Union postale...................... 20 fr.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Janvier 1904.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

HUMBERT (G.), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. — **Cours d'Analyse** professé à l'École Polytechnique. 2 volumes in-8 (25 × 16), se vendant séparément.

Tome I : *Calcul différentiel. Principes du calcul intégral. Applications géométriques*, avec figures; 1902..... 16 fr.

Tome II : *Complément de la théorie des intégrales définies. Fonctions eulériennes. Fonctions d'une variable imaginaire. Fonctions elliptiques et applications. Équations différentielles.* (*Sous presse.*)

PICARD (**Émile**), Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Paris, et **SIMART** (**Georges**), Capitaine de frégate, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.** 2 volumes grand in-8, se vendant séparément.

Tome I : Volume de VI-246 pages; 1897..... 9 fr.

Tome II : Prix du volume complet pour les souscripteurs ... 14 fr.

(*Deux fascicules de 385 pages ont paru.*)

SERRET (**J.-A.**). — **Traité de Trigonométrie.** 8e édition. In-8 (22,5 × 14), avec figures; 1901..... 4 fr.

34577 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

Digitized by Google

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION.

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME IV.

FÉVRIER 1904.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris,
à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,
ou à M. BOURLET, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,
ou à M. BRICARD, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.
(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Digitized by Google

Rédacteur de service : M. C. Bourlet.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences.

Besançon : M. N.... — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Duport. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. — Montpellier : M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers : M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

FERMAT. — **Œuvres de Fermat**, publiées par les soins de MM. *Paul Tannery* et *Charles Henry*, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique. In-4.

Tome I : *Œuvres mathématiques diverses. — Observations sur Diophante.* Avec 3 planches en héliogravure (Portrait de Fermat, fac-similé du titre de l'édition de 1679, et fac-similé d'une page de son écriture); 1891.......... 22 fr.

Tome II : *Correspondance de Fermat*; 1894.......... 22 fr.

Tome III : *Traduction* par M. Paul Tannery *des écrits latins de Fermat, de l'*Inventum novum *de Jacques de Billy, du* Commercium epistolicum *de Wallis*; 1896.......... 28 fr.

FOURIER. — **Œuvres de Fourier**, publiées par les soins de *Gaston Darboux*, Membre de l'Institut, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique.

Tome I : *Théorie analytique de la chaleur*. In-4, XXVIII-564 pages. 1888.......... 25 fr.

Tome II : *Mémoires divers*. In-4, XVI-636 pages, avec un portrait de Fourier, reproduit par la Photoglyptographie; 1890.......... 25 fr.

GOURSAT (Edouard), Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — **Cours d'Analyse mathématique**. (Cours de la Faculté des Sciences de Paris.) 2 volumes grand in-8, se vendant séparément.

Tome I. *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en séries. Applications géométriques.* Grand in-8 de VI-620 pages, avec 52 figures; 1902.......... 20 fr.

Tome II. *Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments du calcul des variations*; 1904.......... (*Sous presse.*)

Digitized by Google

CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1903.

Résultat.

Après examen des Mémoires parvenus à la Rédaction, le prix a été décerné à M. Georges Lery. Nous publions dans ce numéro le Mémoire de M. Lery.

[N1c, M24k]

SUR LES COMPLEXES EN INVOLUTION ET SUR LA SURFACE DE KUMMER (1);

Par M. Georges LERY.

On considère deux complexes linéaires en involution A *et* B.

1° *Soit* Q *une quadrique dont chaque système de génératrices appartient à l'un de ces complexes. Par les points communs à trois d'entre elles il en passe généralement une simple infinité d'autres : on dira qu'elles forment un* système *de quadriques* Q.

A tout système de quadriques Q *en correspond un autre, tel que toute quadrique de l'un de ces systèmes touche toute quadrique de l'autre.*

2° *L'enveloppe commune des quadriques de ces deux systèmes est une surface de Kummer.*

3° *Toute surface de Kummer est susceptible de cette double génération. Chercher de combien de manières.*

(1) Mémoire ayant obtenu le prix au Concours des *Nouvelles Annales* en 1903.

Digitized by Google

4° *Propriétés corrélatives.*

5° *On considère toutes les surfaces de Kummer,* Σ, *conjuguées aux deux complexes linéaires en involution* A *et* B. *Il n'y en a généralement qu'une qui touche neuf droites de l'un de ces complexes.*

6° *Toutes celles qui touchent huit droites du complexe* A, *par exemple, en touchent généralement une infinité d'autres, formant une surface du huitième ordre.*

7° *Celles qui touchent sept droites du complexe* A *touchent, outre les conjuguées de ces sept droites par rapport à* B, *un huitième couple de droites appartenant à* A *et conjuguées par rapport à* B.

8° *Les droites bitangentes à une surface* Σ *et communes aux complexes* A *et* B *engendrent deux surfaces distinctes du quatrième ordre, circonscrites à* Σ *le long des lignes asymptotiques particulières,* (α) *et* (β), *qui appartiennent respectivement aux complexes* A *et* B.

9° *La courbe* (α), *par exemple, est généralement définie par huit de ses points; mais sept d'entre eux en déterminent neuf autres.*

10° *Il existe une famille de surfaces* Σ *admettant la même ligne asymptotique* (α). *Les quatre complexes linéaires, en involution deux à deux, ainsi qu'avec* A *et* P, *auxquels chacune de ces surfaces est conjuguée, sont fixes.*

11° *Il n'existe qu'une surface de cette famille tangente à une génératrice de* B. *Il en existe trois bitangentes à une droite du complexe* A, *et les trois couples de points de contact forment deux à deux des divisions harmoniques.*

12° *Les génératrices de* A, *qui touchent à la fois deux surfaces de la famille en question, les touchent suivant des lignes asymptotiques.*

Digitized by Google

I.

1. *Complexes en involution.* — Je rappelle d'abord quelques propriétés des complexes linéaires en involution.

Un complexe linéaire B définit une corrélation entre les points et les plans de l'espace; à une droite a correspond sa conjuguée a'; si a appartient à un complexe linéaire A, a' fait partie d'nn complexe A'; lorsque A est en involution avec B, il se confond avec A'.

Une droite a du complexe A, passant par un point m, se trouve dans le plan du complexe relatif à m, plan que je désigne par mA; si elle tourne autour de m, sa conjuguée a' par rapport à B décrira un faisceau projectif autour du pôle m' de mA, dans le plan polaire de m, qui est évidemment m'A.

Les droites qui rencontrent a et a' font partie de B, car, si m est un point de a, le plan mB contient a'.

Soit une quadrique Q dont les deux systèmes de génératrices appartiennent respectivement à A et B. Soit a une droite du premier système; sa conjuguée a' se trouve aussi sur Q, car cette quadrique se transforme en elle-même si l'on fait une corrélation par rapport à B, puisque les génératrices du second système ne sont pas changées.

Toutes les propriétés précédentes restent exactes si l'on fait jouer à A le rôle de B, et réciproquement.

Génération d'une quadrique Q. — Soient a, α deux droites de A, a' la conjuguée de a par rapport à B. Les droites qui coupent a, a' et α engendrent une quadrique Q : 1° elles font partie de B, puisqu'elles rencontrent a et a'; 2° les directrices font partie de A, car

Digitized by Google

si trois droites d'une série réglée (ici a, a' et α) appartiennent à un complexe linéaire A, toutes lui appartiennent.

2. *Le système* (Q). — Je suppose que a et α décrivent respectivement des faisceaux plans projectifs mA et nA; a' décrit aussi un faisceau m'A projectif au premier. A chaque position de a correspond, d'après 2°, une quadrique Q; on a ainsi une famille de quadriques Q à un paramètre.

Ces quadriques passent par huit points fixes; on en a tout de suite quatre : m, n et les deux pôles par rapport à B des plans mA et nA, soient m' et n'; en second lieu les génératrices qui font partie de B et passent en l'un de ces quatre points y décrivent un faisceau plan; leurs conjuguées par rapport à A (qui se trouvent aussi sur les quadriques) décrivent le faisceau plan conjugué; on a ainsi quatre nouveaux points communs aux quadriques Q.

Remarque. — Un système (Q) est défini par trois quadriques Q_1, Q_2, Q_3. Les génératrices du système A de ces quadriques qui passent en deux des huit points communs, m et n, définissent respectivement deux faisceaux plans projectifs, mA et nA, au moyen desquels on peut construire un système (Q) comprenant Q_1, Q_2 et Q_3.

3. *Génératrices des quadriques* Q. — Celles qui appartiennent à A forment une congruence (A) dont je vais chercher l'ordre et la classe.

Les droites de cette congruence issues d'un point p doivent se trouver dans le plan pA et sur le cône lieu des droites passant par p et rencontrant deux droites

Digitized by Google

correspondantes, a et α, des faisceaux plans générateurs. Ce cône est évidemment du second ordre; il y a donc deux droites de la congruence issues de p. On verrait aussi facilement qu'il y en a deux dans un plan. (A) *est donc une congruence* (2, 2). Le raisonnement précédent montre qu'elle appartient au complexe des droites rencontrant deux génératrices correspondantes de deux faisceaux plans homographiques; c'est, on le démontre sans peine, un complexe tétraédral.

La congruence (B) des génératrices du second système possède des propriétés analogues.

A toute droite de (A) correspond une droite du faisceau mA, qui la coupe; donc, une quadrique Q qui la contient. Il y a donc deux quadriques Q qui passent par un point p, ou qui touchent un plan.

4. *Le système* (Q'). — Soit b_0 une droite de (B); elle est sur une quadrique Q_0. Par un point de b_0 passent deux droites de (A) : l'une est la génératrice a_1 de Q_0 qui passe par le point; soit a_2 l'autre; toutes deux rencontrent la conjuguée b'_0 de b_0 par rapport à A. Si le point décrit b_0, la droite a_2 donnera sur b'_0 une division homographique, et par suite décrira une quadrique Q'_0.

Q'_0 est quadritangente à toute quadrique Q; en effet, b_0 rencontre Q en deux points, par chacun desquels passent deux génératrices a_1 et a_2; l'une est sur Q_0, l'autre sur Q, et en même temps sur Q'_0, d'après le mode de génération de celle-ci. Donc Q et Q'_0 ont en commun deux génératrices du premier système, et par suite deux du second; comme ce second système fait partie de B, quelle que soit Q, on voit que toutes les génératrices du second système de Q'_0 appartiennent à B.

Si b_0 décrit Q_0, on obtient une famille à un para-

Digitized by Google

mètre de quadriques Q'. Trois d'entre elles déterminent un système (Q'), dont les génératrices forment deux congruences (A') et (B'). (A') et (A) ont en commun toutes les génératrices de l'un des systèmes des trois quadriques de base; elles sont donc identiques. De même (B) et (B').

Ainsi la congruence (A) a ses droites distribuées de deux façons différentes sur des systèmes de quadriques.

II.

5. *Enveloppe.* — Si les surfaces d'une famille à un paramètre touchent une surface Q', leur enveloppe est circonscrite à Q'. On voit ainsi que les systèmes (Q) et (Q') ont même enveloppe.

Cette enveloppe est le lieu des points par lesquels passent deux quadriques Q confondues. Combien y a-t-il de tels points sur une droite δ? Par un point de δ passent deux quadriques Q, qui coupent δ en deux autres points; on a ainsi sur δ une correspondance (2,2) (involutive), qui possède quatre points doubles. L'enveloppe est une surface Σ du quatrième ordre.

Chacun des points de base du système Q est un point multiple de Σ; en l'un de ces points, m, le cône des tangentes de Σ est l'enveloppe des plans tangents des quadriques Q; or, ces plans, donnant sur mA et mB les droites correspondantes de deux faisceaux projectifs, enveloppent un cône du second ordre.

Le système (Q'), qui a même enveloppe, donne pour Σ huit autres points coniques. *L'enveloppe cherchée, qui est du quatrième ordre et a seize points doubles, est une surface de Kummer.*

C'est la surface focale des congruences (A) *et* (B); en effet, par tout point p de l'enveloppe passent deux

quadriques Q confondues, donc deux droites de (A) confondues : p est sur la surface focale de (A); réciproquement, tout point de cette surface appartient à Σ.

6. *Génération d'une surface de Kummer.* — On sait depuis longtemps qu'étant donnée une surface du quatrième ordre à seize points doubles, on peut séparer ces points de quinze façons différentes, en deux groupes de huit, les points d'un même groupe étant les points de base d'un système de quadriques inscrites à la surface. On a donc quinze couples de systèmes de quadriques ayant même enveloppe; deux quadriques, appartenant respectivement aux deux systèmes d'un couple, sont tangentes; enfin leurs génératrices font partie de deux des six complexes linéaires conjugués à la surface.

Toute surface de Kummer est donc susceptible, de quinze manières, de la génération indiquée.

7. *Faits corrélatifs.* — Si l'on fait une corrélation par rapport au complexe A, les quadriques Q, de même que les quadriques Q′, se transforment chacune en elle-même. Les quadriques Q touchent donc huit plans, qui sont les plans polaires des huit points de base. Leur enveloppe Σ admet chacun d'eux comme plan tangent singulier, la courbe de contact étant une conique, polaire réciproque du cône des tangentes au point singulier correspondant. Σ possède donc seize plans singuliers et est de quatrième classe, puisqu'elle se transforme en elle-même.

Je considère un point p de la surface Σ; par p passent une quadrique Q et une quadrique Q′, sur lesquelles se trouvent les droites a et b, issues de p et appartenant respectivement aux congruences (A) et (B). Dans la corrélation par rapport à A, a se transforme en elle-même,

Digitized by Google

b se change en sa conjuguée b', qui se trouve aussi sur Q et Q', comme nous le savons, fait partie de (B) et est bitangente à la surface focale Σ. Le plan tangent à Σ en p est le plan des deux tangentes a et b; il a pour pôle dans la corrélation le point p' où a est coupée par b'; inversement p a pour plan polaire le plan ab'. Ainsi, un point de Σ et le plan tangent en ce point ont bien pour transformés un autre point et son plan tangent. En prenant les polaires réciproques par rapport à B, a devient a', b et b' sont conservées, p et p' donnent les plans tangents aux points p_1 et p'_1 de rencontre de a' avec b et b'. On reconnaît ainsi l'existence de quadrilatères gauches dont les sommets sont des points de Σ, dont les plans sont tangents en ces sommets, et dont les arêtes sont bitangentes à Σ, les points de contact étant les sommets; il y a ∞^2 tels quadrilatères : chaque point p en détermine un.

III.

8. Pour étudier les questions suivantes, il sera utile de considérer les groupes de trois complexes dont les droites communes sont les génératrices d'un même système d'une quadrique Q ou d'une quadrique Q'. On sait que tout complexe qui contient les génératrices d'un système est en involution avec tout complexe contenant les droites du deuxième système.

Soit un ensemble linéaire et homogène de complexes à n paramètres; les complexes en involution avec ceux-ci forment un ensemble analogue à $6 - n$ paramètres.

Soit $n = 2$; tous les complexes conjugués, à A et B, par exemple, forment un réseau R, dont on peut supposer, sans restreindre la généralité, que les complexes de base R_1, R_2, R_3, R_4 sont deux à deux en involution;

Digitized by Google

A, B et R_i forment alors un groupe de six complexes de Klein.

Soit $n = 3$; à une gerbe de complexes correspond une autre gerbe; elles définissent chacune une série réglée; les droites des deux séries sont les génératrices des deux systèmes d'une quadrique. Ainsi, soient C et C′ deux complexes du réseau R; A, C et C′ ont en commun les génératrices d'un système d'une quadrique dont le second système appartient à B, puisque B est en involution avec A, C et C′.

9. *Représentation des complexes du réseau* R. — Ces complexes dépendent de quatre paramètres homogènes qu'on peut regarder comme les coordonnées tétraédriques d'un plan dans un espace E′.

Une série réglée Q du premier espace E, intersection des complexes A, C et C′, a pour image dans E′ la droite q, intersection des plans représentatifs de C et C′.

Une droite a, du complexe A, peut être considérée comme l'intersection de A avec trois complexes de R; elle a pour image le point commun aux plans représentant les trois complexes. Il faut remarquer que ces trois complexes et A sont transformés respectivement en eux-mêmes dans la corrélation par rapport à B; ils contiennent donc la conjuguée a' de a; a et a' sont leurs deux droites communes.

Deux séries réglées Q et Q′, ayant en commun deux droites a et a' sont représentées par deux rayons q et q' se coupant au point-image de a et a'.

Transformation inverse. — A un plan de E′ correspond dans E un complexe de R, qui, coupé par A, donne une congruence; à une droite q correspond un faisceau de R qui, avec A, définit une série réglée Q; enfin un

Digitized by Google

point est l'image d'une série réglée dont la section par A se compose de deux droites a et a', qui sont bien conjuguées par rapport à B, car les complexes qui les déterminent sont en involution avec B. *A deux droites sécantes* correspondent *deux quadriques ayant deux génératrices communes du système* A, *conjuguées par rapport à* B.

D'après cela, le système (Q) a pour image une série de droites q, rencontrant les images q'_1, q'_2, q'_3 de trois quadriques du système (Q'). Donc, *les q forment un système de génératrices d'une quadrique σ, et les q' le second système.* La quadrique σ est l'image de (A) : à chacun de ses points correspondent deux droites a et a' de cette congruence, bitangentes à Σ.

IV.

10. Neuf droites de A ont pour images neuf points, par lesquels passe en général une seule quadrique σ, image d'une congruence (A), dont j'appelle Σ la surface focale. Σ est bitangente aux neuf droites [et à leurs conjuguées par rapport à B, qui font partie aussi de (A)]. (*Cinquième question.*)

Huit droites de A ont pour images huit points de E', par lesquels passe un faisceau de quadriques σ, ayant en commun une biquadratique gauche. On a alors dans E une famille à un paramètre de surfaces Σ, bitangentes aux droites a dont les images sont les points de la biquadratique.

Ces droites, qui dépendent d'un paramètre, forment une surface réglée dont nous allons chercher l'ordre. Halphen a démontré qu'une surface réglée d'ordre m et un complexe d'ordre n ont en commun mn droites. Or un plan coupe la biquadratique en quatre points, à cha-

Digitized by Google

cun desquels correspondent deux droites; donc le complexe de R qui a pour image ce plan contient huit droites de la surface réglée : comme $m = 1$, $n = 8$. (*Sixième question.*)

Enfin les quadriques σ qui passent par sept points ont un huitième point fixe. Donc, étant données sept droites de A, les surfaces Σ, conjuguées à A et B, qui leur sont bitangentes, touchent aussi deux fois les sept conjuguées de ces droites par rapport à B, et les deux droites d'un huitième couple. (*Septième question.*)

V.

11. Les droites de la congruence (A) qui appartiennent à B forment une surface réglée, dont l'ordre s'obtient en appliquant une formule d'Halphen : un complexe d'ordre m et une congruence d'ordre n, de classe n', ont en commun une surface d'ordre $m(n+n')$; ici $m = 1$, $n = n' = 2$. On peut aussi faire un raisonnement direct : sur chaque quadrique Q, les droites a et a' sont en involution, et cette involution a deux droites doubles; ces droites doubles, confondues avec leurs conjuguées par rapport à B, font partie de B. Ceci posé, une droite b_0 rencontre quatre de ces droites, car par b_0 passent deux quadriques Q_0 et Q'_0, sur chacune desquelles se trouvent deux droites doubles. La surface réglée, coupée par b_0 en quatre points, est du quatrième ordre.

Les droites de (B) qui sont dans A forment aussi une surface réglée d'ordre 4.

En un point p de Σ, le plan tangent est déterminé par les droites a et b, des congruences (A) et (B), qui passent en p. Si a appartient à B, le plan tangent contient deux droites de B : c'est pB. La courbe de contact

Digitized by Google

de la surface réglée formée des droites telles que a a donc pour tangente en p une droite du complexe B; p est un point quelconque de cette courbe. Or, si les tangentes d'une courbe appartiennent à un complexe linéaire, le plan osculateur en tout point est le plan du complexe. Donc en p le plan osculateur est pB, c'est-à-dire le plan tangent de Σ; donc la courbe de contact est une asymptotique de Σ. Je l'appelle (β).

Les droites de (B) qui sont dans A forment une surface réglée [α] circonscrite à Σ le long d'une courbe (α), asymptotique de Σ et dont les tangentes appartiennent à A.

12. La surface réglée [α], du quatrième ordre, a deux droites doubles : les deux directrices de la congruence (A, B); car toute droite de B, qui rencontre l'une, rencontre l'autre et appartient à la congruence; or, par un point de l'une passent deux droites de (B) : elles font partie de A, donc sont sur [α].

La courbe (α) est tracée sur [α]; c'en est une asymptotique, car son plan osculateur, tangent à Σ, est tangent à [α]. Elle est rencontrée en deux points par toute génératrice de [α]; on voit sans peine que ces points sont conjugués harmoniques par rapport au segment déterminé sur la génératrice par les directrices de la congruence (A, B).

Si l'on se donne un point de (α), la droite de [α] issue de ce point est bien déterminée : elle appartient à (A, B); son second point de rencontre avec (α) est défini, d'après la remarque précédente.

13. Nous avons vu qu'une droite a, de A, et sa conjuguée a', par rapport à B, ont pour image un point de E'. Quelle est l'image d'une droite b de B?

Digitized by Google

La droite b et sa conjuguée b' par rapport à A peuvent être considérées comme les directrices d'une congruence, intersection de A et d'un certain complexe C du réseau R; car il suffit que C appartienne à la fois au réseau R, et au faisceau défini par A et le complexe spécial dont b est l'axe. Le second complexe spécial du faisceau (A, C) est b'. Inversement, A et un complexe C de R déterminent une congruence dont les deux directrices appartiennent à B, qui est en involution avec A et C, et sont conjuguées par rapport à A, car une corrélation par rapport à A change la congruence en elle-même. D'après cela, b et b' correspondent à un plan de l'espace E', le plan qui est l'image de C.

Deux droites de E', q et q', qui se rencontrent, représentent une quadrique Q et une quadrique Q'; leur point commun est l'image des génératrices a et a' communes aux deux quadriques; leur plan correspond aux génératrices b et b' suivant lesquelles se coupent encore Q et Q'.

14. Si b coïncide avec sa conjuguée b', c'est-à-dire si b appartient à A, le plan correspondant satisfait à une condition, donc touche une surface ω; on peut mener à ω deux plans tangents par toute droite q, car il y a deux droites $b \equiv b'$ sur la série réglée Q. Donc ω *est une quadrique*. Comme les deux directrices de la congruence (A, C) sont confondues et que C est en involution avec A, C doit être un complexe spécial; la réciproque est vraie; donc ω *est l'enveloppe des plans-images des complexes de* R *spéciaux*.

Dans E', entre un plan c, qui représente un complexe C de R, et le point γ, image de la gerbe de R en involution avec C, il y a évidemment une corrélation. Pour que C soit spécial, il faut et il suffit qu'il appar-

Digitized by Google

tienne à la gerbe avec laquelle il est en involution. Alors c doit contenir γ; la quadrique de base de la corrélation est donc l'enveloppe des plans c représentant les complexes spéciaux de R : c'est ω. Par suite, un plan et son pôle par rapport à ω sont les images d'un complexe de R, et de la gerbe des complexes de R en involution avec lui.

15. Ceci posé, la surface $[\alpha]$, lieu de droites $b \equiv b'$, qui sont bitangentes à Σ, est représentée dans E' par une suite de plans, tangents à ω et à l'image σ de Σ : ce sont les plans de la développable (ω, σ).

Donner huit points de (α), c'est, comme on l'a vu, donner huit droites de $[\alpha]$, ou huit plans de la développable (ω, σ); celle-ci est déterminée, par suite la surface $[\alpha]$.

Quant à la courbe (α), c'est sur $[\alpha]$ le lieu des points pour lesquels le plan tangent est le plan du complexe A. Elle est bien déterminée, et l'on voit que huit points la définissent.

Donner sept points de (α), c'est donner sept génératrices b de $[\alpha]$, et sept plans tangents de la développable (ω, σ); celle-ci a un huitième plan bien déterminé.

Les surfaces $[\alpha]$ qui contiennent sept droites b en contiennent donc une huitième.

Il y a plus : je dis que la *surface* $[\alpha]$ *est définie par les sept points donnés et est unique*. Cela tient à ce que l'on connaît en ces points les plans tangents, qui sont les plans du complexe A. Une surface du quatrième ordre à deux droites doubles est déterminée, si ces deux droites sont connues, par huit points, ou par sept points et une tangente en l'un d'eux, ou enfin par quatre points et, en chacun d'eux, une tangente différente de

Digitized by Google

la génératrice. En outre, nous savons que, si la surface $[\alpha]$ est définie, la courbe (α) l'est. Donc :

La courbe (α) *est déterminée en général par quatre de ses points.*

VI.

16. Il existe un faisceau tangentiel de quadriques σ inscrites à une même développable (ω, σ_0). Il y a donc une famille de surfaces Σ ayant la même ligne asymptotique (α), et conjuguées aux complexes A et B. Elles ont même surface $[\alpha]$, à laquelle elles sont circonscrites le long de (α).

Les faces du tétraèdre conjugué commun aux quadriques σ représentent quatre complexes du réseau R : C, C$'$, C$''$ et C$'''$, qui sont en involution avec A et B.

Ils sont en involution deux à deux, car le plan-image de C$'$, par exemple, contient le pôle par rapport à ω, du plan-image de C; donc C$'$ est en involution avec C (n° 14).

Chacune des surfaces Σ est conjuguée par rapport à l'un quelconque d'entre eux, soit C, c'est-à-dire se transforme en elle-même dans la corrélation que définit C. Nous allons le vérifier en cherchant quelle est la transformation de l'espace E$'$ qui correspond à cette corrélation effectuée dans E; cette transformation faisant correspondre à tout point d'une quadrique σ du faisceau un autre point de σ, la corrélation par rapport à C transformera toute bitangente a de Σ en une autre bitangente.

17. J'appelle $\mathcal{C}$ la corrélation par rapport à C, et $\mathcal{C}'$ la transformation correspondante dans E$'$. $\mathcal{C}$ transforme involutivement une droite de A en droite de A, et une

Digitized by Google

série réglée définie par A et deux complexes de R en une série analogue; si la droite ou la série réglée appartient à C, elle est conservée. Enfin tout complexe de R est changé en lui-même.

Par suite $\mathcal{C}'$ transforme involutivement un point en point, une droite en droite : c'est une homographie; le plan-image de C est un plan double, dont chaque point est son propre correspondant, le pôle de ce plan par rapport à ω est un point double. On a donc affaire à une homologie dont les éléments singuliers sont le plan-image de C et son pôle par rapport à ω, le rapport d'homologie étant -1, puisqu'elle est involutive.

Cette homologie $\mathcal{C}'$ transforme σ en elle-même, car son point double est pôle de son plan double par rapport à σ. Donc la corrélation $\mathcal{C}$ change Σ en elle-même.

Par conséquent les surfaces Σ de la famille sont conjuguées par rapport aux quatre complexes fixes C, C′, C″ et C‴.

VII.

18. Il y a une quadrique σ du faisceau tangente à un plan (qui ne touche pas ω); il existe donc une surface Σ de la famille bitangente à une génératrice de B (qui n'appartient pas à A).

Il y a trois quadriques σ passant par un point; donc trois surfaces Σ sont bitangentes à une génératrice a de A. Les plans tangents des trois quadriques σ_1, σ_2, σ_3, en leur point commun, forment, comme l'on sait, un trièdre conjugué par rapport à toutes les quadriques du faisceau, en particulier par rapport à ω. Le plan tangent à σ_1 est l'image de deux bitangentes b_1, b'_1 à Σ_1, qui coupent a aux deux points de contact de celle-ci; de même, le plan tangent à σ_2 représente deux droites b_2,

Digitized by Google

b'_2 qui rencontrent a en ses deux points de contact avec Σ_2. Les deux plans tangents étant conjugués par rapport à ω, les complexes correspondants sont en involution; on en déduit que les deux couples b_1, b'_1, et b_2, b'_2 font partie d'une même série réglée et sont conjugués harmoniques. Les points de contact de a avec Σ_1 et Σ_2 forment donc deux couples harmoniques.

19. Soit une droite l, du complexe A, *simplement* tangente à Σ en un point m; par m passe une *bitangente* qui appartient à A; le plan tangent, déterminé par ces deux droites, est le plan du complexe A. Donc m est un point de (α), et la droite l est tangente en m à toutes les surfaces Σ de la famille. Les droites l sont toutes les droites de A qui rencontrent (α).

20. *Remarques*. — I. Si une droite a de A tourne autour d'un point p, sa conjuguée a' par rapport à B tourne autour d'un point p'; les deux faisceaux plans ainsi définis constituent une quadrique sur laquelle les deux droites appartenant à B sont confondues en une seule : pp'. Dans E', le rayon qui représente cette quadrique est tangent à ω, car ses points de rencontre avec ω sont confondus.

La réciproque est vraie.

Une quadrique σ a quatre génératrices de chaque système tangentes à ω; par suite, dans le système (Q) qui définit une surface Σ, il y a quatre quadriques décomposées en couples de plans : elles fournissent huit plans et huit points singuliers : de même (Q') donne les autres éléments singuliers. Comme chaque quadrique Q est quadritangente à toute Q', on déduit facilement de ces remarques les relations des points et plans singuliers.

Digitized by Google

II. On peut se demander quelle est l'image, dans E', de la seconde ligne asymptotique (β), ou plutôt de la surface réglée [β] circonscrite à Σ le long de (β). C'est la biquadratique gauche commune à ω et σ.

III. ω est l'image d'une surface de Kummer particulière : tous ses points et ses plans tangents sont singuliers. Ses bitangentes sont les droites de la congruence (A, B).

Notes. — I. Je me suis servi, dans ce qui précède, de propriétés des complexes en involution. Je vais indiquer pour ces propriétés une méthode de démonstration très simple; elle repose sur la notation de Grassmann.

Étant donné un certain nombre de segments $c_i c'_i$, les segments mn, tels que la somme algébrique des volumes des tétraèdres $mnc_ic'_i$ soit nulle, sont situés sur les droites d'un complexe C. On pose

$$C = \Sigma c_i c'_i,$$

et l'équation du complexe est

$$mnC = 0.$$

Tout complexe linéaire, on le démontre facilement, a une équation analogue. Le point m étant choisi, n se trouve dans le plan nC, qui est le plan du complexe en m.

Pour deux complexes A et B en involution, la somme des tétraèdres obtenus en développant le produit

$$\Sigma a_i a'_i . \Sigma b_i b'_i$$

comme s'il était algébrique est nulle; on écrit

$$AB = 0.$$

Digitized by Google

Avec cette notation on étudie facilement les complexes en involution.

II. La correspondance entre l'espace E et l'espace F′ s'introduit naturellement si l'on cherche une solution analytique de la question.

Je conserve la notation de Grassmann, qui condense beaucoup l'écriture.

Trois complexes A, C, C′ définissent un système de génératrices d'une quadrique, dont l'équation s'obtient en écrivant que la droite de la congruence (C, C′), issue d'un point m, fait partie de A ; cette droite est l'intersection des plans des deux complexes mC et mC′ et se représente par $m\text{C} . m\text{C}'$.

La condition cherchée est

$$(1) \qquad m\text{C}.m\text{C}'.\text{A} = 0.$$

C'est, sous forme symbolique, l'équation qu'on aurait en coordonnées cartésiennes ou tétraédrales, si l'on effectuait les opérations indiquées : chercher l'intersection des plans des complexes C et C′, relatifs au point m ; exprimer qu'elle appartient à A.

Pour que la quadrique considérée soit une quadrique Q, il faut que C et C′ appartiennent au réseau R :

$$\text{C} = \alpha_1 \text{R}_1 + \alpha_2 \text{R}_2 + \alpha_3 \text{R}_3 + \alpha_4 \text{R}_4,$$
$$\text{C}' = \alpha'_1 \text{R}_1 + \ldots.$$

L'équation (1), développée, devient

$$\text{Q} \equiv \Sigma(\alpha_i \alpha'_k - \alpha_k \alpha'_i)\, m\text{R}_i . m\text{R}_k . \text{A} = 0.$$

Les coefficients des six quantités

$$m\text{R}_i . m\text{R}_k . \text{A} \qquad (i \neq k)$$

satisfont à la relation

$$(\alpha_i\alpha'_k - \alpha_k\alpha'_i)(\alpha_l\alpha'_m - \alpha_m\alpha'_l) + \ldots = 0;$$

on peut les considérer comme coordonnées de Plucker d'une droite q.

Ceci posé, pour que Q appartienne à une gerbe définie par trois quadriques, dont les équations sont

$$Q_1 = 0, \qquad Q_2 = 0, \qquad Q_3 = 0,$$

il faut que l'on ait

$$(2) \qquad Q = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3,$$

ce qui entraîne

$$q = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3.$$

Les λ ne peuvent être quelconques, puisque le complexe $\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3$ est spécial; ils sont liés par

$$(\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3)(\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3) = 0$$

ou

$$(3) \qquad \Sigma q_2 q_3 . \lambda_2 \lambda_3 = 0.$$

Le système Q est donc défini par l'équation

$$\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 = 0,$$

les paramètres étant liés par la condition (2).

Nous voyons ainsi que le système Q est un faisceau à un paramètre, qui entre au second degré dans l'équation; d'autre part, la représentation des quadriques du système par les droites q d'une série réglée :

$$q = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3$$

se présente naturellement.

Digitized by Google

[2bα]

REMARQUE SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE D'UNE BRANCHE DE FONCTION IMPLICITE;

PAR M. E. GOURSAT.

Toute équation $F(x, y) = 0$, dont le premier membre est une fonction holomorphe de deux variables x et y dans le voisinage d'un système de valeurs x_0, y_0, pour lequel on a $F(x_0, y_0) = 0$, la dérivée $\frac{\partial F}{\partial y}$ n'étant pas nulle pour $x = x_0$, $y = y_0$, définit une fonction analytique $y(x)$ se réduisant à y_0 pour $x = x_0$, et holomorphe dans le domaine de ce point. On peut obtenir les coefficients du développement de cette branche de fonction

$$y = y_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

en remplaçant y par ce développement dans $F(x, y)$, et en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de $x - x_0$. Les calculs effectués par cette méthode deviennent très rapidement compliqués, dès qu'on veut calculer plus de trois ou quatre coefficients. Si l'on veut calculer un plus grand nombre de coefficients, il peut y avoir intérêt à se servir d'une remarque bien simple, que je n'ai trouvée dans aucun Ouvrage classique. Elle consiste en ceci : *Si l'on connaît les n premiers termes de la série cherchée, on peut, par une simple division de polynomes, calculer les coefficients des $(n + 1)$ termes suivants.*

1. Considérons l'équation

$$(1) \qquad y = \varphi_0(x) + y\,\varphi_1(x) + y^2\,\varphi_2(x) + \ldots + y^n\,\varphi_n(x),$$

Digitized by Google

où $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont des fonctions holomorphes de x dans le domaine de l'origine, les deux premières $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$ étant nulles pour $x = 0$.

Cette équation admet, comme l'on sait, une racine et une seule qui tend vers zéro avec x, et cette racine est une fonction holomorphe $F(x)$ dans le domaine de l'origine. Pour obtenir les coefficients du développement de $F(x)$ en série entière, on peut, par exemple, procéder comme il suit.

Supposons les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ développées en séries entières; les deux premières séries commencent par des termes du premier degré au moins. Pour prendre le cas général, supposons que le premier terme de $\varphi_0(x)$ soit de degré p, $a_p x^p$; *le premier terme de la série cherchée est précisément* $a_p x^p$. En effet, si l'on écrit l'équation (1) sous la forme

$$y - y\,\varphi_1(x) - y^2\,\varphi_2(x) - \ldots - y^n\,\varphi_n(x) = \varphi_0(x),$$

on voit que le terme du plus bas degré dans y ne se réduit avec aucun autre dans le premier membre de cette relation : il est donc identique au premier terme de $\varphi_0(x)$, c'est-à-dire à $a_p x^p$. Pour avoir le terme suivant du développement cherché, on pose $y = a_p x^p + z$, ce qui conduit pour déterminer z à une équation de même forme que l'équation (1)

$$(2) \qquad z = \psi_0(x) + z\,\psi_1(x) + z^2\,\psi_2(x) + \ldots + z^n\,\psi_n(x),$$

où l'on a

$$\psi_0(x) = \varphi_0(x) - a_p x^p + \varphi_1(x) a_p x^p + \varphi_2(x) a_p^2 x^{2p} + \ldots + \varphi_n(x) a_p^n x^{np},$$

$$\psi_1(x) = \varphi_1(x) + 2 a_p x^p\,\varphi_2(x) + \ldots + n a_p^{n-1} x^{(n-1)p}\,\varphi_n(x);$$

$\varphi_1(x)$ étant divisible par x, il en est de même

Digitized by Google

de $\psi_1(x)$, et le développement de $\psi_0(x)$ commence par un terme de degré $p+1$ au moins. Le premier terme de $\psi_0(x)$ donnera de même le second terme de $F(x)$ et, en continuant de la sorte, on pourra calculer autant de termes qu'on le voudra de la série cherchée.

En opérant de la sorte, il semble que le calcul de chaque terme nouveau exige une nouvelle transformation. Nous allons montrer que, *si l'on a $p > 1$, on peut, par une simple division de polynomes, calculer les p premiers termes du développement de la racine de l'équation* (1) *qui est nulle pour $x = 0$.*

Nous pouvons, en effet, écrire l'équation (1)

$$(3)\qquad y = \frac{\varphi_0(x)}{1-\varphi_1(x)} + y^2\frac{\varphi_2(x)}{1-\varphi_1(x)} + \ldots + y^n\frac{\varphi_n(x)}{1-\varphi_1(x)};$$

$\varphi_1(x)$ étant nul pour $x = 0$, les fonctions

$$\frac{\varphi_0}{1-\varphi_1},\qquad \frac{\varphi_2}{1-\varphi_2},\qquad \ldots,\qquad \frac{\varphi_n}{1-\varphi_1}$$

sont également des fonctions holomorphes dans le domaine de l'origine. Désignons-les pour abréger par π_0, π_2, ..., π_n, et écrivons l'équation (3)

$$(3)'\qquad y = \pi_0(x) + y^2\pi_2(x) + \ldots + y^n\pi_n(x).$$

Le développement de $\pi_0(x)$ commence par le terme $a_p x^p$; imaginons que l'on ait calculé les termes suivants jusqu'au terme de degré $2p-1$,

$$\pi_0(x) = a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \ldots + a_{2p-1}x^{2p-1} + \ldots,$$

les termes non écrits étant divisibles par x^{2p}. Il suffit évidemment de prendre dans $\varphi_0(x)$ et dans

$$1-\varphi_1(x)$$

les termes de degré inférieur à $2p$, et de diviser l'un par

Digitized by Google

l'autre les deux polynomes ainsi obtenus, en ordonnant le quotient par rapport aux puissances croissantes de x, jusqu'à ce qu'on obtienne un reste de degré supérieur à $2p - 1$.

Cela posé, je dis que les p premiers termes du développement de la racine cherchée y sont précisément

$$a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \ldots + a_{2p-1} x^{2p-1} = \mathrm{P}(x).$$

Si nous faisons, en effet, la transformation

$$y = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \ldots + a_{2p-1} x^{2p-1} + z = \mathrm{P}(x) + z,$$

dans l'équation $(3)'$ elle prend la forme

$$(4) \qquad z = \zeta_0(x) + z\,\zeta_1(x) + \ldots + z^n\,\zeta_n(x),$$

où $\zeta_0(x)$ est égal à

$$\pi_0(x) - \mathrm{P}(x) + \pi_2(x)\,\mathrm{P}^2(x) + \ldots + \pi_n(x)\,\mathrm{P}_n^2(x).$$

Le premier terme de $\zeta_0(x)$ est au moins de degré $2p$, de sorte que le développement de z commencera par un terme de degré $2p$ au moins, ce qui démontre la proposition énoncée.

Il est maintenant aisé de voir comment cette remarque s'applique au calcul du développement de la racine

$$y = \mathrm{F}(x)$$

de l'équation (1) qui est nulle pour $x = 0$. Plaçons-nous dans le cas le plus défavorable, celui où $\varphi_0(x)$ commence par un terme du premier degré $a_1 x$; en posant

$$y = a_1 x + y_1,$$

on est conduit à une équation de même forme

$$(5) \quad y_1 = \varphi_{01}(x) + y_1\,\varphi_{11}(x) + y_1^2\,\varphi_{21}(x) + \ldots + y_1^n\,\varphi_{n1}(x),$$

Digitized by Google

$\varphi_{01}(x)$ commençant par un terme du second degré au moins. Soient

$$b_2 x^2 + b_3 x^3$$

les deux premiers termes du quotient de $\varphi_{01}(x)$ par $1 - \varphi_{11}(x)$; ce sont aussi les deux premiers termes du développement de y_1. En posant

$$y_1 = b_2 x^2 + b_3 x^3 + y_2,$$

on sera conduit à une équation de même forme

$$(6) \quad y_2 = \varphi_{02}(x) + y_2 \varphi_{12}(x) + y_2^2 \varphi_{22}(x) + \ldots + y_2^n \varphi_{n2}(x),$$

$\varphi_{02}(x)$ commençant par un terme du quatrième degré au moins. Une nouvelle division donnera les quatre premiers termes du développement de y_2, et ainsi de suite.

On voit qu'à chaque opération on peut doubler le nombre des coefficients déjà obtenus.

Je n'insisterai pas sur les diverses simplifications qui peuvent se présenter, et qui permettent parfois d'obtenir un plus grand nombre de termes que le nombre que l'on pouvait prévoir *a priori;* c'est ce qui aura lieu, par exemple, si le développement de la racine cherchée présente des lacunes. Remarquons aussi que, lorsqu'on a fixé à l'avance le nombre de termes que l'on veut obtenir, on n'a besoin que de calculer quelques-uns des coefficients des fonctions $\varphi_{ih}(x)$. Par exemple, si l'on veut s'arrêter après la seconde transformation, il suffira de calculer dans $\varphi_{02}(x)$ et $\varphi_{12}(x)$ les termes de degré inférieur à 8; il sera inutile de calculer aucun des coefficients de $\varphi_{22}(x)$, $\varphi_{32}(x)$, ... Enfin, la méthode reste évidemment la même, si, au lieu d'avoir dans le second membre de l'équation (1) un polynome de degré n en y, on avait une série entière en x et y, convergente pour

Digitized by Google

les valeurs de x et de y ne dépassant pas certaines limites [1].

Exemple. — Soit l'équation

$$y = x + xy^3;$$

le premier terme du développement est x. Posons

$$y = x + y_1;$$

l'équation en y_1 est

$$y_1 = x^4 + 3x^3y_1 + 3x^2y_1^2 + xy_1^3.$$

Nous pouvons obtenir ici les premiers termes de y_1 jusqu'au terme en x^7 en divisant x^4 par $1 - 3x^3$, ce qui donne pour ces premiers termes $x^4 + 3x^7$.

Posons encore

$$y_1 = x^4 + 3x^7 + y_2 = x^4(1 + 3x^3) + y_2;$$

l'équation en y_2 est, en n'écrivant que les deux premiers

---

(1) La remarque qui sert de point de départ peut aisément être généralisée. Si le premier terme de $\pi_0(x)$ est de degré p, on démontre de la même façon que le développement de la racine de l'équation (3), qui est nulle pour $x = 0$, coïncide, jusqu'au terme de degré $3p - 1$ inclusivement, avec le développement de la fonction

$$\pi_0(x) + \pi_2(x)[\pi_0(x)]^2,$$

jusqu'au terme de degré $4p - 1$ inclusivement avec le développement de la fonction

$$\pi_0 + \pi_2\pi_0^2 + (2\pi_2^2 + \pi_3)\pi_0^3,$$

et ainsi de suite.

D'une façon générale, le développement cherché est identique, jusqu'au terme de degré $mp - 1$ inclusivement, avec le développement de la racine de l'équation auxiliaire

$$Y = \varphi_0(x) + Y\varphi_1(x) + Y^2\varphi_2(x) + \ldots + Y^{m-1}\varphi_{m-1}(x),$$

qui est nulle pour $x = 0$.


Digitized by Google

termes du second membre,

$$y_2 = 9x^{10} + 3x^{10}(1+3x^3)^2 + x^{12}(1+3x^3)^3$$
$$+ y_2[3x^3 + 6x^6(1+3x^3) + 3x^9(1+3x^3)^2]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

une nouvelle division donnera les termes suivants jusqu'au terme en x^{19}.

2. On peut faire des remarques analogues pour les développements des intégrales d'une équation différentielle du premier ordre. Considérons l'équation

$$y' = F(x, y),$$

où le second membre est une fonction holomorphe des deux variables x et y, dans le domaine du point

$$x = y = 0.$$

On peut l'écrire, en ordonnant le second membre par rapport aux puissances croissantes de y,

$$(7)\quad y' = \varphi_0(x) + y\varphi_1(x) + y^2\varphi_2(x) + \ldots + y^n\varphi_n(x) + \ldots,$$

$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ étant des fonctions holomorphes dans le domaine du point $x = 0$.

Proposons-nous de calculer les premiers coefficients du développement de l'intégrale qui est nulle pour $x = 0$. Si le premier terme de $\varphi_0(x)$ est $b_p x^p$, on voit aisément que le premier terme de l'intégrale est $\frac{b_p + 1}{p+1} x^{p+1}$. Cela étant, prenons dans $\varphi_0(x)$ les termes de degré inférieur à $2p+2$

$$b_p x^p + \ldots + b_{2p+1} x^{2p+1},$$

et dans $\varphi_1(x)$ les termes de degré inférieur à $p+1$,

$$c_0 + c_1 x + \ldots + c_p x^p,$$

Digitized by Google

et soit Y l'intégrale de l'équation auxiliaire

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} Y' = b_p x^p + b_{p+1} x^{p+1} + \ldots + b_{2p+1} x^{2p+1} \\ + Y(a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p), \end{aligned} \right.$$

qui est nulle pour $x = 0$. En posant $y = Y + z$ dans l'équation (7), elle se change en une équation de même forme

$$(9) \qquad z' = \psi_0(x) + \psi_1(x) z + \ldots + \psi_n(x) z^n + \ldots,$$

où le terme indépendant de z dans le second membre a pour expression

$$\psi_0(x) = \varphi_0(x) - Y' + Y\varphi_1(x) + Y^2 \varphi_2(x) + \ldots.$$

Or, $\varphi_0(x) - Y' + Y\varphi_1(x)$ peut s'écrire, en tenant compte de la relation (8),

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) - (b_p x^p + b_{p+1} x^{p+1} + \ldots + b_{2p+1} x^{2p+1}) \\ + Y[\varphi_1(x) - a_0 - a_1 x + \ldots + a_p x^p], \end{aligned}$$

et, comme le premier terme de Y est de degré $p + 1$, le premier terme de $\psi_0(x)$ sera de degré $2p + 2$. Il s'ensuit que le développement de z commencera par un terme de degré $2p + 3$, ou que le développement de y coïncidera avec celui de Y jusqu'au terme du degré $2p + 2$ inclusivement.

Il suffira donc de calculer le développement de Y jusqu'à ce terme.

On pourrait déduire de cette remarque des conséquences analogues à celles qui ont été développées plus haut pour les fonctions implicites.

Digitized by Google

CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES EN 1903 (MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES);

Solution par M. Maurice FRÉCHET.

On donne deux droites fixes D *et* D′ *non situées dans un même plan, un point fixe* A *sur* D *et un point fixe* A′ *sur* D′. *Soient* (S) *une sphère dont le centre est situé sur* D *et qui passe par* A, (S′) *une sphère dont le centre est situé sur* D′ *et qui passe par* A′.

1° *Montrer qu'il existe deux sphères* (S) *tangentes à une sphère* (S′) *supposée donnée.*

2° *Trouver les lieux géométriques des points de contact des sphères* (S) *et* (S′), *lorsqu'elles varient, tout en restant tangentes.*

3° *Soit* M *le point de contact d'une sphère* (S) *avec une sphère* (S′). *Sur la ligne des centres de ces deux sphères on porte, à partir du point* M, *une longueur constante* MM′ = *a*. *Trouver le lieu du point* M′ *lorsque les deux sphères varient.*

4° *Sur les droites* D *et* D′ *on porte, à partir de* A *et* A′, *respectivement, deux longueurs égales* AP *et* A′P′. *Trouver le lieu du centre de la sphère* Σ *tangente à* D *en* P *et à* D′ *en* P′, *lorsque* P *et* P′ *décrivent respectivement* D *et* D′.

I. Soient ω et ω' les centres respectifs des sphères S et S′. Nous allons d'abord chercher le centre radical commun aux deux faisceaux de sphères S et S′. Il se trouve nécessairement à l'intersection de leurs plans

Digitized by Google

radicaux, c'est-à-dire sur la droite δ intersection des plans perpendiculaires, l'un à D en A et l'autre à D' en A'. Les points E de δ ont tous la même puissance $\overline{EA}^2$ par rapport aux sphères S et la même puissance $\overline{EA'}^2$ par rapport aux sphères S'. Par conséquent, *le point* O de δ, qui est équidistant des points A et A', *a même puissance par rapport aux sphères* S *et* S'.

Ce point est unique et bien déterminé. En effet, c'est l'intersection de la droite δ avec le plan P perpendiculaire à AA' en son milieu. Or, δ est parallèle à la perpendiculaire commune à D et D'. Par conséquent, δ ne peut être ni parallèle à P, ni dans le plan P, sans quoi δ serait perpendiculaire aux trois droites AA', D, D' et celles-ci se coupant en A et A' seraient dans un même plan. Or, on suppose que D et D' ne sont pas dans un même plan. Il résulte de ce fait que si M est le point de contact de deux sphères S et S' tangentes, leur plan tangent commun passe en O et l'on a

$$OA = OA' = OM.$$

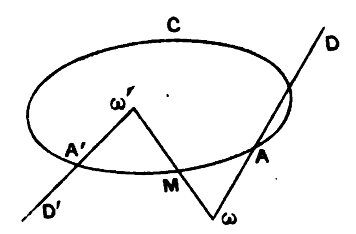
Donc, *si* S *et* S' *sont tangentes, la droite* $\omega\omega'$ *est tangente en* M *à une sphère* U *de centre fixe* O, *tangente à* D *en* A *et à* D' *en* A'.

II. On en déduit immédiatement le lieu du point M lorsque les sphères S et S' varient tout en restant en contact. Ce lieu est d'abord situé sur la sphère U. C'est le lieu du point de contact M d'une tangente à U, $\omega\omega'$, qui rencontre deux tangentes fixes de U : D et D'.

Ce lieu est formé de deux cercles passant en A et A'. En effet, soit C le cercle de la sphère U déterminé par les points A, A', M. Les tangentes ωM, ωA à U sont égales; de même $\omega'M = \omega'A'$. Par conséquent, le

Digitized by Google

cercle C, qui passe par les deux extrémités A'M du triangle *isoscèle* ω'A'M, fait un angle égal avec les deux côtés égaux ω'A', ω'M. Il en résulte que D et D' font respectivement avec le cercle C deux angles égaux à l'angle que fait ωω' avec C. Par conséquent, *le cercle* C *est un cercle de la sphère* U *passant par* A *et* A' *et faisant avec* D *et* D' *deux angles égaux*. Il n'y a que deux cercles qui satisfassent à ces conditions. En effet, le plan du cercle C fera manifestement des angles égaux avec D, ωω' et D'. Or, on voit facilement qu'il ne peut en être ainsi que s'il est parallèle à l'une des deux



bissectrices Δ_1, Δ_2 de l'angle formé par deux droites concourantes parallèles à D et D'.

Donc, le cercle C est dans un plan fixe passant par AA' et parallèle à Δ_1 ou Δ_2.

En résumé, le lieu du point M est formé de deux cercles C, C_1 de la sphère U. Il résulte aussi de ce qui précède que les droites ωω', qui s'appuient par exemple sur C, font un angle constant avec le cercle C et avec son plan. On obtiendra toutes ces droites en faisant tourner l'une d'entre elles autour de l'axe L du cercle C. De même pour celles qui sont relatives au cercle C_1 d'axe L_1.

Enfin, nous devons observer que les sphères S, S' restent tangentes de la même façon (S et S' extérieures l'une à l'autre ou S intérieure à S' ou S' intérieure à S)

Digitized by Google

lorsque M décrit l'un des arcs AA' de l'un des cercles C et C_1. Car, dans ce mouvement, les points ω, ω', M, restant distincts, gardent la même disposition relative.

III. Si l'on se donne une sphère S', il y a deux sphères S qui lui sont tangentes et l'on obtiendra les points de contact et les centres correspondants en menant du point ω' les deux tangentes à U qui rencontrent D. Ces tangentes existent toujours, car ω' est toujours extérieur à U (étant sur D), et elles sont distinctes lorsque ω' est distinct de A'. Enfin, si ω' reste sur la même demi-droite $A'D'$ portée par D' et terminée en A', les points M correspondants restent sur les mêmes arcs AA' de C et de C_1.

Donc, les sphères S et S' restent tangentes de la même façon.

IV. Soit M' sur $\omega\omega'$ tel que $MM' = a$. Lorsque M reste sur le cercle C on obtient toutes les positions de $\omega\omega'$ par une rotation autour de l'axe L de C. Donc, le lieu de M' est un cercle ayant même axe que C. Comme il y a deux positions de M' sur $\omega\omega'$ et deux cercles C, C_1, le lieu de M' se composera de quatre cercles s'appuyant sur D et D' qui ont deux à deux même axe que C ou C_1.

On peut remarquer que les sphères de centres ω, ω', qui passent en M', sont tangentes en ce point et passent par deux points fixes B, B' sur D, D' tels que

$$BA = a, \qquad B'A' = a'.$$

Donc d'après II, si Γ est un des quatre cercles, lieux de M', il coupe D et D' en des points tels que B, B' à des distances égales à a de A et de A' respectivement.

Digitized by Google

De plus, Γ est sur une sphère V tangente à D en B et à D′ en B′.

V. Soient P et P′ sur D et D′ tels que

$$PA = P'A'.$$

En prenant $a = PA$, il résulte de IV que la sphère Σ tangente à D en P et à D′ en P′ contient un cercle Γ ayant même axe L que C par exemple. Donc le centre σ de Σ est sur la droite fixe L. Comme il y a plusieurs dispositions relatives des points P et P′, nous voyons que le lieu du centre σ est formé de deux axes L et L_1 des cercles C et C_1. D'ailleurs, on peut observer que ces axes sont concourants puisqu'ils sont dans le plan perpendiculaire au milieu de la corde AA′ commune aux deux cercles C et C_1.

Remarques :

1° On aurait pu utiliser l'inversion dans la solution de ce problème. Par exemple, pour les deux premières questions, en plaçant le centre d'inversion en A.

2° On a pu observer que les droites ωω′ relatives à un cercle C engendrent un hyperboloïde de révolution d'axe L qui passe par C, D et D′ et qui est circonscrit à la sphère U. Cet hyperboloïde contient aussi deux des cercles lieux de M′. Il est circonscrit aux sphères Σ qui correspondent à l'axe L.

Il y a de même un hyperboloïde de révolution relatif au cercle C_1. Mais nous avons écarté l'emploi de ces hyperboloïdes pour notre solution élémentaire.

Digitized by Google

BIBLIOGRAPHIE.

Notions de Mathématiques; par M. *J. Tannery*. — Notions historiques; par M. *P. Tannery*. — 1 vol. (x-352 pages). Paris, Delagrave; 1903.

On sait bien à l'avance, si M. Jules Tannery publie un livre de Mathématiques, soit qu'il traite de théories élevées de l'Analyse, ou qu'il développe un programme de l'enseignement dans les lycées, on sait bien que son livre sera écrit avec toute la science qui y est nécessaire, et aussi avec cette hauteur de vues et cette belle franchise qui inspirent, à tous ceux qui le connaissent, une profonde estime et la plus vive sympathie.

Il y avait ici des difficultés particulières : les notions nouvelles introduites dans le programme de la classe de Philosophie n'étaient enseignées jusque-là qu'à des élèves déjà exercés au calcul et aux raisonnements géométriques. Pour les expliquer à des élèves moins habitués aux études mathématiques, il ne suffisait évidemment pas de reproduire, avec plus de détails, les exposés qui se donnent dans les classes de Mathématiques spéciales.

Le programme indiquait déjà d'éviter les théories trop abstraites et de faire ressortir les idées générales sur des exemples particuliers. Il fallait aussi chercher des raisons plus intuitives, des associations d'idées plus familières, sans descendre, bien entendu, jusqu'aux procédés des préparations trop habiles, mais avec un souci constant d'affermir, en de jeunes esprits, la rectitude du jugement, d'y affiner ce sens de la rigueur qui doit percevoir, de façons différentes, les raisons probables et les démonstrations définitives. Enfin, on devait se préoccuper des acquisitions nécessaires aux étudiants qui suivent les cours des sciences physiques, chimiques et naturelles.

On verra de quelle façon magistrale M. Tannery a résolu ces questions, dont quelques-unes sont délicates et difficiles. Son livre, qui contient d'ailleurs beaucoup de renseignements d'utilité pratique, peut être considéré comme une introduction à l'étude réfléchie des Mathématiques.

Digitized by Google

A ce titre, on peut le signaler aux professeurs des Écoles Normales : l'enseignement primaire supérieur fournit déjà d'excellentes recrues aux Facultés des Sciences, et il est permis d'espérer que l'on se préoccupera de plus en plus d'assurer, le plus complètement possible, le développement de toutes les intelligences.

Une Introduction qui prend un peu plus des cent premières pages du livre rappelle, dans un ordre logique, les définitions, les propositions et les règles qui seront, plus tard, supposées connues. Un élève qui n'aurait pas pu suivre régulièrement les Cours précédant le Cours de Philosophie y trouvera un guide pour compléter son instruction. Rien de plus utile d'ailleurs, pour tous, que ces vues d'ensemble où les leçons apprises autrefois, une par une, s'ordonnent en groupes naturels, et où la simplification voulue des détails laisse aux idées principales toute leur valeur.

On retrouvera, par exemple, comment on a été conduit à considérer, après les nombres naturels 1, 2, 3, ..., les fractions, les nombres irrationnels, les nombres affectés de signe, et je vais essayer de donner une idée du choix heureux des représentations employées ici. On me permettra de donner tout de suite une impression personnelle : Voilà bien des années que j'enseigne ces choses à des élèves pris dans des catégories très différentes; je suis convaincu que, si l'on expose aux élèves de Philosophie, sans parti pris d'avance, en y mettant le temps et le détail nécessaires, les explications mises au point dans le livre de M. Tannery, ces élèves arriveront, je ne dis pas sans effort (et je ferai des réserves sur le dernier Chapitre qui, d'ailleurs, n'est pas imposé), mais avec un travail qui n'aura rien d'excessif, à acquérir les notions si utiles, introduites dans le nouveau programme.

Les fractions sont introduites en considérant des segments partagés en parties égales, et l'on fait cette remarque, d'où pourraient se déduire toutes les propriétés des fractions, que considérer une fraction, c'est au fond faire un changement d'unité; on a soin de montrer les opérations géométriques que traduisent les opérations sur les fractions.

Les nombres irrationnels se présentent dès que l'on veut définir la mesure d'une grandeur A, après avoir choisi comme unité une grandeur B de même espèce que A.

On observe de suite qu'ils sont inutiles dans la pratique

Digitized by Google

courante, où les valeurs approchées suffisent toujours. Il faudra lire, au § 68, comment on peut, à l'aide d'une image, se représenter un nombre tel que le rapport π de la circonférence au diamètre. J'indiquerai, un peu en gros, qu'il suffit d'imaginer une bande étroite de papier qui est d'abord rouge jusqu'à un point A, puis bleu à partir d'un point B, séparé de A par un intervalle blanc; le point limite du rouge et le point limite du bleu se rapprochent en empiétant sur l'intervalle blanc, et leur distance devient plus petite que toute la longueur donnée, de sorte qu'il ne peut subsister d'intervalle blanc, et qu'il ne peut rester qu'un point pour séparer la partie rouge et la partie bleue : les points A et B correspondaient à des valeurs approchées, le point définitif de séparation correspondra à la valeur même de π.

Les opérations sur les nombres irrationnels ne demandent, en fin de compte, que des opérations sur leurs valeurs approchées, et leur résultat peut s'obtenir avec une approximation aussi grande qu'on le veut.

Je regrette de ne pouvoir citer tout au long les §§ 70 et 71, où les nombres affectés de signe sont introduits, en prenant pour exemple une route droite, garnie de bornes, allant du Nord au Sud; je ne crois pas qu'on puisse tirer mieux parti d'un exemple simple et concret comme celui-là.

Les règles pour le calcul des nombres affectés de signe (que M. Tannery appelle des *nombres relatifs*) sont données de suite; on vérifie, après coup, que, dans ce nouveau calcul, les règles observées pour la multiplication des nombres naturels subsistent, et comme il faut encore montrer l'utilité de ces conventions (qu'on a eu le droit de faire, puisqu'elles ne conduisent pas à des contradictions), on étudie en détail le mouvement uniforme d'un mobile sur un axe et l'on fait voir que, grâce à l'introduction des nombres relatifs, on peut résumer en une seule règle tout ce qui se rapporte à de nombreux cas particuliers.

Ces exemples, que j'ai pris exprès dans les parties difficiles pour les commençants, ont, je pense, donné une idée approchée de l'esprit dans lequel est rédigée l'Introduction.

Après l'Introduction, le programme est développé en neuf Chapitres allant de la page 115 à la page 223 et le Livre se termine par des Notions historiques (p. 324-346).

Digitized by Google

Chapitre I : *Sur quelques identités*. — Chacune des identités considérée ici est établie avec tous les détails du calcul qui sert à la vérifier et suivie d'applications qui en montrent de suite l'utilité. C'est ainsi que le développement de $(a+b)^2$ conduit à une méthode pour approcher de plus en plus de la racine d'un nombre donné, quand on connaît déjà une valeur approchée; cette méthode est appliquée aussitôt à des exemples numériques.

L'identité

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

conduira plus tard à la division d'un polynome entier en x par $x-a$, à la dérivée de x^n...; on l'applique ici au calcul de la somme des termes d'une progression géométrique, et, après avoir déduit de cette identité elle-même que les puissances d'un nombre plus petit que un tendent vers zéro quand leur exposant augmente indéfiniment, on peut trouver la limite vers laquelle tend la somme

$$1 + x + \ldots + x^n,$$

où x est un nombre inférieur à un en valeur absolue, lorsque n augmente indéfiniment, résultat très important sur lequel on reviendra à la fin du Volume.

Chapitre II : *Algèbre géométrique*. — Si l'on partage un rectangle R en quatre rectangles partiels, en menant une parallèle à la base et une parallèle à la hauteur, on a une figure mettant en évidence l'identité

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd,$$

qui, dans un cas particulier, donne le développement de

$$(a+b)^2.$$

On considère de même plusieurs autres identités qui peuvent se lire sur des figures simples. La relation entre les côtés et l'hypoténuse d'un triangle rectangle est établie en faisant voir qu'on peut, en retranchant d'un même polygone auxiliaire deux triangles égaux au triangle donné, obtenir ou bien le carré construit sur l'hypoténuse ou bien la somme des carrés construits sur les autres côtés.



Enfin, on donne du problème : *Trouver deux lignes, connaissant leur somme et leur produit*, une solution géométrique où l'on pourra voir bientôt une représentation de la résolution d'une équation du second degré.

Chapitre III : *Équations du second degré.* — Le cas particulier $x^2 = A$ conduit à donner simplement quelques notions, dans la pratique, sur le calcul des radicaux carrés; puis viennent les questions classiques sur la résolution de l'équation du second degré, les relations entre les racines et les coefficients avec des exemples numériques des différents cas. Après avoir remarqué que les expressions des racines peuvent se déduire de la solution du problème de Géométrie tracé à la fin du Chapitre II, on compare les deux méthodes et l'on fait voir aisément la généralité plus grande de la méthode purement algébrique. « Au reste, cette généralité apparaîtra encore mieux dans les Chapitres qui suivent. A mesure que la science s'est constituée, la recherche d'une plus grande généralité s'est imposée; elle s'impose de plus en plus, à mesure que la science se développe, ou plutôt, la science ne peut se développer que grâce à une généralité toujours plus grande. »

Chapitre IV : *Coordonnées.* — Aussitôt après avoir rappelé que la position d'un point sur un axe est fixée par un nombre relatif, on discute la formule du mouvement uniforme

$$x = a + vt,$$

et, pour prendre un exemple bien déterminé, on cherche l'équation du mouvement, entre Paris et Marseille, d'un train dont la vitesse serait la vitesse moyenne d'un train marqué sur l'Indicateur.

Le procédé qui permet de faire correspondre un point à un nombre relatif ne s'applique pas seulement au cas où il s'agit de points sur une droite; il s'applique aussi au cas de points sur une courbe. On le montre d'abord pour un cercle et c'est une occasion d'expliquer la mesure d'un arc en degrés, en grades, en parties de rayon.

Pour obtenir un résultat analogue dans le cas d'une courbe quelconque, on imagine sur un arc de cette courbe des points fixes numérotés et suffisamment rapprochés, comme le sont les points de division d'un rapporteur; on déterminera approxi-

Digitized by Google

mativement la position d'un point M sur la courbe, si l'on se donne les numéros des deux points fixes consécutifs qui comprennent entre eux le point M. Cette conception pourra faire utilement réfléchir des étudiants plus avancés et sachant déjà ce qu'on entend par la longueur d'un arc de courbe.

Après ces explications il n'y a aucune difficulté à définir les coordonnées rectilignes dans le plan et dans l'espace et même des coordonnées curvulignes ; on fait pressentir l'utilité de ces coordonnées générales en expliquant la représentation du globe terrestre sur une Carte plane.

Chapitre V : *Courbes empiriques.* — Les exemples choisis sont déjà en partie indiqués dans le programme : courbe des températures, des poids, applications à la statistique. Mais les courbes, aussi bien que les Tableaux de statistique, doivent être convenablement interprétées. Pour la courbe représentant la variation du poids d'un enfant, la discussion est faite en deux pages et demie, avec l'intérêt minutieux que pourrait y apporter un père de famille et avec une netteté dans la critique que les élèves feront bien de remarquer, en vue d'autres occasions. A propos de la courbe des températures, on indique l'essentiel sur le mécanisme des instruments enregistreurs.

Si l'on étudie, dans un phénomène physique, la variation de deux grandeurs qui dépendent l'une de l'autre, à chaque expérience correspondra un point rapporté à deux axes fixes, et l'on cherchera à tracer la courbe, la plus régulière possible, et passant le plus près possible des points fournis par les expériences les plus satisfaisantes. La détermination de cette courbe moyenne peut se faire par des méthodes qu'il ne peut être question d'expliquer ici ; on a voulu seulement en donner une idée, et sans doute faire réfléchir sur ce que peut être une loi déduite d'expériences.

Chapitre VI : *Notions de Géométrie analytique.* — On indique sur des exemples ce qu'on entend par *fonctions d'une variable*. Après avoir insisté sur la détermination d'une droite rapportée à deux axes, et expliqué tout ce qu'on peut lire sur un graphique de chemins de fer, on étudie les exemples simples indiqués dans le programme et l'on compare, sur ces exemples, les procédés de la Géometrie pure et ceux de la Géométrie analytique.

Digitized by Google

Chapitre VII : *Tangentes. Vitesses. Dérivées.* — La première idée que l'on se fait d'une tangente à un arc de courbe est, sans doute, celle d'une droite qui a un seul point commun avec cet arc. Il convient donc d'habituer les élèves à considérer une tangente comme limite d'une sécante passant par un point M de la courbe et par un point infiniment voisin de M, sur la courbe. C'est ce que l'on fait en se servant du cercle et de la parabole.

La détermination de la tangente à une courbe $y = f(x)$ conduit à chercher la limite vers laquelle tend le rapport

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x},$$

quand x' tend vers x.

En se plaçant à un autre point de vue, qui était celui de Newton, on regarde la courbe $y = f(x)$ comme le diagramme d'un mouvement sur Oy. On suppose qu'un mobile P se déplace sur Ox d'un mouvement uniforme et que le nombre relatif qui détermine la position de ce mobile est pris pour mesure du temps ; puis on considère le point M de la courbe qui se projette en P sur Ox, et c'est la projection Q de M sur Oy dont on étudie le mouvement.

Pour trouver la vitesse du point Q, on est encore conduit à chercher la limite du rapport qui vient d'être considéré, à propos de la tangente.

Après avoir expliqué ces deux représentations, l'une géométrique, l'autre cinématique, on peut définir la dérivée d'une fonction et chercher les dérivées de quelques fonctions qu'on choisit exprès, aussi simples que possible. Pour passer des propriétés de la dérivée à celles de la fonction, on s'aidera des deux représentations ; les démonstrations ainsi obtenues ne sont pas entièrement rigoureuses ; M. Tannery fait toucher du doigt ce qui demanderait de plus longues explications et indique qu'on possède des démonstrations irréprochables des propositions qu'il vient d'énoncer et dont il a bien fait comprendre le sens. Il montre l'utilité de la dérivée pour étudier les variations d'une fonction. Il signale enfin l'importance du problème : Étant donnée une fonction $f(x)$, trouver une autre fonction $F(x)$ dont la dérivée soit $f(x)$.

Chapitre VIII : *Aires. Volumes. Notions de Calcul intégral.* — Jusqu'ici, un élève qui avait suivi, en y travaillant, les

Digitized by Google

cours de Mathématiques faits dans les classes de Lettres savait calculer l'aire d'un polygone; mais, si l'on excepte le cas du cercle, il n'avait pas d'idée de la mesure d'une aire limitée par contour curviligne. Or, cette notion d'aire intervient, au moins comme représentation, dans un grand nombre de questions, par exemple quand on veut évaluer le travail d'une force variable, et d'autre part des notions théoriques d'une importance capitale peuvent y être rattachées.

La question de l'évaluation des aires est-elle trop difficile pour être expliquée à des élèves de Philosophie? On verra, en lisant ce Chapitre, qu'on ne suppose rien en dehors de ce qui a déjà été enseigné à ces élèves; il est vrai que l'attention doit être soutenue un peu plus longtemps et, d'un autre côté, l'aspect nouveau de ces questions, l'incrédulité de personnes initiées aux Mathématiques, mais n'ayant pas eu le temps de lire avec soin des exposés tels que celui de M. Tannery pourront, la première année, faire paraître la difficulté plus grande qu'elle ne l'est en réalité. Ceux qui feront cette étude, sans parti pris et avec quelque persévérance, en seront largement récompensés.

Un contour étant tracé sur une feuille de papier quadrillé, on a une mesure approchée par défaut de l'aire limitée par ce contour, si l'on compte les carrés intérieurs et non traversés par le contour; il suffit d'ajouter la somme des carrés traversés pour avoir une limite supérieure de l'aire, et tout revient à voir que cette somme des carrés traversés devient négligeable si l'on prend le quadrillage de plus en plus serré. Cette indication intuitive est reprise avec une précision et une rigueur parfaites dans deux paragraphes que l'Auteur prend soin d'ailleurs de signaler comme pouvant très bien être passés. On voit déjà comment on peut faire correspondre un nombre à une aire, et l'on pourra même trouver une valeur approchée de ce nombre, par le procédé indiqué, pour des courbes se présentant dans la pratique.

Mais il reste à voir comment on peut obtenir exactement ce nombre pour des courbes définies géométriquement.

Or, si l'on considère l'aire A limitée par une courbe $y=f(x)$, l'axe des x, une ordonnée fixe et une ordonnée variable qui correspond à une abscisse x, cette aire A est une fonction de x, dont la dérivée est précisément $f(x)$. Si l'on connait une fonction $F(x)$ admettant $f(x)$ pour dérivée, l'aire consi-

Digitized by Google

dérée a pour mesure

$$F(x) - F(x_0),$$

x_0 désignant l'abscisse qui correspond à l'ordonnée fixe. On aperçoit bien la grande utilité de ces fonctions primitives.

Le raisonnement précédent, interprété à un autre point de vue, donne un autre aperçu sur le Calcul intégral : $f(x)$ étant une fonction continue, si l'on ne sait pas former avec les fonctions connues une fonction admettant $f(x)$ comme dérivée, on pourra définir à l'aide d'une aire une fonction primitive de $f(x)$, et calculer ensuite la valeur de cette fonction primitive avec une approximation aussi grande que l'on voudra. M. Tannery en fait une très intéressante application à l'étude des logarithmes, en cherchant quelles sont les propriétés de la fonction dont la dérivée est $\frac{1}{x}$. Cette méthode pour introduire en Analyse la fonction $\log x$ présente des avantages à remarquer; ces avantages apparaîtront mieux encore à ceux des lecteurs qui étudieront, dans la suite, les fonctions des variables complexes.

On montre enfin comment l'évaluation du volume limité par une surface et par deux plans parallèles se ramène à la recherche d'une fonction primitive, et l'on en fait l'application à la détermination des volumes considérés en élémentaires.

Chapitre IX : *Limites. Infiniment petits. Séries.* — Il est bien inutile de dire que ces questions sont élucidées avec le plus grand soin. Mais il ne dépend pas de l'Auteur qu'elles ne soient difficiles pour des élèves de Philosophie. En tout cas, ce Chapitre sera un complément intéressant au livre classique qu'ils auront pu étudier très bien jusque-là, livre qu'ils garderont une fois leurs études finies et qu'ils pourront placer dans leurs bibliothèques, non loin de leurs autres livres de Philosophie.

Des notions historiques très précises sont données dans les vingt-cinq dernières pages. Elles ont été rédigées par M. Paul Tannery, l'un des historiens les plus autorisés des Mathématiques.

E. Lacour.

Digitized by Google

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox *et* Oy, *on considère une courbe* K *telle que la projection* C′ *sur l'axe* Ox *du centre de courbure* C, *relatif à un point* M, *et le point* T *de rencontre de la tangente en* M *avec* Ox, *soient constamment symétriques par rapport à la projection* P *de* M *sur* Ox.

1° *Former et intégrer l'équation différentielle qui définit la courbe* K; *vérifier que la distance du point* P *à la normale en* M *est constante;*

2° *Construire la courbe* K *et sa développée;*

3° *Calculer l'arc de la courbe* K;

4° *Calculer l'aire dont le contour est formé par les ordonnées* MP, M_0P_0 *des points* M *et* M_0 *de* K, *par la portion* PP_0 *de l'axe* Ox *et par l'arc de courbe joignant* M *et* M_0.

II. *Enveloppe d'une famille de surfaces définie par une équation contenant deux paramètres variables.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Construire la courbe*

$$y = 4\frac{\sin x}{x}$$

et calculer avec 4 décimales la plus petite valeur positive de x pour laquelle la tangente est parallèle à l'axe des x.

(Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$2y\frac{\partial z}{\partial x} + 3x^2\frac{\partial z}{\partial y} + 6x^2y = 0.$$

1° *Trouver son intégrale générale;*

2° *Déterminer la surface* S *qui, rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *vérifie cette équation aux dérivées partielles et passe par la parabole définie*

Digitized by Google

par les équations

$$x = 0, \qquad y^2 = 2z;$$

3° *Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface.*

II. *Plan tangent à une surface réglée; variation de ce plan lorsque le point de contact se déplace sur une génératrice rectiligne de la surface. Paraboloïde des normales. Quadriques de raccordement.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer, par la méthode de Cauchy, l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}}\,dx}{(x^2+a^2)^2},$$

dans laquelle $x^{\frac{1}{3}}$ *a sa détermination réelle.*

(Novembre 1903.)

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Trouver l'intégrale de l'équation*

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 2z$$

qui se réduit à $(1+y)^2$ *pour* $x = 0$.

$$\left[z = \left(x\sqrt{\frac{3}{2}} + y + 1\right)^2\right].$$

II. *Déterminer une courbe plane telle qu'un point fixe* O *de son plan et le centre de courbure en un point quelconque* M *de la courbe soient à égale distance de la tangente en* M *et du même côté de cette droite.*

SOLUTION.

La développée, dont toutes les normales passent en O, est une circonférence, et la courbe, sa développante.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Construire la courbe*

$$x(x+y)^2 = 2(x-y);$$

2° *Volume engendré par la révolution d'une développante d'ellipse autour du petit axe de l'ellipse.*

Digitized by Google

SOLUTION.

$$\frac{32}{105}\pi\frac{c^6}{a^2 b}.$$

(Novembre 1903.)

Grenoble.

COMPOSITION ÉCRITE. — I. *Trouver une courbe plane* S *telle que sa normale* N, *limitée à l'axe des x, soit dans un rapport donné* K *avec la distance* P *de l'origine à la tangente. Cas particuliers où* K = 1, 2, 3.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Réduction de l'intégrale*

$$u = \int \frac{dx}{(x-3)^2\sqrt{X}},$$

où $X = x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120.$

(Novembre 1903.)

Poitiers.

COMPOSITION ÉCRITE. — I. *Trouver les projections sur le plan* xOy *des lignes de courbure du paraboloïde hyperbolique*

$$x = a(u+v), \qquad y = b(u-v), \qquad z = cuv;$$

on suppose $c = \sqrt{a^2+b^2}$.

II. *Déterminer une surface telle que chaque point* M *soit le centre de gravité du triangle situé dans le plan tangent en* M *et dont les sommets* A, B, C *sont sur les axes* OX, OY, OZ.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *L'équation*

$$x(1-x)y'' + \left(\frac{3}{2} - 2x\right)y' - \frac{y}{4} = 0$$

admet une solution de la forme $y = x^n$; *trouver* n, *et intégrer l'équation.* (Juillet 1903.)

COMPOSITION ÉCRITE. — *Une surface est représentée par les*

Digitized by Google

équations

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = f(r) + \varphi(\theta)$$

(*f et φ sont des fonctions données des variables indépendantes r et θ*).

1° *Quelle est en r et θ l'expression du rayon de courbure d'une section normale;*

2° *Équation différentielle des lignes asymptotiques;*

3° *Intégrer cette équation en faisant*

$$f(r) = k\frac{r^n}{a^{n-1}}, \qquad \varphi(\theta) = b\theta,$$

et supposant successivement

$$n > 1, \qquad n < 1, \qquad n = 1.$$

Épreuve pratique. — *x, y étant deux variables indépendantes, k une constante positive moindre que 1, calculer l'intégrale double*

$$\int_0^k dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{y\cos x + 1};$$

en déduire la formule

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}\, l(1 + k\cos x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}(\operatorname{arc}\cos k)^2.$$

Application numérique :

$$k = 0,25.$$

(Novembre 1903.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1938.

(1902, p. 479.)

Le centre de gravité des pieds des normales menées d'un point quelconque C à une conique de centre O est au milieu de la distance du point O au centre de gravité des points

Digitized by Google

d'intersection de la conique et d'un cercle de centre C et de rayon quelconque. (M. D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. E.-N. BARISIEN.

Supposons que la conique soit l'ellipse d'équation

$$(1) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Soient (α, β) les coordonnées du point C. On sait que l'équation aux abscisses des pieds des normales à (1) issues de C est

$$c^4x^4 - 2a^2\alpha c^2x^3 + a^2x^2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^4) + \ldots = 0.$$

La somme de ces abscisses est $\frac{2a^2\alpha}{c^2}$: par conséquent l'abscisse du centre de gravité des pieds est

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2a^2\alpha}{c^2}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{a^2\alpha}{2c^2}.$$

Les coordonnées de ce centre de gravité sont donc

$$(2) \qquad X = \frac{a^2\alpha}{2c^2}, \qquad Y = \frac{b^2\beta}{2c^2}.$$

D'autre part, l'équation d'un cercle de centre C et de rayon R s'écrit

$$(3) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

ou

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0.$$

L'élimination de y entre (1) et (2) donne l'équation du quatrième degré en x

$$\left(\frac{c^2x^2}{a^2} - 2\alpha x + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - R^2\right)^2 = 4\beta^2\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

ou

$$\frac{c^4x^4}{a^4} - \frac{4\alpha c^2}{a^2}x^3 + \ldots = 0.$$

La somme des abscisses des quatre points d'intersection de (1) et (4) est $\frac{4a^2\alpha}{c^2}$. Donc, l'abscisse du centre de gravité de

ces quatre points est $\frac{a^2\alpha}{c^2}$. Les coordonnées de ce centre de gravité sont, par suite,

$$(5) \qquad X_1 = \frac{a^2\alpha}{c^2}, \qquad Y_1 = -\frac{b^2\beta}{c^2}.$$

La comparaison des formules (2) et (5) démontre la proposition énoncée.

Le centre de gravité des points d'intersection d'un cercle et d'une ellipse ne change pas lorsque le rayon du cercle varie, son centre restant fixe.

QUESTIONS.

1991. Soient (S) et (S′) deux surfaces réglées ayant la même ligne de striction C, et telles que les génératrices G et G′ de (S) et de (S′) qui se coupent en un point m de C fassent entre elles un angle constant. Toute droite G″, qui passe par le point m et constitue avec G et G′ un trièdre de grandeur invariable, engendre une surface (S″) dont la ligne de striction est aussi C. (R. Bricard.)

1992. On donne dans l'espace une courbe C.

Définir la surface réglée la plus générale dont C est la ligne de striction en même temps qu'une ligne de courbure.

(R. Bricard.)

ERRATA.

Tome III, 1903, page 533, figure 2 : changer le sens de la flèche pour l'angle (CB, CA).

Ibid. : au point B_1', l'arc de gauche avec flèche doit être prolongé un peu vers la droite jusqu'au trait plein.

Page 540, figure 3 : imaginer que cette figure est agrandie, de façon que le quadrilatère ABCD soit égal à celui de la figure 4.

Digitized by Google

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

CAUCHY (A.). — **Œuvres complètes d'Augustin Cauchy**, publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, avec le concours de MM. *Valson*, *Collet* et *Em. Borel*, Docteurs ès Sciences. 27 vol. in-4.

Ire Série : Mémoires, Notes et Articles extraits des Recueils de l'Académie des Sciences. 12 vol. in-4.

IIe Série : Mémoires extraits de divers Recueils, Ouvrages classiques, Mémoires publiés en corps d'Ouvrage, Mémoires publiés séparément. 15 vol. in-4.

VOLUMES PARUS :

Ie Série. — Tome I, 1882 (*Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie. — Mémoire sur les intégrales définies*). — Tomes II et III, Mémoires extraits des *Mémoires de l'Académie des Sciences*. — *Tome IV à XII, 1884 à 1903 (*Extraits des Comptes rendus de l'Académie des Sciences*).

La * *Table générale de la 1re Série* se vend séparément. 2 fr. 50 c.

IIe Série. — Tome I, Mémoires extraits du *Journal de l'École Polytechnique*. — Tome II, Mémoires extraits de divers Recueils : *Journal de Liouville*, *Bulletin de Férussac*, *Bulletin de la Société philomathique*, *Annales de Gergonne*, *Correspondance de l'École Polytechnique*. — *Tome III, 1897 : *Cours d'Analyse de l'École royale Polytechnique*. — *Tome IV, *Résumé des Leçons données à l'École Polytechnique sur le Calcul infinitésimal. Leçons sur le Calcul différentiel*. — *Tome V, *Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie*. — *Tome VI, 1887. *Tome VII, 1889. *Tome VIII, 1890. *Tome IX, 1891. (*Anciens Exercices de Mathématiques*, 1re, 2e, 3e, 4e, 5e années.) — *Tome X, 1895. *Résumés analytiques de Turin. Nouveaux Exercices de Prague* (*Mémoire sur la dispersion de la lumière*). — Tomes XI à XIV. *Nouveaux exercices d'Analyse et de Physique*. — Tome XV. *Mémoires séparés. Tables générales*.

Les volumes parus sont indiqués par un astérisque.

Prix de chaque volume.......................... 25 fr.

SOUSCRIPTION.

IIe Série. — Tome I. *Mémoires extraits du Journal de l'École Polytechnique*. 20 fr.

Ce volume, qui paraîtra dans le cours de 1904, est mis en souscription. Le prix en est réduit, pour les souscripteurs qui feront leur versement à l'avance, à.. 20 fr.

ROBIN (G.), Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Paris. — **Œuvres scientifiques de Gustave Robin**, publiées sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique. Mémoires réunis et publiés par Louis Raffy, chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Paris. 3 volumes grand in-8, se vendant séparément :

Mathématiques : *Nouvelle théorie des fonctions exclusivement fondée sur l'idée de nombre*. Un volume grand in-8 ; 1903.......... 8 fr.

Physique : Un volume grand in-8, en deux fascicules :

Physique mathématique (Distribution de l'Électricité, Hydrodynamique, Fragments divers). Un fascicule grand in-8 ; 1899.. 5 fr.

Thermodynamique générale (Équilibre et modifications de la matière). Un fascicule grand in-8 ; 1901..................... 9 fr.

Chimie : *Leçons de Chimie physique*, professées à la Faculté des Sciences de Paris. Un volume in-8........... (*En préparation*.)

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Février 1904.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS.

LAGRANGE. — Œuvres complètes de Lagrange, publiées par les soins de *J.-A. Serret* et *G. Darboux*, Membres de l'Institut, sous les auspices du MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE. In-4, avec un beau portrait de Lagrange, gravé sur cuivre par Ach. Martinet.

La **Iʳᵉ Série** comprend tous les *Mémoires* imprimés dans les *Recueils des Académies de Turin, de Berlin et de Paris*, ainsi que les *Pièces diverses* publiées séparément. Cette série forme 7 volumes (Tomes I à VII; 1867-1877), qui se vendent séparément .... 30 fr.

La **IIᵉ Série** se compose de 7 volumes, qui renferment les Ouvrages didactiques, la Correspondance et les Mémoires inédits, savoir :

Tome VIII : *Résolution des équations numériques*; 1879 .... 18 fr.

Tome IX : *Théorie des fonctions analytiques*; 1881 .... 18 fr.

Tome X : *Leçons sur le calcul des fonctions*; 1884 .... 18 fr.

Tome XI : *Mécanique analytique*, avec Notes de J. BERTRAND et G. DARBOUX (1ʳᵉ PARTIE : *Statique*); 1888 .... 20 fr.

Tome XII : *Mécanique analytique*, avec Notes de J. BERTRAND et G. DARBOUX (2ᵉ PARTIE : *Dynamique*); 1889 .... 20 fr.

Tome XIII : *Correspondance inédite de Lagrange et d'Alembert*, publiée d'après les manuscrits autographes et annotée par LUDOVIC LALANNE. In-4; 1882 .... 15 fr.

Tome XIV et dernier : *Correspondance de Lagrange avec Condorcet, Laplace, Euler et divers savants*, publiée et annotée par LUDOVIC LALANNE, avec deux fac-similés; 1892 .... 15 fr.

34577 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

Digitized by Google

MAY 3 1904

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique,

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur à l'École Polytechnique,

Publication fondée en 1842 par Gerono et Terquem,
et continuée par Prouhet, Bourget, Brisse, Rouché, Antomari et Duporcq.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME IV.

MARS 1904.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris,
à M. Laisant, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,
ou à M. Bourlet, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,
ou à M. Bricard, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.
(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Digitized by Google

Rédacteur de service : M. C. Bourlet.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences.

Besançon : M. N.... — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Duport. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. — Montpellier : M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers : M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

BOURDON. — **Application de l'Algèbre à la Géométrie**, comprenant la Géométrie analytique à deux et à trois dimensions. 9e édition, rédigée conformément aux nouveaux *Programmes* de l'enseignement dans les Lycées, revue et annotée par M. *Darboux*, Agrégé de l'Université, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Descartes. In-8, avec planches; 1880. (*Adopté par l'Université.*).. 9 fr.

JOUFFRET (E.), ancien Élève de l'École Polytechnique, membre de la Société mathématique de France. — **Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions.** *Introduction à la Géométrie à n dimensions.* Grand in-8, de XXIX-213 pages avec 65 figures; 1903.......... 7 fr. 50 c.

NIEWENGLOWSKI (B.), Docteur ès Sciences, ancien Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand, Inspecteur de l'Académie de Paris. — **Cours de Géométrie analytique**, à l'usage des Élèves de la Classe de Mathématiques spéciales et des Candidats aux Écoles du Gouvernement. 3 volumes grand in-8, avec nombreuses figures, se vendant séparément.

Tome I : *Sections coniques*, avec 120 figures; 1894 .... 10 fr.

Tome II : *Construction des courbes planes. Compléments relatifs aux coniques*, avec 180 figures; 1895 .... 8 fr.

Tome III : *Géométrie dans l'espace* (avec une Note de M. E. Borel, maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille, *Sur les Transformations en Géométrie*), avec 43 figures; 1896........ 14 fr.

OCAGNE (Maurice d'), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Traité de Nomographie.** *Théorie des abaques. Applications.* Grand in-8, avec 177 figures et 1 planche; 1899.

Broché............. 14 fr. | Relié (cuir souple)... 17 fr.

Digitized by Google

[R7fα]

LE PENDULE SIMPLE SANS APPROXIMATIONS;

Par M. A.-G. GREENHILL.

Traduit par M. C.-A. LAISANT.

Une méthode a été proposée dans les *Nouvelles Annales* (juin 1902) pour éviter l'inconvénient des approximations, employées d'ordinaire dans la discussion élémentaire des petites oscillations d'un pendule simple. On y arrivait en y substituant une recherche exacte des limites, inférieure et supérieure, entre lesquelles doit tomber la vraie période.

Dans cette méthode, le mouvement oscillatoire du pendule était assimilé à un mouvement de circulation sur un cercle, de vitesse variant, dans le cas des petites oscillations, entre deux limites rapprochées dont l'expression conduisait à celle des limites cherchées de la période.

On se propose ici d'étudier le problème, en assimilant l'oscillation de va-et-vient du pendule avec le mouvement rectiligne d'un corps qui accomplit une vibration simple. Nous ferons usage d'un lemme relatif à la théorie du *mouvement simple harmonique*, savoir :

Lemme. — *La vitesse, dans une vibration simple harmonique, est* $\frac{2\pi}{\textit{période}}$ *fois la moyenne géométrique des distances aux deux positions extrêmes du mobile.*

Supposons, en effet, que la vitesse d'un point P,

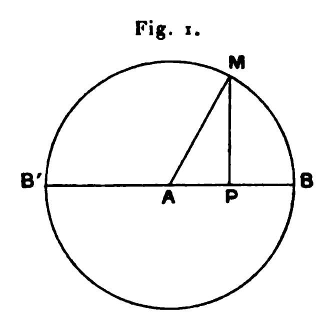
Digitized by Google

mobile en ligne droite entre B et B', soit égale à

$$n\sqrt{PB.PB'}.$$

Décrivons le cercle de diamètre BB', et élevons l'ordonnée MP (*fig.* 1). Alors, MP étant la moyenne géomé-

Fig. 1.



trique de BP et PB', la vitesse de P est nMP, et la vitesse du point M sur le cercle est nAM, qui est une constante, A étant le centre; de sorte que la circonférence 2πAM du cercle est décrite avec la vitesse constante nAM, donc dans le temps périodique $T = \frac{2\pi}{n}$; et la vitesse de P étant $n\sqrt{BP.PB'}$ est $\frac{2\pi}{T}$ fois la moyenne géométrique des distances du point P à B et B'.

Considérons maintenant le mouvement du point P d'un pendule simple de longueur $OP = l$, oscillant sur un arc fini BAB', de part et d'autre du point le plus bas A (*fig.* 2).

Pour une particule P, mobile dans un champ de gravité g sur une courbe polie, partant du repos, et tombant à partir du niveau BB', on a :

$$(1) \qquad (\text{vitesse en P})^2 = 2g\,\text{DN}.$$

Or, d'après un théorème connu de Géométrie on a

Digitized by Google

aussi :

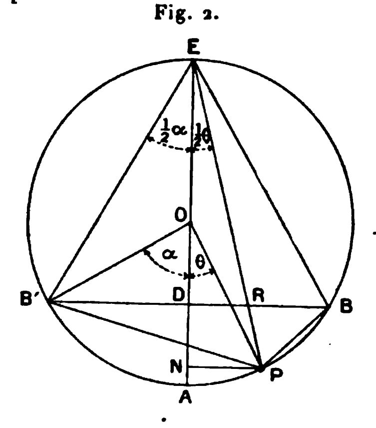
(2) $$PB.PB' = DN.AE,$$

relation où AE est le diamètre vertical du cercle ; si donc nous posons, comme d'habitude, $\frac{g}{l} = n^2$, nous aurons

(3) $$(\text{vitesse en P})^2 = n^2 PB.PB',$$

formule analogue à celle de la vibration rectiligne harmonique simple.

Fig. 2.



Joignant P à E, point le plus haut du cercle BAB' sur lequel P se meut, et désignant par R le point où PE coupe BB', considérons l'oscillation rectiligne de R résultant du mouvement de P sur l'arc circulaire BAB' ; l'ombre de P projetée sur le sol horizontal par une lumière placée en E aura un mouvement analogue à celui de R.

Puisque ERP coupe la droite BRB' et l'arc BPB' sous des angles égaux,

(4) $$\frac{\text{vitesse de R}}{\text{vitesse de P}} = \frac{ER}{EP};$$

et d'après la similitude des triangles EBR et PB'R,

Digitized by Google

BPR et EB′R,

(5) $$\frac{PB}{BR} = \frac{EB'}{ER} \quad \text{et} \quad \frac{PB'}{B'R} = \frac{EB}{ER},$$

de sorte que

(6) $$\frac{PB.PB'}{BR.B'R} = \frac{EB^2}{ER^2}.$$

Donc

(7) $$(\text{Vitesse de R})^2 = n^2 PB.PB' \frac{ER^2}{EP^2} = n^2 BR.RB' \frac{EB^2}{EP^2}.$$

Comme les points P et R oscillent, on a :

(8) $$1 > \frac{EB}{EP} > \frac{EB}{EA},$$

de sorte que

(9) $$n^2 BR.RB' > (\text{vitesse de R})^2 > n^2 BR.RB' \frac{EB^2}{EA^2},$$

et de là, comme conséquence du lemme,

(10) $$\frac{2\pi}{n} < \text{période d'oscillation de R} < \frac{2\pi}{n} \frac{EA}{EB}.$$

Dans les petites oscillations; où EA et EB ne peuvent être distingués, la période est pratiquement

(11) $$\frac{2\pi}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

ce qui est la formule usuelle; théoriquement la période est toujours plus grande, mais seulement de très peu; et la différence est inappréciable pour les petites oscillations.

La solution complète introduit les fonctions elliptiques, à la manière indiquée par Legendre (*Fonctions elliptiques,* t. I, Chap. VIII).

Désignant l'angle d'oscillation BOB′ par 2α et

Digitized by Google

l'angle AOP par θ, et posant $DB = a$, $DR = x$, on a

$$(12) \qquad a = ED \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha, \qquad EB = EA \cos \frac{1}{2}\alpha,$$

$$(13) \qquad x = ED \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta, \qquad EP = EA \cos \frac{1}{2}\theta,$$

et

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= (\text{vitesse de R})^2 \\ &= n^2(a^2 - x^2)\frac{\text{séc}^2 \frac{1}{2}\theta}{\text{séc}^2 \frac{1}{2}\alpha} \\ &= n^2(a^2 - x^2)\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\alpha\right)\cos^2 \frac{1}{2}\alpha \\ &= n^2 a^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\left(\cos^2 \frac{1}{2}\alpha + \frac{x^2}{a^2}\sin^2 \frac{1}{2}\alpha\right); \end{aligned} \right.$$

de sorte que, posant

$$(4) \qquad x = a\cos\varphi, \qquad \sin\frac{1}{2}\alpha = k, \qquad \cos\frac{1}{2}\alpha = k',$$

on a

$$(15) \quad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = n^2(k'^2 + k^2\cos^2\varphi) = n^2(1 - k^2\sin^2\varphi) = n^2(\Delta\varphi)^2,$$

$$(16) \qquad nt + \varepsilon = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = F(\varphi, k),$$

dans la notation de Legendre, ou encore, en introduisant les fonctions elliptiques suivant la méthode d'Abel et la notation de Jacobi,

$$(17) \qquad \varphi = \operatorname{am}(nt + \varepsilon),$$

$$(18) \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{cn}(nt + \varepsilon).$$

Ainsi, le pendule simple bat suivant une loi de fonctions elliptiques, quand il se balance d'un grand angle, comme une cloche; et ces fonctions elliptiques dégénèrent en fonctions circulaires lorsque l'angle d'oscil-

Digitized by Google

lation est petit, comme dans un pendule d'horloge ordinaire.

Une roue de bicyclette sur son support à billes présente un appareil approprié pour une illustration expérimentale; on peut modifier l'équilibre de la roue, grâce à l'insertion d'une barre de fer entre les rayons, et l'essieu peut être rendu horizontal ou incliné d'un angle quelconque sur l'horizon.

Quand l'angle d'oscillation 2α approche de 360°, la période d'oscillation tend vers une limite infinie. Si la durée de l'oscillation, pour un angle 2α, est donnée par

$$T = 4K\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{19}$$

de module $k = \sin\frac{1}{2}\alpha$, cette durée est donnée, pour l'angle $360° - 2\alpha$ par

$$T' = 4K'\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{20}$$

de co-module $k' = \cos\frac{1}{2}\alpha$, de sorte que

$$\frac{T'}{T} = \frac{K'}{K}, \tag{21}$$

et la théorie de la multiplication complexe nous permet de déterminer K, K' et α lorsque

$$\frac{K'}{K} = \sqrt{m}, \qquad \left(\frac{K'}{K}\right)^2 = m, \tag{22}$$

m étant un entier, ou une fraction rationnelle; ou, autrement dit, lorsque le pendule de longueur l, oscillant de $360° - 2\alpha$, est synchrone à un pendule de longueur ml, oscillant de 2α.

Ainsi, pour $m = 3$, l'angle modulaire $\frac{1}{2}\alpha = 15°$ (Legendre, *Fonctions elliptiques*, t. I, Chap. XI, p. 60); de sorte qu'un pendule se balançant de 300° a une

Digitized by Google

période égale à $\sqrt{3}$ fois celle correspondant à 60°, ou encore même période qu'un pendule trois fois plus long, et se balançant de 60°.

Le résultat précédent peut s'interpréter au moyen de la roue de bicyclette dont il a été question plus haut : si l'essieu de cette roue est incliné de manière à faire avec la verticale un angle β donné par la formule

$$\text{coséc}\,\beta = m,$$

la durée d'une oscillation d'amplitude égale à 2α sera la même que la durée d'une oscillation d'amplitude égale à $360° - 2\alpha$, l'essieu étant maintenu horizontal.

Par exemple, la durée d'une oscillation d'amplitude égale à 300° (de I^h à XI^h, sur un cadran d'horloge), dans le cas de l'essieu horizontal, est égale à la durée d'une oscillation d'amplitude égale à 60° (de V^h à VII^h), l'essieu étant incliné de manière à faire avec la verticale l'angle dont la cosécante est égale à 3.

Pour

(23) $n = 2, \quad k = \sqrt{2} - 1, \quad \text{coséc}\,\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{2} + 1, \quad \frac{1}{2}\alpha = 24°, 28'$

(Legendre, *F. E.*, t. I, p. 106),

(24) $n = 4, \quad k = (\sqrt{2} - 1)^2, \quad \text{coséc}\,\frac{1}{2}\alpha = (\sqrt{2} + 1)^2, \quad \frac{1}{2}\alpha = 9°, 53',$

(25) $n = 5, \quad 2kk' = \sqrt{5} - 2, \quad \text{coséc}\,\alpha = \left(\frac{1}{2}\,\text{coséc}\,18°\right)^3,$

(26) $n = 25, \quad 2kk' = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^{12}, \quad \text{coséc}\,\alpha = \left(\frac{1}{2}\,\text{coséc}\,18°\right)^{12},$

(27) $n = 6, \quad \text{coséc}\,\frac{1}{2}\alpha = (\sqrt{3} + \sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}\right)^2,$

(28) $n = 7, \quad \text{coséc}\,\alpha = 8,$

(29) $n = 49, \quad \text{coséc}\,\alpha = \left(\frac{\sqrt{7} + \sqrt{2}\,\sqrt[4]{7} + 1}{2\sqrt{2}}\right)^{12},$

(30) $n = 100, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - k\right) = \frac{128\sqrt{2}}{(\sqrt[4]{5} - 1)^{12}}$ (Weber).

Digitized by Google

On trouvera une collection de ces résultats numériques de la multiplication à la fin des *Fonctions elliptiques* du professeur H. WEBER; pour le calcul numérique, il est plus simple de se servir du module réciproque, ou cosécante de l'angle modulaire, qui conduit plus rapidement au résultat sans aucun changement des chiffres par soustraction.

Une évaluation des résultats peut être rapidement obtenue par la formule approchée

$$(31) \quad e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{n}} \approx 4 \operatorname{coséc} \frac{1}{2}\alpha, \quad \text{ou} \quad 8 \operatorname{coséc} \alpha, \quad n = \left(\frac{k'}{k}\right)^2,$$

pour de grandes valeurs de n.

La valeur numérique de g a été déduite de la relation

$$(32) \qquad g = \pi^2 L,$$

grâce à une soigneuse détermination expérimentale de L, longueur du pendule qui bat la seconde. Il est dès lors plus simple et plus naturel de remplacer la formule qui donne la demi-période dans le cas des petites oscillations

$$(33) \qquad \frac{1}{2}T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

par

$$(34) \qquad \frac{1}{2}T = \sqrt{\frac{l}{L}}.$$

Pour éviter les calculs numériques, il suffit, pratiquement, de prendre L égal à 1^m (valeur exacte, $0^m,994$). Cela revient à faire

$$(35) \quad g = \pi^2 = 9,87 \quad \text{(valeur exacte à Paris, 9,81).}$$

Alors la demi-période ou durée d'une oscillation simple du pendule de 1^m étant 1 seconde, celle d'un pendule de l mètres de longueur est $\sqrt{l}$ secondes, s'il

Digitized by Google

s'accomplit de petites oscillations; et sa période est $2\sqrt{l}$ secondes.

[R1e]

SUR UN SYSTÈME ARTICULÉ GAUCHE;

PAR M. G. FONTENÉ.

Dans un précédent Mémoire [1] (*Nouvelles Annales*, décembre 1903 et janvier 1904) j'ai étudié le cas le plus remarquable du système articulé de M. Kempe, système dont les éléments sont des plaques triangulaires, susceptibles de dégénérer en de simples tiges. Je montrerai ici que, dans ce dernier cas, on peut substituer au système plan, qui a *un* paramètre de déformation, un système gauche ayant *deux* paramètres de déformation. Je conserve les notations du Mémoire cité.

1. Considérons (*fig.* 1) deux quadrilatères gauches articulés QPNM, QCN_1D, les tiges QP et QC restant confondues en direction, ainsi que les tiges QM et QD; si l'on relie par une tige deux points B et M_1 fixes sur PN et CN_1, *dans la déformation à deux paramètres du système obtenu*, un certain point A de la tige MN et un certain point P_1 de la tige DN_1 resteront à une distance constante l'un de l'autre. Les points A et P_1 sont déterminés par les conditions suivantes : les points A, B, C, D sont dans un même plan, ainsi que les points M, P_1, M_1, P. Je suis arrivé à ce résultat en considérant le triangle QNN_1.

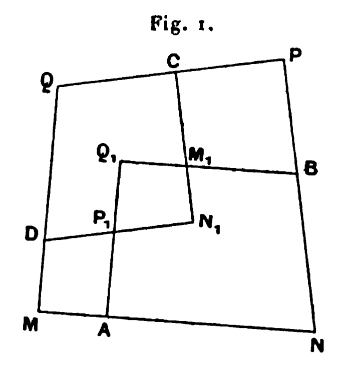
---

[1] *Voir* t. III, 1903, p. 529.

Digitized by Google

Il est facile de voir que les droites BM_1 et AP_1 se rencontrent en un point Q_1, et que ce point est fixe

Fig. 1.



sur les tiges BM_1 et AP_1; les quatre points N, Q_1, N_1, Q sont d'ailleurs dans un même plan.

On peut dire :

Si l'on considère dans l'espace huit tiges

AMN, BQ_1M_1, CPQ, DN_1P_1,
CM_1N_1, DQM, AP_1Q_1, BNP,

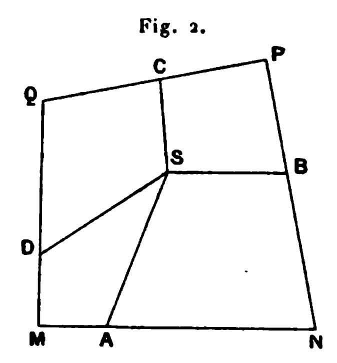
formant deux tétrades et quatre couples, telles que deux tiges qui n'appartiennent ni à une même tétrade ni à un même couple sont articulées entre elles, le système est déformable avec deux paramètres sous une condition unique : les points d'articulation A, B, C, D *des deux quadrilatères* MNPQ, $M_1N_1P_1Q_1$ *doivent être dans un même plan, auquel cas il en est de même des points d'articulation des deux quadrilatères* MAP_1D *et* M_1CPB, *et de ceux des deux quadrilatères* NAQ_1B *et* N_1CQD.

On aurait trois points I, J, K analogues à ceux de la figure 10 du Mémoire cité.

Digitized by Google

2. Les quatre points M_1, N_1, P_1, Q_1 peuvent être confondus en un même point S (*fig.* 2); la théorie de

Fig. 2.



l'appareil est alors très simple, et si l'on pose

$$\mathrm{MN} = a, \qquad \mathrm{NB} = b, \qquad \ldots,$$
$$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{AN}} = \frac{m}{n}, \qquad \frac{\mathrm{NB}}{\mathrm{BP}} = \frac{n}{p}, \qquad \ldots,$$
$$\mathrm{SA} = \alpha, \qquad \mathrm{SB} = \beta, \qquad \ldots,$$

on a

$$\alpha^2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right) - \beta^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right) + \ldots - \ldots$$
$$+ \left(\frac{a^2}{m+n} - \frac{b^2}{n+p} + \ldots - \ldots\right) = 0.$$

3. En conservant le point S, les quatre points A, B, C, D peuvent être à un cercle; la déformation du contour MNPQ les maintient sur un cercle, car, si l'on fait varier le dièdre MP sans modifier la longueur MP, en appelant J le point où AB et DC coupent MP, on a

$$\mathrm{JA}.\mathrm{JB} = \mathrm{JC}.\mathrm{JD}.$$

Comme on peut avoir alors $\alpha = \beta = \gamma = \delta$, on a

$$\frac{a^2}{m+n} - \frac{b^2}{n+p} + \frac{c^2}{p+q} - \frac{d^2}{q+m} = 0.$$

Digitized by Google

Si l'on regarde $m+n$, $n+p$, $p+q$ comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans l'espace, cette équation représente un cône du troisième ordre; ce cône a une génératrice double dans l'hypothèse

$$c+a=d+b(=l),$$

c'est-à-dire lorsque le contour MNPQ est circonscriptible à des sphères, et l'on a pour la génératrice double

$$\frac{m+n}{a}=\frac{n+p}{b}=\frac{p+q}{c}=\frac{q+m}{d}.$$

Si l'on adopte pour m, n, p, q des valeurs remplissant ces conditions, ce qui laisse un paramètre pour le système des points d'attache A, B, C, D, on a

$$\mathrm{NA}=\mathrm{NB},\qquad \mathrm{PB}=\mathrm{PC},\qquad \ldots;$$

on obtient les systèmes de points A, B, C, D en donnant au contour une forme déterminée, et en considérant les sphères qui touchent les quatre côtés : le lieu des centres de ces sphères est une droite, axe commun des cercles ABCD; en prenant pour S un point de cet axe, on aura

$$\mathrm{SA}=\mathrm{SB}=\mathrm{SC}=\mathrm{SD},$$

les points d'attache A, B, C, D étant tels qu'on l'a dit.

NOTE. — *Pourrait-on, avec des tétraèdres, obtenir un système articulé comparable au système plan de Kempe?* C'est une question que je ne puis étudier, faute de temps, et dont je serais heureux d'avoir provoqué la solution.

Digitized by Google

[C1f]

SUR UN PROBLÈME D'ALGÈBRE;

PAR M. J. SADIER.

Prouver que pour toutes les valeurs réelles et positives de la variable x l'expression $y = \frac{x^a - x^{1-a}}{x - 1}$, dans laquelle on a $0 < a < 1$, peut être représentée par

$$(2a - 1)\theta \qquad (0 < \theta < 1).$$

Cette question, posée dans le *Journal de Mathématiques spéciales* sous le n° 260, est reproduite au n° 503 des questions d'Algèbre de M. Laisant (*Recueil de probl. de math.*, t. III).

Une solution a été donnée (*J. S.*, 1896, p. 44). Elle est insuffisante : on y démontre l'existence d'un maximum (ou minimum, suivant le signe de $2a - 1$) et les valeurs o pour $x = 0$ et $x = \infty$. On n'y prouve pas que y reste toujours compris dans l'intervalle limité par ces deux racines.

Pour abréger l'écriture posons

$$b = 1 - a, \qquad c = a - b \qquad (a + b = 1;\ a \text{ et } b > 0).$$

On a

$$(x - 1)y = x^a - x^b,$$

d'où l'on déduit

$$x(x - 1)^2 y' = (ax + b)x^b - (bx + a)x^a.$$

Soit V le second membre :

$$V = 0 \qquad \text{pour} \qquad x = 0 \qquad \text{et} \qquad x = 1.$$

Digitized by Google

Prouvons que V ne s'annule pour aucune autre valeur de x. Nous allons pour cela résoudre l'équation

$$\frac{ax+b}{bx+a} = x^c,$$

en laissant de côté la racine $x = 0$, qui d'ailleurs n'annule pas la dérivée.

Les racines de cette équation sont données par les points d'intersection des deux courbes

$$y_1 = \frac{ax+b}{bx+a}, \qquad y_2 = x^c \quad (^1).$$

La première est une hyperbole équilatère; la seconde appartient à la famille des courbes paraboliques, dont l'équation est de la forme

$$y = x^m.$$

Nous avons deux cas à distinguer : $c > 0$ et $c < 0$.

(A) : $c > 0 (a > b)$; y_1 croît constamment de $\frac{b}{a}$ à $\frac{a}{b}$ lorsque x croît de 0 à ∞, et y_2 croît constamment de 0 à ∞. Les deux branches de courbe, sans point d'inflexion, se coupent en un seul point d'abscisse $x = 1$.

(B) : $c < 0 (a < b)$; y_1 décroît constamment de $\frac{b}{a}$ à $\frac{a}{b}$ et y_2 de ∞ à 0; la courbure, comme dans le cas précédent, ne change pas de sens.

Donc, dans les deux cas, V n'a qu'un changement de signe pour $x = 1$.

Cette discussion est résumée dans les deux Tableaux

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

Digitized by Google

suivants :

(A) : $c > 0$

x	0		1		∞
y'		$+$	0	$-$	
y	0	croît	c (max.)	décroît	0

(B) : $c < 0$

x	0		1		∞
y'		$-$	0	$+$	
y	0	décroît	c (min.)	croît	0

Donc y reste compris entre 0 et c, lorsque x croît de 0 à $+\infty$. Donc

$$y = c\theta = (a - b)\theta = (2a - 1)\theta. \qquad \text{Q. E. D.}$$

[D4a]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES TRANSCENDANTES DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES;

PAR M. GEORGES REMOUNDOS.

---

1. On sait le théorème classique de l'Algèbre sur les fonctions rationnelles des ν racines d'une équation algébrique

(1) $$x^\nu + a_1 x^{\nu-1} + a_2 x^{\nu-2} + \ldots + a_{\nu-1} x + a_\nu = 0,$$

d'après lequel *une telle fonction symétrique des ν racines $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ peut s'exprimer rationnellement à l'aide des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1}, a_\nu$, et inversement.*

Aussi, le théorème de Galois, qui est fondamental dans sa célèbre théorie, et pour la démonstration duquel on fait usage du précédent (*voir*, par exemple, le *Traité d'Analyse* de M. PICARD, t. III, p. 439).

Je me propose ici de démontrer un théorème ana-

Digitized by Google

logue de l'analyse concernant les fonctions transcendantes et uniformes de plusieurs variables indépendantes, qui peut servir dans diverses circonstances.

Ce théorème est le suivant :

Toute fonction entière (uniforme et continue) et symétrique des ν racines x_1, x_2, ..., x_ν de l'équation (1) *s'exprime uniformément à l'aide des ν fonctions symétriques élémentaires a_1, a_2, ..., a_ν, et inversement.*

En effet, une telle fonction étant développable en série, procédant suivant les puissances entières et positives de $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, on aura

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \\ &\quad = Q_0(x_1, \ldots, x_\nu) + Q_1(x_1, \ldots, x_\nu) + \ldots \\ &\qquad\qquad + Q_n(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) + \ldots, \end{aligned} \right.$$

où $Q_n(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ désigne un polynome homogène et de degré n en $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$.

Si $\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ est symétrique par rapport à ces variables, il en sera de même de toutes les fonctions Q_0, Q_1, ..., $Q_n(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$; or, ces fonctions sont rationnelles et, d'après le théorème précédemment cité, elles peuvent s'exprimer rationnellement en fonction de a_1, a_2, ..., a_ν.

Ainsi, la fonction $\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ sera mise sous la forme d'une série procédant suivant les puissances entières et positives de a_1, a_2, ..., a_ν; elle sera donc une fonction entière par rapport à ces quantités.

La réciproque est évidente.

La démonstration s'étend visiblement au cas où

$$\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$$

est le quotient de deux transcendantes entières. Je pense

Digitized by Google

que le théorème est vrai pour toute fonction uniforme

$$\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_\nu).$$

et il serait démontré aisément, si la théorie des fonctions de plusieurs variables était suffisamment développée.

2. D'une façon plus générale, le théorème peut s'énoncer :

Si $\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ est une fonction symétrique et holomorphe dans le voisinage d'un système de valeurs $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., $x_\nu = \alpha_\nu$, elle sera une fonction $\Sigma(a_1, a_2, \ldots, a_\nu)$ aussi holomorphe dans le voisinage des valeurs correspondantes de $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ et inversement.

En s'appuyant sur ce théorème, on établira le théorème suivant qui est une extension aux fonctions transcendantes de celui de Galois et se démontre de la même façon :

Toute transcendante de x_1, x_2, ..., x_ν holomorphe dans le voisinage d'un système de valeurs $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., $x_\nu = \alpha_\nu$ et invariable pour les substitutions du groupe de Galois attaché à l'équation (1) *est holomorphe aussi de a_1, a_2, ..., a_ν dans le voisinage des valeurs correspondantes.*

D'une façon plus précise, elle est holomorphe dans le voisinage de valeurs correspondantes de $R_1, R_2, \ldots, R_\mu$, si ces lettres désignent les variables indépendantes dont $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ dépendent. Nous supposons, bien entendu, que $\mu < \nu$ pour que l'*affect* (d'après une expression de Kronecker) ne soit pas nul.

La réciproque est évidente.

Digitized by Google

[F8g]

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES CUBIQUES PLANES;

PAR M. R. BRICARD.

---

1. Je rappellerai tout d'abord les propriétés suivantes :

Étant donnée une cubique plane C, sans point double, les coordonnées d'un point variable m de cette cubique peuvent être exprimées en fonctions elliptiques d'un argument u. Cette représentation peut être faite de telle manière que la relation

$$\mu_1 + \mu_1 + \mu_3 = \text{période},$$

entre trois valeurs μ_1, μ_2, μ_3, de l'argument exprime que les trois points correspondants m_1, m_2, m_3 sont en ligne droite.

Deux points de C, m et m', dont les arguments μ et μ' diffèrent d'une demi-période, sont dits en *correspondance steinérienne*. Comme il y a trois demi-périodes distinctes,

$$\omega_1, \qquad \omega_2, \qquad \omega_3 = -\omega_1 - \omega_2,$$

la correspondance steinérienne peut être établie de trois manières différentes. Pour fixer les idées, je considérerai dans ce qui suit celle que l'on obtient en choisissant la demi-période ω_1. (Il va sans dire que les deux autres jouissent des mêmes propriétés.)

Les tangentes à C, *aux deux points m et m', vont concourir en un point de cette courbe.*

La démonstration de ce fait est immédiate : soient p et p' les points où les tangentes à C en m et m', respectivement, vont de nouveau rencontrer la courbe, ϖ et ϖ' leurs arguments. On a

$$\varpi + 2\mu = 0, \qquad \varpi' + 2(\mu + \omega_1) = 0,$$

d'où

$$\varpi = \varpi' + 2\omega_1,$$

ce qui montre bien que les points p et p' coïncident.

2. Ayant rappelé ces faits classiques, je me propose d'établir la proposition suivante :

Soient a et a', m et m', deux couples de points en correspondance steinérienne sur C, *le premier fixe, l'autre mobile. On peut, de trois manières, trouver deux points fixes, p et q tels que les six points a, a', m, m', p, q soient constamment sur une conique.*

Soient α, $\alpha + \omega_1$, μ, $\mu' = \mu + \omega_1$ les arguments respectifs des points a, a', m, m'. Considérons sur C les points n et n' (en correspondance steinérienne) dont les arguments sont respectivement

$$\nu = -\alpha - \mu - \frac{\omega_1}{2}, \qquad \nu' = \nu + \omega_1 = -\alpha - \mu + \frac{\omega_1}{2}.$$

La somme des arguments des points a, a', m, m', n, n' étant égale à $2\omega_1$, il en résulte que ces six points appartiennent à une conique Γ.

Je dis en outre que, *par un point de* C *autre que a ou a', passe une seule conique* Γ. Il suffit, pour le faire voir, de montrer que les quatre points m, m', n, n' sont *en involution* sur C, c'est-à-dire jouent tous le même rôle sur cette courbe. Le fait est évident, si l'on écrit ainsi qu'il suit les relations qui existent entre les argu-

Digitized by Google

ments de ces points :

$$\mu' = \mu + \omega_1,$$
$$\nu' = \nu + \omega_1,$$
$$(\mu + \mu') + (\nu + \nu') = -2\alpha - \omega_1 + \text{période}.$$

Les coniques Γ, qui passent déjà par deux points fixes a et a', sont ainsi telles que par un point de C il ne passe qu'une seule de ces coniques. Ces coniques appartiennent donc à un *faisceau linéaire,* c'est-à-dire qu'elles passent par deux points fixes p et q, en plus des points a et a' C. Q. F. D.

3. Si les points n et n' ont des arguments définis par l'un des systèmes de formules,

$$\nu = -\alpha - \mu - \frac{\omega_1}{2} + \omega_2, \qquad \nu' = \nu + \omega_1,$$
$$\nu = -\alpha - \mu - \frac{\omega_1}{2} + \omega_3, \qquad \nu' = \nu + \omega_1,$$

on peut répéter sans modifications le raisonnement qui précède, et l'on met en évidence les deux autres faisceaux de coniques dont l'existence avait été avancée.

4. On sait que le lieu des foyers des coniques faisant partie d'un faisceau tangentiel est une cubique *focale,* c'est-à-dire passant par les points cycliques et telle que ces points soient en correspondance steinérienne sur la cubique. Les deux foyers réels de l'une quelconque des coniques du faisceau (et aussi les deux foyers imaginaires) sont aussi en correspondance steinérienne sur la courbe. On conclut donc du théorème démontré plus haut l'énoncé suivant :

Si f, f' sont les foyers de l'une quelconque des coniques d'un faisceau tangentiel, on peut trouver de

Digitized by Google

trois manières différentes deux points fixes p et q, tels que les quatre points p, q, f, f' soient constamment sur un cercle.

Ce dernier théorème a été énoncé dans ce Journal par E. Duporcq, sous forme de la question 1946 (1902, p. 575). L'auteur n'y signalait toutefois que l'existence de deux des couples des points p et q.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1903). SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. A. VACQUANT,
Professeur au lycée de Nancy.

On considère une droite fixe A *et deux droites fixes* B *et* B' *qui rencontrent* A *mais qui ne sont pas situées dans un même plan.*

On sait que si l'on considère une surface du second ordre S *qui passe par les trois droites* A, B *et* B', *son centre* C *est situé dans le plan* P *parallèle aux droites* B *et* B' *et équidistant de ces deux droites.*

1° *Lorsque le centre* C *décrit une droite dans le plan* P, *la surface* S *passe par une quatrième droite fixe s'appuyant sur* B *et* B';

2° *Lorsque le point* C *décrit, dans le plan* P, *une courbe* (Γ) *de classe* m, *la surface* S *enveloppe une surface réglée* Σ *d'ordre* $2m$ *et, par chacune des trois droites* A, B *et* B', *il passe* m *nappes de cette surface* Σ.

Montrer que la surface Σ *peut être considérée comme engendrée par une droite qui se meut en s'appuyant sur les deux droites* B *et* B' *et en restant tangente à un*

cylindre de classe m dont les génératrices sont parallèles à A. Trouver l'équation de ce cylindre;

3° *Dans le cas particulier où la courbe (Γ) est une conique, la surface Σ est du quatrième ordre et admet la droite A comme droite double.*

Tout plan passant par A coupe alors cette surface, en dehors de A, suivant une conique; trouver le lieu du centre de cette conique.

Que deviennent les résultats précédents, lorsque la conique (Γ) est tangente soit au plan déterminé par les droites A et B, soit au plan déterminé par A et B′, soit à ces deux plans à la fois?

Nota. — *Les candidats devront traiter le problème par la Géométrie analytique : il leur sera tenu compte des remarques géométriques.*

I. — Solution analytique.

La droite A sera prise pour axe des z; l'origine des coordonnées sera le milieu O du segment $B_1 B'_1 = 2c$ déterminé sur A par les droites B et B′; les axes Ox, Oy seront les parallèles aux droites B, B′ menées par O, de sorte que les équations des droites A, B, B′ seront

$$(A) \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}$$

$$(B) \qquad \begin{cases} y = 0, \\ z = c; \end{cases}$$

$$(B') \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y = -c. \end{cases}$$

L'équation d'une quadrique passant par Oz est

$$Ax^2 + A'y^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y = 0.$$

Pour que cette quadrique passe par les droites B et B′,

Digitized by Google

il faut

$$A = 0, \quad B'c + C = 0; \quad A' = 0, \quad -Bc + C' = 0.$$

L'équation d'une quadrique S passant par les droites A, B, B' est donc :

$$Byz + B'zx + B''xy - B'cx + Bcy = 0.$$

Le centre C d'une telle quadrique est défini par les équations :

$$\begin{aligned} B'z + B''y - B'c &= 0,\\ Bz + B''x + Bc &= 0,\\ By + B'x &= 0. \end{aligned}$$

En multipliant les deux membres de ces équations respectivement par B, B', — B'' et ajoutant, on obtient :

$$2BB'z = 0$$

ou

$$z = 0,$$

en supposant $BB' \neq 0$; ce qui prouve que le centre C de S est dans le plan xOy ou P parallèle aux droites B, B' et équidistant de ces droites. Les coordonnées x, y de C se déduisent des équations :

$$\begin{aligned} By + B'x &= 0,\\ B''(By - B'x) - 2BB'c &= 0, \end{aligned}$$

ou, en supposant $B'' \neq 0$,

$$\begin{aligned} By + B'x &= 0,\\ By - B'x &= \frac{2BB'}{B''}c. \end{aligned}$$

On en déduit, par addition et soustraction,

$$\begin{aligned} x &= -\frac{B}{B''}c,\\ y &= \frac{B'}{B''}c. \end{aligned}$$

Digitized by Google

L'hypothèse $BB'B'' \neq 0$ signifie que S n'est pas un paraboloïde; dans le cas du paraboloïde, C serait à l'infini; on peut supposer $BB'B'' \neq 0$.

En désignant par α et β les coordonnées du point C dans le plan xOy, on a

$$B = -\frac{B''\alpha}{c}, \qquad B' = \frac{B''\beta}{c};$$

par suite l'équation de S devient, en y remplaçant B, B' par les valeurs précédentes, supprimant le facteur B'' et changeant les signes :

$$(S) \qquad \alpha yz - \beta zx - cxy + c\beta x + c\alpha y = 0.$$

1° Si le point C décrit dans le plan xOy une droite D ayant pour équation

$$(D) \qquad u_0 x + v_0 y + 1 = 0,$$

on aura :

$$u_0 \alpha + v_0 \beta + 1 = 0.$$

L'équation de S peut s'écrire

$$\alpha y(z + c) + \beta x(c - z) + (u_0 \alpha + v_0 \beta) cxy = 0,$$

ou

$$\alpha y(z + c + cu_0 x) + \beta x(c - z + cv_0 y) = 0.$$

On voit, sur cette équation, que la surface S passe par une quatrième droite fixe A' représentée par les équations

$$(A') \qquad \begin{cases} z + c + cu_0 x = 0, \\ c - z + cv_0 y = 0, \end{cases}$$

et s'appuyant sur B et B'.

Le plan projetant la droite A' sur le plan xOy parallèlement à Oz a pour équation

$$(D') \qquad u_0 x + v_0 y + 2 = 0.$$

Digitized by Google

Sa trace, sur le plan xOy, est une droite D′ homothétique de D, le centre d'homothétie étant O, et le rapport d'homothétie de D′ à D étant 2. Ainsi la droite A′ s'obtiendra en joignant les points d'intersection H, H′ du plan (D′) avec les droites B et B′.

2° Supposons que le point C décrive dans le plan xOy une courbe (Γ), de classe m, ayant pour équation en coordonnées tangentielles et homogènes

$$(\Gamma) \qquad \varphi(u, v, w) = 0,$$

de degré m. Désignons par $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ l'équation de (Γ) en coordonnées ponctuelles homogènes. Pour trouver l'enveloppe de la surface S, il faut éliminer α, β, γ entre les équations :

$$(S) \qquad \alpha y(z+c) + \beta x(c-z) - \gamma cxy = 0,$$

$$(1) \qquad \frac{y(z+c)}{f'_\alpha} = \frac{x(c-z)}{f'_\beta} = \frac{-cxy}{f'_\gamma}.$$

Les deux dernières équations représentent une droite s'appuyant sur les droites B, B′; l'enveloppe est donc une surface réglée Σ engendrée par cette droite; cela était à prévoir, car deux surfaces S ayant 3 droites communes A, B, B′ en ont une quatrième s'appuyant, comme A, sur B et B′.

Or si l'on pose

$$u = y(z+c), \qquad v = x(c-z), \qquad w = -cxy,$$

pour trouver l'équation de Σ, on doit éliminer α, β, γ entre les équations :

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0,$$

$$\frac{u}{f'_\alpha} = \frac{v}{f'_\beta} = \frac{w}{f'_\gamma},$$

et le résultat de l'élimination sera l'équation tangentielle

Digitized by Google

de la courbe (Γ), savoir

$$\varphi(u, v, w) = 0.$$

Donc l'équation ponctuelle de Σ sera

$$(\Sigma) \qquad \varphi[y(z+c),\ x(c-z),\ -cxy] = 0,$$

c'est-à-dire une surface d'ordre $2m$, passant par chacune des droites A, B, B′. Si l'on coupe Σ par un plan $z = h$ on obtient une courbe qui se projette en vraie grandeur sur le plan xOy parallèlement à Oz; cette projection a pour équation

$$\varphi[y(h+c),\ x(x-h),\ -cxy] = 0,$$

de degré $2m$; les termes de moindre degré étant de degré m, le point de rencontre de A et du plan $z = h$ est un point multiple d'ordre m de la section; donc par la droite A, il passe m nappes de la surface Σ. On voit de même que par chacune des droites B, B′ il passe m nappes de Σ.

L'équation $\varphi(u, v, w) = 0$ étant homogène, on voit que l'équation (Σ) peut s'écrire

$$\varphi\left(\frac{z+c}{-cx}, \frac{c-z}{-cy}, 1\right) = 0,$$

ou

$$\varphi(\lambda, \mu, 1) = 0,$$

en posant

$$\frac{z+c}{-cx} = \lambda, \qquad \frac{c-z}{-cy} = \mu,$$

c'est-à-dire

$$(\Delta) \qquad \begin{cases} z + c + \lambda c y = 0, \\ z - c - \mu c y = 0. \end{cases}$$

Ces équations représentent une droite Δ s'appuyant sur B et B′. La surface Σ est engendrée par cette droite Δ. La projection δ' de Δ sur xOy a pour équation

$$(\delta') \qquad \lambda x + \mu y + 2 = 0.$$

Digitized by Google

Ses coordonnées sont

$$u' = \lambda, \qquad v' = \mu, \qquad w' = 2.$$

On en déduit

$$\lambda = \frac{2u'}{w'}, \qquad \mu = \frac{2v'}{w'}.$$

Donc la droite δ' enveloppe une courbe ayant pour équation tangentielle

$$\varphi\left(\frac{2u'}{w'}, \frac{2v'}{w'}, 1\right) = 0,$$

ou

$$(\Gamma') \qquad \varphi(2u', 2v', w') = 0,$$

ce qui montre que la droite Δ, génératrice de Σ, reste tangente à un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Oz ou A et dont la base, dans le plan xOy, a pour équation tangentielle (Γ'), de degré m; ce cylindre est donc de classe m. L'équation ponctuelle de ce cylindre est la même que l'équation ponctuelle de la courbe (Γ'); or les courbes (Γ) et (Γ') sont homothétiques par rapport au point O, le rapport d'homothétie de (Γ') à (Γ) étant 2. Si

$$f(\alpha, \beta) = 0$$

est l'équation ponctuelle de (Γ) en coordonnées non homogènes, celle du cylindre (Γ') sera

$$f\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = 0.$$

3° Si la courbe (Γ) est une conique ayant pour équation tangentielle

$$\varphi(u, v, w) = au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv = 0,$$

la surface Σ est du quatrième ordre et a pour équation

Digitized by Google

ponctuelle :

$$(\Sigma_1)\left\{\begin{array}{l} ay^2(c+z)^2+a'x^2(c-z)^2 \\ \quad +a''c^2x^2y^2-2bcx^2y(c-z) \\ \quad -2b'cxy^2(c+z)+2b''xy(c-z)(c+z)=0. \end{array}\right.$$

Cette surface Σ_1 admet les droites A, B, B' comme droites doubles et un plan ϖ

$$y-mx=0,$$

passant par Oz coupe Σ_1, en dehors de A, suivant une conique (C_1) intersection du plan ϖ et du cylindre

$$\begin{array}{l} am^2(c+z)^2+a'(c-z)^2 \\ \quad +a''c^2m^2x^2-2bcmx(c-z) \\ \quad -2b'cm^2x(c+z)+2b''m(c-z)(c+z)=0. \end{array}$$

Les équations du centre de cette conique sont

$$y-mx=0,$$
$$a''c^2m^2x-bcm(c-z)-bc'b'cm^2(c+z)=0,$$
$$am^2(c+z)-a'(c-z)+bcmx-b'cm^2x-2b''mz=0,$$

ou

$$(2)\left\{\begin{array}{r} y=mx, \\ a''cmx+(b-b'm)z=c(b+b'm), \\ cm(b-b'm)x+(am^2-2b''m+a')z=c(a'-am^2). \end{array}\right.$$

Ces équations permettent d'exprimer les coordonnées x, y, z d'un point du lieu en fonction du paramètre m; en résolvant les deux dernières par rapport à x et z, on obtient :

$$x=\frac{c[(b+b'm)(am^2-2b''m+a')-(b-b'm)(a'-am^2)]}{cm[a''(am^2-2b''m+a')-(b-b'm)^2]},$$

ou

$$x=\frac{b(2am^2-2b''m)+b'm(-2b''m+2a')}{m[a''(am^2-2b''m+a')-(b-b'm)^2]},$$

$$z=\frac{c^2m[a''(a'-am^2)-(b^2-b'^2m^2)]}{cm[a''(am^2-2b''m+a')-(b-b'm)^2]}.$$

Digitized by Google

Si l'on désigne par A, A', A'', B, B', B'' les coefficients de a, a', a'', b, b', b'' dans le développement du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire si l'on pose

$$A = a'a'' - b^2, \qquad A' = aa'' - b'^2, \qquad A'' = aa' - b''^2$$
$$B = b'b'' - ab, \qquad B' = bb'' - a'b', \qquad B'' = bb' - a''b'',$$

les équations du lieu s'écrivent :

$$(\sigma) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{-2Bm - 2B'}{A'm^2 + 2B''m + A}, \\ z &= \frac{c(A - A'm^2)}{A'm^2 + 2B''m + A}, \\ y &= mx. \end{aligned} \right.$$

Ces équations représentent une conique (σ) dont la projection sur le plan xOy, parallèlement à Oz, a pour équation

$$(\sigma_1) \qquad A'y^2 + 2B''xy + Ax^2 + 2By + 2B'x = 0.$$

Or l'équation ponctuelle de (Γ) est

$$Ax^2 + A'y^2 + A'' + 2By + 2B'x + 2B''xy = 0.$$

La conique (σ_1) est donc homothétique et concentrique à la conique (Γ).

Pour $m = 0$, on a

$$y = 0, \qquad x = -\frac{2B'}{A}, \qquad z = c,$$

c'est-à-dire un point H_1 de la droite B se projetant sur xOy au deuxième point de rencontre h_1 de la conique (σ_1) avec Ox; de même (σ) rencontre la droite B' au point H'_1 se projetant sur xOy au deuxième



point de rencontre h'_1 de (σ_1) avec Oy. Pour $m = -\frac{B'}{B}$ on a

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{c(AB^2 - A'B'^2)}{A'B'^2 - 2BB'B'' + AB^2},$$

c'est-à-dire un point A_1 de la droite A. Le plan de la conique (σ) est défini par ces trois points H_1, H'_1 et A_1.

Si la conique (Γ) est tangente au plan (A, B) ou $y = 0$, elle est tangente à la droite $y = 0$ et l'on doit avoir $a' = 0$. Si la conique Γ est tangente au plan (A, B') ou $x = 0$, on aura

$$a = 0.$$

La surface Σ_1 se décompose, suivant l'un ou l'autre cas, dans

$$y = 0 \qquad [\text{plan}(A, B)]$$

et une surface du troisième ordre

$$(\Sigma_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} ay(c+z)^2 + a''c^2x^2y - 2bcx^2(c-z) \\ \quad - 2b'cxy(c+z) + 2b''x(c-z)(c+z) = 0, \end{array} \right.$$

ou dans

$$x = 0 \qquad [\text{plan}(A, B')]$$

et une surface du troisième ordre

$$(\Sigma_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a'x(c-z)^2 + a''c^2xy^2 - 2bcxy(c-z) \\ \quad - 2b'cy^2(c+z) + 2b''y(c-z)(c+z) = 0. \end{array} \right.$$

Tout plan passant par A,

$$y - mx = 0,$$

coupe Σ_2 ou Σ_3 suivant une conique dont le lieu des centres est encore une conique (σ).

Si la conique (Γ) est tangente à la fois aux plans (A, B) et (A, B') on a en même temps

$$a' = 0, \qquad a = 0.$$

Digitized by Google

La surface Σ_1 se décompose dans ces deux plans $y=0$ et $x=0$, et une quadrique

$$(\Sigma_4)\quad \begin{cases} a''c^2xy - 2bcx(c-z) - 2b'cy(c+z) \\ \qquad\qquad + 2b''(c-z)(c+z) = 0. \end{cases}$$

Tout plan $y - mx = 0$ passant par la droite A coupe Σ_4 suivant une conique, car A n'est pas situé sur Σ_4, et le lieu des centres de cette conique est encore une conique (σ). Dans ce cas, on peut ajouter que le plan de (σ) est le plan diamétral conjugué de la direction A dans la quadrique Σ_4. Les droites B et B' appartiennent à cette quadrique. Le point A_1 se confond avec O.

II. — Considérations géométriques.

On peut établir par la géométrie presque tous les résultats demandés.

1° Soit D la droite décrite par les centres des quadriques S, et D' l'homothétique de D, par rapport à O, le rapport d'homothétie de D' à D étant 2. La quadrique S admettant pour centre un point C de D passe par la droite A_1 symétrique de A par rapport à C; le plan (A_1, D') coupe S suivant une deuxième droite A' qui est fixe quand C varie, car le plan (A_1, D') qui passe par D' et qui est parallèle à A est fixe, et la droite A' passe par les points de rencontre H et H' de ce plan avec les droites B et B'.

2° Considérons la tangente δ en un point C de la courbe (Γ); quand C décrit δ, les surfaces S passent (1°) par une quatrième droite fixe Δ dont la projection sur xOy parallèlement à A est une droite δ' homothétique de δ par rapport à O, le rapport d'homothétie de δ' à δ étant 2; la droite δ' est tangente à la courbe (Γ') ho-

Digitized by Google

mothétique de (Γ) au point C' homologue de C. Quand le point C varie très peu sur Γ et vient en C_1, la droite Δ varie très peu; les deux surfaces voisines S et S_1 ont deux génératrices voisines Δ et Δ_1 qui se confondent quand C_1 vient en C; or, les deux quadriques S et S_1 passant par les droites fixes A, B, B' ont comme intersection variable une quatrième droite dont la position limite est Δ quand S et S_1 se confondent; donc l'enveloppe Σ des surfaces S est engendrée par la droite Δ rencontrant B et B', et se projetant sur le plan P parallèlement à A suivant une tangente δ' à la courbe (Γ'), c'est-à-dire par la droite Δ rencontrant B, B' et restant tangente au cylindre dont les génératrices sont parallèles à A et qui a pour base la courbe (Γ') du plan xOy ou P. Les courbes (Γ) et (Γ') étant homothétiques sont de même classe m; par suite, le cylindre (Γ') est aussi de classe m. De ce mode de génération de Σ, il résulte aisément que la section de Σ par un plan passant par A se compose de cette droite A comptée m fois et d'une courbe de degré m, ce qui montre que Σ est d'ordre $2m$. Le raisonnement est analogue à celui que nous allons indiquer dans le cas particulier $m = 2$.

3° Dans le cas particulier où la courbe (Γ) est une conique ($m = 2$), la surface Σ est une surface du quatrième ordre Σ_1, car tout plan ϖ passant par Oz ou A la coupe en suivant une conique (γ) et la droite Oz qui doit être comptée comme double; en effet, un plan tangent δ' au cylindre (Γ') coupe le plan ϖ suivant une droite $z_1 z'_1$ parallèle à Oz, et sur cette droite il y a deux points de la section et pas davantage, car par $z_1 z'_1$ on peut mener deux plans tangents au cylindre (Γ') et dans chacun d'eux il y a une droite Δ. La droite Δ se confond avec zz' quand le plan tangent δ' passe par Oz, ce qui arrive deux fois; donc Oz est une droite double

Digitized by Google

de Σ_1. Par un point H de la droite B, il passe deux génératrices Δ; de même par un point H' de B'; donc B et B' sont aussi des droites doubles de Σ_1.

La trace OM du plan ϖ sur xOy coupe (Γ') en m_1 et m_2 et $z_1 z'_1$ en m; quand le point m en décrivant OM vient en m_1 ou m_2, les droites $z_1 z'_1$ sont des tangentes parallèles à la conique (γ) aux points M_1 et M_2; le centre ω de cette conique est le milieu du segment $M_1 M_2$; donc le lieu de ω se projette sur xOy suivant le lieu du milieu ω_1 de $m_1 m_2$. Soit O' le centre de (Γ'). Les droites $O\omega_1$ et $O'\omega_1$ étant parallèles à deux diamètres conjugués de la conique (Γ') engendrent deux faisceaux homographiques et le lieu de ω_1 est une conique (σ_1) passant par O et O'; les tangentes en ces points sont parallèles à la direction conjuguée de OO' dans la conique (Γ'); par suite le centre de (σ_1) est le milieu O_1 de OO', c'est-à-dire le centre de (Γ). Les deux coniques (σ_1) et (Γ') sont homothétiques, car elles ont, en direction, les mêmes systèmes de diamètres conjugués $O\omega_1$, $O'\omega_1$. Donc la conique (σ_1) est concentrique et homothétique à la conique (Γ). Sur toute génératrice du cylindre (σ_1), projetant la courbe, lieu de ω, il n'y a qu'un point de ce lieu qui est par suite une conique (σ) rencontrant les droites B, B' aux points H_1, H'_1 dont les projections sont les deuxièmes points de rencontre h_1, h'_1 de (σ_1) avec Ox, Oy; en effet, quand le plan ϖ coïncide avec zOx, la conique (γ) devient la droite double B admettant pour centres tous ses points; et l'on peut dire, par continuité, que le point ω vient en H_1, comme on l'a vu analytiquement. De même la conique (σ) passe par H'_1.

Si la conique (Γ) est tangente au plan (A, B) et, par suite, à Ox, il en est de même de (Γ'). Par un point H de la droite B, on peut mener deux plans tangents au

Digitized by Google

cylindre (Γ'), mais l'un d'eux est toujours le plan zOx qui contient la droite Δ correspondante; l'autre plan tangent contient la deuxième droite Δ qui engendre une surface Σ_2 du troisième ordre admettant B′ comme droite double, A et B comme droites simples. Dans ce cas la surface du quatrième ordre Σ_1 se décompose donc dans le plan (A, B) et la surface du troisième ordre Σ_2.

De même si (Γ) est tangente à Oy, la surface du quatrième ordre Σ_1 se décompose dans le plan (A, B′) et une surface du troisième ordre Σ_3 admettant B comme droite double, A et B′ comme droites simples.

Enfin si (Γ) est tangente à la fois à Ox et Oy, la surface Σ_1 se décompose dans les plans (A, B), (A, B′) et une quadrique Σ_4 passant par les droites B, B′, mais ne passant pas par A. Dans ce cas la génératrice Δ de Σ_4 est une tangente au cylindre (Γ') s'appuyant sur les tangentes B et B′ à ce cylindre.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Nancy.

Epreuve écrite. — I. *Étant donné dans un plan* xOy *un contour fermé* (C) *et l'intégrale curviligne*

$$J = \int P\,dx + Q\,dy,$$

étant prise le long du contour C, *établir la formule de Green qui exprime* J *à l'aide d'une intégrale double.*

Condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale J *prise suivant un chemin allant du point* M_0 *au point* M *ne change pas quand on fait varier le chemin en laissant fixes les deux points* M_0 *et* M.

II. *En coordonnées rectangulaires* $Oxyz$, *former l'équa-*

Digitized by Google

tion aux dérivées partielles des surfaces représentées par l'équation

$$z - a\theta = f(r),$$

où a est une constante, f une fonction arbitraire de r, et où l'on pose

$$\theta = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}, \qquad r = \sqrt{x^2 + x^2}.$$

Intégrer le système

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{a}.$$

III. *En coordonnées rectangulaires, on prend sur le paraboloïde représenté par l'équation*

$$z = xy$$

la courbe (C) *dont la projection sur le plan des* xy *est un cercle de rayon* R *ayant son centre à l'origine; on mène le plan tangent au paraboloïde en un point* M *situé sur la courbe* (C).

Lorsque le point M *varie sur cette courbe, montrer que le plan tangent fait un angle constant avec* Oz, *trouver l'enveloppe de sa trace sur le plan* xOy, *trouver l'arête de rebroussement de la surface développable qu'il enveloppe, et les développantes de cette arête de rebroussement.*

(Juillet 1903.)

Montpellier.

Épreuve écrite. — *La normale au point* M *d'une surface coupant le plan* XOY *au point* P, *on considère les surfaces* S *telles que* MP = OP.

1° *Former l'équation aux dérivées partielles de ces surfaces;*

2° *Intégrer cette équation et former l'équation générale des surfaces* S;

3° *Déterminer celle de ces surfaces qui passe par la parabole*

$$x = 2a, \qquad z^2 = 2by;$$

4° *Déterminer les lignes de courbure de cette dernière surface.*

Digitized by Google

Épreuve pratique. — *On considère la courbe définie en coordonnées rectangulaires par les formules*

$$x = 3t, \qquad y = 3t^2, \qquad z = 2t^3,$$

où t est un paramètre variable.

Exprimer en fonction de t l'arc de la courbe, le rayon de courbure, le rayon de torsion.

Montrer que la courbe peut être considérée comme une hélice tracée sur un certain cylindre.

(Novembre 1903.)

Marseille.

Épreuve écrite. — *L'arête de rebroussement de toute surface développable circonscrite à une sphère est une ligne géodésique d'un cône concentrique à la sphère. C'est aussi la courbe que peut envelopper sur le cône une droite tangente à la fois au cône et à la sphère concentriques.*

Pour démontrer ces théorèmes on peut répondre aux questions suivantes :

1° *Déterminer par un coefficient angulaire m' la position limite de l'intersection du plan tangent à l'origine et du plan tangent voisin en un point satisfaisant à la relation $y = mx$, la surface étant représentée par un développement en série entière de la forme*

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \ldots.$$

2° *Traiter le cas où la surface est développable ;*

3° *L'arête de rebroussement d'une surface développable circonscrite à une sphère de rayon R est une courbe C dont les tangentes touchent la sphère ;*

4° *Si l'on prend l'origine des coordonnées rectangulaires au centre de la sphère, la courbe C satisfait à l'équation différentielle*

$$(y\,dz - z\,dy)^2 + (z\,dx - x\,dz)^2 + (x\,dy - y\,dx)^2 = R^2(dx^2 + dy^2 + dz^2);$$

5° *Une ligne géodésique d'un cône ayant son sommet à*

Digitized by Google

l'origine satisfait à la même équation différentielle, où R *a une valeur convenablement choisie;*

6° *Conclusion.*

SOLUTION.

La cinquième question offre seule de l'intérêt.

La normale principale d'une géodésique est perpendiculaire au plan tangent au cône, et par suite à la génératrice du point de contact. On a donc

$$\Sigma x\, d\left(\frac{dx}{ds}\right) = 0$$

ou

$$d\Sigma x \frac{dx}{ds} = ds.$$

On tire de là

$$\Sigma x \frac{dx}{ds} \frac{d}{ds} \Sigma x \frac{dx}{ds} = \Sigma x \frac{dx}{ds},$$

d'où, en appelant R^2 une constante,

$$(\Sigma x\, dx)^2 = (\Sigma x^2 - R^2)\, ds^2$$

et par suite

$$\Sigma (y\, dz - r\, dy)^2 = R^2 \Sigma\, dx^2.$$

On peut aussi montrer géométriquement que l'arête de rebroussement d'une développable circonscrite à une sphère est une géodésique du cône concentrique (*voir* SALMON, *Géométrie à trois dimensions, familles de surfaces*, n° 450).

Une autre démonstration géométrique repose sur ce fait que la parallèle à la normale principale de l'arête de rebroussement, menée par le point où la génératrice de la développable touche la sphère, est dans le plan tangent à la sphère.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y - z,$$

$$\frac{dy}{dt} = x + 2y - z,$$

$$\frac{dz}{dt} = 3x - 3y - z.$$

(Novembre 1903.)

Digitized by Google

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Établir les propriétés générales des fonctions méromorphes doublement périodiques qui se rapportent à leurs zéros et à leurs pôles. Conséquences immédiates de ces propriétés.*

2° *Soient* MN *et* MT *la normale et la tangente en un point* M *d'une courbe plane, limitées à l'axe* Ox. *Déterminer toutes les courbes* C *pour lesquelles on a*

$$\text{ON} \times \text{OT} = k^2,$$

k désignant une constante.

Chercher les trajectoires orthogonales Γ *des courbes obtenues.*

En un point de coordonnées positives x_0, y_0 *passent une branche de courbe* C *et une branche de courbe* Γ *qui limitent une aire plane; calculer cette aire en fonction de* x_0 *et* y_0.

SOLUTION.

L'équation du problème est

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right)(x + yy') = k^2.$$

Si l'on prend comme nouvelle fonction $u = x^2 + y^2 + k^2$, x restant la variable, cette équation devient

$$2uu' = (u'^2 + 4k^2)x;$$

elle rentre dans le type de Lagrange. Par différentiation, on obtient

$$\frac{du'}{dx} = \frac{u'}{x}.$$

Les courbes C ont pour équation :

$$x^2 + y^2 + k^2 = ax^2 + \frac{k^2}{a} \qquad (a \text{ const. arbitraire}).$$

Les courbes Γ coïncident avec les courbes C. Par un point du plan (x_0, y_0) passent deux courbes de la famille limitant une boucle dont l'aire est aisée à calculer.

(Juillet 1903.)

Digitized by Google

Épreuve écrite. — 1° *Les fonctions* φ, ψ *étant supposées continues et dérivables par rapport aux deux variables* x, y, *sous quelles conditions l'intégrale*

$$\int(\varphi + i\psi)(dx + i\,dy),$$

prise le long d'un contour fermé, sera-t-elle indépendante de ce contour?

2° *Lorsque cela aura lieu, quelle sera la propriété correspondante de la variable complexe* $\varphi + i\psi$ *considérée comme fonction de la variable* $x + iy$?

3° *Quelle sera la propriété correspondante du système de coordonnées curvilignes défini par les deux équations*

$$\varphi(x,y) = \text{const.}, \qquad \psi(x,y) = \text{const.?}$$

4° *Quelle sera la propriété correspondante de la transformation géométrique définie par les deux équations*

$$X = \varphi(x,y), \qquad Y = \psi(x,y)?$$

5° *Une courbe plane étant définie par les deux équations*

$$x \sin\alpha - y\cos\alpha = f(\alpha),$$
$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = f(\alpha),$$

déterminer la fonction $f(\alpha)$ *de telle sorte que le rayon de courbure* $\frac{ds}{d\alpha}$ *soit inversement proportionnel au rayon vecteur* $\sqrt{x^2+y^2}$.

Solution.

L'équation du problème est

$$(f''+f)\sqrt{f^2+f'^2} = k.$$

Elle admet comme intégrale première

$$(f^2+f'^2)^{\frac{3}{2}} = 3kf + a \qquad (a \text{ const. arbitraire} .$$

Une quadrature donne α en fonction de f

$$\alpha = \int\frac{df}{\sqrt{(3kf+a)^{\frac{2}{3}} - f^2}},$$

Digitized by Google

en posant $3kf + a = u^3$, on obtient

$$\alpha = \int \frac{3u^2\,du}{\sqrt{(u^3 + 3ku - a)(-u^3 + 3ku - a)}},$$

quadrature hyperelliptique. Pour la discussion de la forme des courbes correspondantes parmi lesquelles figure comme cas très particulier la lemniscate, consulter : TISSERAND et PAINLEVÉ, *Exercices d'Analyse*, p. 327. (Novembre 1903.)

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE.

Marseille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Description sommaire de la lunette méridienne. Formules employées pour corriger une observation de passage en supposant imparfait le réglage de la lunette méridienne.*

Établir ces formules et indiquer comment on calcule les constantes qui y figurent.

ÉPREUVE PRATIQUE.— *Calculer le volume du tétraèdre* OABC *connaissant les longueurs* (a, b, c) *des arêtes qui aboutissent au sommet* O, *ainsi que les angles* (α, β, γ) *que forment deux à deux ces arêtes.*

Données numériques :

$$\begin{aligned} a &= 421^{m},567, & \alpha &= 75^{\circ}.25'.38'',6, \\ b &= 657,643, & \beta &= 98.\ 9.25,7, \\ c &= 549,536, & \gamma &= 54.43.17,9. \end{aligned}$$

SOLUTION.

$$V = \frac{1}{3}abc\sqrt{\sin p \sin(p-\alpha)\sin(p-\beta)\sin(p-\gamma)} = \frac{1}{3}abc\Delta.$$

Digitized by Google

			Log.
$2p$.........	228°.18′.22″,2	$\sin p$.........	$\bar{1}$,9602117
p..........	114. 9.11,1	$\sin(p-\alpha)$...	$\bar{1}$,7962916
$p-\alpha$......	38.43.32,5	$\sin(p-\beta)$...	$\bar{1}$,4402308
$p-\beta$......	15.59.45,4	$\sin(p-\gamma)$...	$\bar{1}$,9350139
$p-\gamma$......	59.25.53,2.	Δ.......	$\bar{1}$,1317480

$\sqrt{\Delta}$............	$\bar{1}$,5658740
colog. 3......	$\bar{1}$,5228787
a............	2,6248666
b............	2,8179902
c............	2,7399961
V.......	7,2716056

$V = 18\,689\,840^{m^3}$.

(Novembre 1901.)

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étude du mouvement de la Lune sur la sphère céleste; détermination de l'époque du passage de la Lune par un nœud; rétrogradation de la ligne des nœuds; nutation de l'orbite lunaire; révolutions tropique, sidérale, synodique de la Lune; révolution tropique des nœuds.*

II. *Définition des inégalités séculaires, des inégalités périodiques et des inégalités à longue période; qu'entend-on par stabilité du système solaire?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *A Metz, dont la latitude est*

$$\varphi = 49°7'14'',$$

on a observé l'azimut et la hauteur d'une étoile

$$a = 224°38'10'', \qquad h = 46°9'20'',$$

l'heure sidérale au moment de l'observation étant

$$\theta = 22^h 56^m;$$

calculer l'ascension droite et la déclinaison de l'étoile.

(Novembre 1901.)


Digitized by Google

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1947.

(1902, p. 575.)

La condition nécessaire et suffisante pour que les points de contact des tangentes communes à deux coniques soient sur un même cercle est que leurs foyers soient sur un même cercle et y forment une division harmonique.

(E. Duporcq.)

SOLUTION

Par M. Thié.

Soient C et C′ les deux coniques données. On sait que les huit points de contact de leurs tangentes communes sont sur une même conique F, lieu des points tels que les tangentes issues de l'un d'entre eux, m, à C divisent harmoniquement l'angle formé par les tangentes issues du même point à C′.

Pour que F soit un cercle, il faut et il suffit que chacun des points cycliques I et I′ satisfasse à la condition énoncée pour le point m. Autrement dit, soient f et g les foyers réels de C, f' et g' ceux de C′ : chacun des faisceaux $I(fgf'g')$ et $I'(fgf'g')$ devra être harmonique, deux rayons conjugués étant, dans le premier faisceau, If et If', et dans le second, $I'f$ et $I'f'$.

On conclut immédiatement de là la propriété énoncée.

1948.

(1902, p. 575.)

Étant donnée une quadrique, trouver les surfaces :

1° *Telles que la droite qui joint chacun de leurs points au pôle du plan tangent s'appuie sur une droite fixe;*

2° *Telles que la même droite passe par un point fixe.*

(A. Pellet.)

SOLUTION

Par M. R. Bricard.

Résolvons d'abord la question suivante de Géométrie plane:

Étant donnée une conique C, *déterminer les courbes telles*

Digitized by Google

que la droite joignant chacun de leurs points au pôle de la tangente passe par un point fixe.

Soit o le point donné. On peut supposer, grâce à une transformation homographique convenable, que C est un cercle et que o est le centre de C.

Dans ces conditions, soient m un point de la courbe cherchée, mt la tangente en ce point, p son pôle par rapport à C. Les trois points o, p, m étant en ligne droite, il est nécessaire que om soit perpendiculaire à mt. Autrement dit, la normale en m à la courbe cherchée passe par le point fixe o, et *cette courbe est un cercle concentrique à* C.

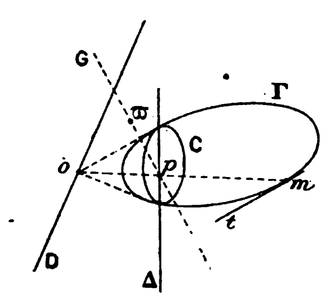
Revenant au cas général par une nouvelle transformation homographique, on voit que *les courbes cherchées sont des coniques bitangentes à* C, *et telles que la corde des contacts soit la polaire par rapport à* C *du point fixe donné.*

Cela posé, abordons les questions proposées.

1° Soient

(Q) la quadrique donnée;
D la droite donnée;
m un point de la surface cherchée (S);
(P) le plan tangent à (S) au point m.

Appelons Δ la droite conjuguée de D par rapport à (Q). Le plan $(m\Delta)$ coupe (Q) suivant une conique C et (S) suivant



une courbe Γ. Le plan (P) a pour trace sur le plan $(m\Delta)$ la tangente mt à C.

Soit ϖ le pôle du plan (P) par rapport à (Q); il se trouve sur la droite G, conjuguée de mt par rapport à la même quadrique; les droites G et D passent toutes deux par le pôle du

Digitized by Google

plan ($m\Delta$) et sont par suite dans un même plan, qui contient aussi le point m puisque, par hypothèse, $m\varpi$ rencontre D.

Il en résulte que si l'on appelle p la trace de G sur le plan ($m\Delta$), c'est-à-dire le pôle de mt par rapport à C et o la trace de D sur le même plan, la droite mp passe par le point o. Si donc on se reporte au lemme démontré précédemment, on reconnaît que *la courbe* Γ *est une conique bitangente à* (Q) *aux points d'intersection de cette surface et de* Δ.

Imaginons maintenant une série continue de coniques Γ satisfaisant à cette condition. *Elles engendreront une surface jouissant de la propriété énoncée, et cette génération est aussi générale que possible.*

On peut présenter autrement cette solution : considérons deux coniques Γ, infiniment voisines. Elles appartiennent à un même cône bitangent à (Q), aux points d'intersection de cette quadrique et de Δ, et ayant son sommet sur D. Ce cône est circonscrit à (S) suivant Γ. L'une quelconque des surfaces cherchées est donc *l'enveloppe d'un tel cône, variant suivant une loi continue quelconque.*

On verra sans peine que l'on peut encore énoncer le mode suivant de génération :

L'une quelconque des surfaces (S) *est l'enveloppe d'une quadrique circonscrite à* (Q), *variant de telle manière que le plan de la conique de contact tourne autour de la droite* Δ.

2° Supposons maintenant que la droite $m\varpi$ soit assujettie à passer constamment par le point o. Par un raisonnement tout semblable au précédent, on voit que tout plan passant par le point o doit couper (Q) suivant une conique Γ bitangente, à cette quadrique, et telle que les tangentes à Γ aux deux points de contact aillent concourir au point o. On en conclut immédiatement la réponse suivante à la question posée :

Les surfaces cherchées sont les quadriques circonscrites à (Q) *suivant la conique intersection de* (Q) *et du plan polaire du point o par rapport à cette quadrique.*

Remarque. — Les surfaces qui répondent aux questions 1° et 2° sont respectivement les *surfaces de révolution* et les *sphères* de la *Géométrie cayleyenne.* On sait que, dans cette

Digitized by Google

Géométrie, on cherche à généraliser les propositions de la Géométrie ordinaire en remplaçant le *cercle de l'infini* ou *ombilicale* par une quadrique quelconque (Q). Dans la Géométrie cayleyenne, les sphères sont les quadriques circonscrites à (Q), deux droites sont dites *perpendiculaires* quand elles sont conjuguées par rapport à (Q), etc.

Les théorèmes de M. Pellet étendent à la Géométrie cayleyenne les théorèmes suivants de la Géométrie ordinaire :

Les surfaces dont les normales rencontrent une droite fixe sont les surfaces de révolution.

Les surfaces dont les normales passent par un point fixe sont les sphères.

On pourra consulter, pour une étude approfondie de la Géométrie cayleyenne, et en particulier pour l'extension à cette Géométrie des notions de *distance, d'angle, de lignes de courbure, de lignes géodésiques, etc.*, la *Théorie des surfaces* de M. Darboux (T. III, Livre VII, Chap. XIV).

1972.

(1903, p. 240.)

Déterminer α *et* h *de façon que les intégrales*

$$u = \int \frac{(\alpha x + h)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-4)(x-9)}},$$

$$v = \int \frac{(\alpha x - 5h)\,dx}{\sqrt{x^4 + 2x^2 - 4x + 1}}$$

soient pseudo-elliptiques et les calculer. (Dolbnia.)

SOLUTION

Par M. Dolbnia ([1]).

1° Admettons *a priori* que l'intégrale u satisfait à une rela-

([1]) Le problème, pour être complètement traité, exige des calculs assez compliqués, comme d'ailleurs toutes les questions relatives aux intégrales pseudo-elliptiques. Nous nous contenterons, pour cette raison, de résumer la solution de M. Dolbnia. Les résultats indiqués peuvent être vérifiés par différentiation.

La même remarque s'applique à la question 1973 (*voir* ci-après).

Digitized by Google

tion de la forme

$$(1) \qquad x^3 + ax^2 + bx + c = \lambda \sin(ui) \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

a, b, c, λ étant des coefficients constants que l'on cherchera à déterminer par identification. A cet effet, on différentiera la relation (1) en remplaçant $\frac{du}{dx}$ par

$$\frac{(\alpha x + h)}{\sqrt{x(x-1)(x-4)(x-9)}}.$$

On trouve

$$a = -14, \qquad b = 49, \qquad c = \lambda = -18,$$
$$\alpha = 3, \qquad h = -7,$$

et l'on a finalement

$$u = \int \frac{\left(x - \frac{7}{3}\right) dx}{\sqrt{x(x-1)(x-4)(x-9)}}$$
$$= \log\left[x^3 - 14x^2 + 49x - 18 + (x-7)\sqrt{x(x-1)(x-4)(x-9)}\right].$$

2° La même méthode appliquée à l'intégrale v conduit au résultat suivant :

$$\alpha = 5, \qquad 5h = 1,$$

$$v = \int \frac{(5x-1)\,dx}{\sqrt{x^4 + 2x^2 - 4x + 1}}$$
$$= \log\left[x^5 + x^4 + 3x^3 - x^2 - 2 + (x^3 + x^2 + 2x)\sqrt{x^4 + 2x^2 - 4x + 1}\right].$$

Autre réponse de M. NICOLAS KRYLOFF.

1973.

(1903, p. 240.)

Trouver dans quels cas les intégrales abéliennes

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^2 + 2ax + b)(x^2 + 2rx + s)^2}},$$

$$v = \int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^4 (x-b)^2 (x^2 + cx + e)^3}},$$

$$w = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)(x-b)^3 (x-c)^2 x^2}}$$

Digitized by Google

peuvent être ramenées à des intégrales elliptiques et faire ces réductions. (DOLBNIA.)

SOLUTION

Par M. DOLBNIA.

1° La réduction est possible quand on a

$$b + s = 2ar.$$

Dans ce cas, l'intégrale u prend la forme elliptique

$$u = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - \frac{2^8}{3^6}(r^2 - s)^2(a^2 - b)}},$$

au moyen de la substitution définie par la relation

$$\frac{(r-a)x^2 + (s-b)x + as - br}{x^2 + 2rx + s}$$
$$= \frac{3^2}{2^4}\frac{1}{r^2 - s}\sqrt{4z^3 - \frac{2^8}{3^6}(r^2 - s)^2(a^2 - b)}.$$

2° La réduction est possible si l'on a

$$e = -\frac{1}{2}(ac + bc + 2ab),$$

et l'intégrale v prend la forme

$$v = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - \frac{1}{2.3^6}(c + 2b)(c + 2a)^2(a - b)^3}},$$

par la substitution définie par

$$\left(\frac{x - b}{x - a}\right)^2 = \frac{2^3.3^6}{(a - b)^3(c + 2a)^3}z^3.$$

3° La réduction est possible si l'on a

$$ab + 3bc - 4ac = 0$$

Digitized by Google

et l'on obtient

$$w = \int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - \frac{2^{12}.c^3(a+3c)(a+2c)^2}{3^4.a^6(a-c)^2} z}},$$

au moyen de la substitution définie par

$$\frac{(x-e)(x-c)^2}{(x-a)^3} = \frac{3^4.a^4(a-c)^2(a+2c)^2}{2^8(a+3c)^2} z^2.$$

QUESTIONS.

1992. On donne dans l'espace une courbe C.

Définir la surface réglée la plus générale dont C est la ligne de striction en même temps qu'une ligne asymptotique.

(R. Bricard.)

1993. Soient m et m' deux points d'une ellipse E. Sur la normale en m, on porte extérieurement à l'ellipse une longueur mp égale au demi-diamètre conjugué de celui qui aboutit en m. Soit p' le point analogue que l'on peut construire sur la normale en m'.

Démontrer que si la tangente en m' contient le point p, la tangente en m contient le point p'. (R. Bricard.)

1994. La normale au point M d'une conique de centre O a pour pôle le point N. On projette orthogonalement M en P sur la droite ON. Le cercle mené par N, P et un point fixe quelconque, passe par un autre point fixe lorsqu'on fait varier M sur la conique.

Digitized by Google

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

BOREL (Émile), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Leçons sur la théorie des fonctions.** *Exposé de la Théorie des ensembles.* Grand in-8; 1898 .... 3 fr. 50 c.

LEROY (C.-F.-A.), ancien Professeur à l'École Polytechnique et à l'École Normale supérieure. — **Traité de Géométrie descriptive**, suivi de la **Méthode des plans cotés** et de la **Théorie des engrenages cylindriques et coniques**. 14e édition, revue et annotée par *E. Martelet*, Professeur de Géométrie descriptive à l'École Centrale des Arts et Manufactures, ancien Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers. 1 volume in-4 et Atlas de 71 planches; 1896.............................. 16 fr.

RÉMOND (A.), ancien Élève de l'École Polytechnique, Professeur de Mathématiques spéciales à l'École préparatoire de Sainte-Barbe. — **Exercices élémentaires de Géométrie analytique à deux et à trois dimensions**, avec un *Exposé des méthodes de résolution*, suivis des *Énoncés des problèmes donnés pour les compositions d'admission aux Écoles Polytechnique, Normale, Centrale, Navale, au Concours général et à l'Agrégation.* 2 volumes in-8, avec figures, se vendant séparément :

Ire Partie : *Géométrie à deux dimensions.* 2e édition; 1898... 7 fr.

IIe Partie : *Géométrie à trois dimensions. Problèmes généraux. Énoncés.* 2e édition (2e tirage corrigé); 1898.................. 7 fr.

ROUCHÉ (Eugène), Membre de l'Institut, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, Examinateur de sortie à l'École Polytechnique, et **DE COMBEROUSSE (Charles)**, Professeur à l'École Centrale et au Conservatoire des Arts et Métiers. — **Traité de Géométrie.** 7e édition, revue et augmentée par Eugène Rouché. Fort in-8 de LX-1212 pages, avec 703 fig. dans le texte et 1175 questions proposées; 1900.. 17 fr.

Ire Partie. — *Géométrie plane;* 1900.................... 7 fr. 50 c.

IIe Partie. — *Géométrie de l'espace; Courbes et Surfaces usuelles* .... 9 fr. 50 c.

SALMON (G.), Professeur au Collège de la Trinité, à Dublin. — **Traité de Géométrie analytique à deux dimensions** (*Sections coniques*); traduit de l'anglais par H. Resal et Vaucheret. 3e édition française, conforme à la 2e, publiée d'après la 6e édition anglaise, par Vaucheret, ancien Élève de l'École Polytechnique, Lieutenant-Colonel d'Artillerie, Professeur à l'École supérieure de Guerre. In-8, avec 124 fig.; 1897. 12 fr.

SALMON. — **Traité de Géométrie analytique** (*Courbes planes*), destiné à faire suite au *Traité des Sections coniques.* Traduit de l'anglais sur la 3e édition, par O. Chemin, Ingénieur des Ponts et Chaussées, et augmenté d'une *Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes*, par *G. Halphen.* In-8, avec figures. 2e tirage; 1903... 12 fr.

SALMON (G.), Professeur au Collège de la Trinité, à Dublin. — **Traité d'Algèbre supérieure.** Ouvrage traduit de l'anglais par O. Chemin, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École nationale des Ponts et Chaussées. 2e édition française, publiée d'après la quatrième édition anglaise. In-8; 1890.......................... 10 fr.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Mars 1904.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

RUSSELL (Bertrand A.-W.), M. A., Fellow of Trinity College, Cambridge. — **Essai sur les fondements de la Géométrie.** Traduction par ALBERT CADENAT, Licencié ès Sciences mathématiques, Professeur de Mathématiques au Collège de Saint-Claude, revue et annotée par l'AUTEUR et par LOUIS COUTURAT, Chargé de Cours à l'Université de Toulouse. Grand in-8 de x-274 pages avec figures; 1901........................ 9 fr.

SALMON (G.). — **Traité de Géométrie analytique à trois dimensions**, traduit de l'anglais sur la 4e édition par O. CHEMIN, Ingénieur des Ponts et Chaussées. 3 volumes in-8, se vendant séparément :

Ire PARTIE : *Lignes et surfaces du premier et du second ordre*. 2e édit. In-8, avec figures; 1899.................................. 7 fr.

IIe PARTIE : *Théorie des surfaces. Courbes gauches et surfaces développables. Famille de surfaces*. In-8, avec figures; 1891....... 6 fr.

IIIe PARTIE : *Surfaces dérivées des quadriques. Surfaces du troisième et du quatrième degré. Théorie générale des surfaces*. In-8, avec figures; 1892.................................... 4 fr. 50 c.

34577 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

Digitized by Google

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME IV.

AVRIL 1904.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris,
à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,
ou à M. BOURLET, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,
ou à M. BRICARD, 292, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.
(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Digitized by Google

Rédacteur de service : M. C. Bourlet.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences.

Besançon : M. N.... — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Duport. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. — Montpellier : M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers : M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

APPELL (**Paul**), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences, et **GOURSAT** (**Édouard**), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Théorie des Fonctions algébriques et de leurs intégrales** *Étude des fonctions analytiques sur une surface de Riemann.* Avec une Préface de M. Ch. Hermite. Grand in-8, avec figures; 1895.... 16 fr.

CAHEN (**E.**), ancien Élève de l'École Normale supérieure, Professeur de mathématiques spéciales au Collège Rollin. — **Éléments de la Théorie des nombres.** *Congruences. Formes quadratiques. Nombres incommensurables. Questions diverses.* Grand in-8; 1900............... 12 fr.

LUCAS (**Édouard**), Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis. — **Récréations mathématiques.** 4 volumes petit in-8, caractères elzévirs, titres en deux couleurs, se vendant séparément :

Tome I. — *Les Traversées.* — *Les Ponts.* — *Les Labyrinthes.* — *Les Reines.* — *Le Solitaire.* — *La Numération.* — *Le Baguenaudier.* — *Le Taquin.* 2e édition; 1891. Prix : Papier hollande, 12 fr. — Vélin, 7 fr. 50.

Tome II. — *Qui perd gagne.* — *Les Dominos.* — *Les Marelles.* — *Le Parquet.* — *Le Casse-tête.* — *Les Jeux de demoiselles.* — *Le Jeu icosien d'Hamilton.* 2e édition; 1896. Prix : Papier hollande, 12 fr. — Vélin, 7 fr. 50.

Tome III. — *Le Calcul digital.* — *Machines arithmétiques.* — *Le Caméléon.* — *Les Jonctions de points.* — *Le Jeu militaire.* — *La Prise de la Bastille.* — *La Patte d'oie.* — *Le Fer à cheval.* — *Le Jeu américain.* — *Amusements par les jetons.* — *L'Étoile nationale.* — *Rouge et Noire;* 1893. Prix : Papier hollande, 9 fr. 50. — Vélin, 6 fr. 50.

Tome IV et dernier. — *Le Calendrier perpétuel.* — *L'Arithmétique en boules.* — *L'Arithmétique en bâtons.* — *Les Mérelles au* XIIIe *siècle.* — *Les Carrés magiques de Fermat.* — *Les réseaux et les dominos.* — *Les régions et les quatre couleurs.* — *La Machine à marcher.* — Prix : Papier hollande, 12 fr. — Vélin, 7 fr. 50.

Digitized by Google

CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1904.

Sujet.

Déterminer toutes les courbes algébriques dont l'ordre ou la classe ne dépasse pas quatre, et qui admettent une infinité de coniques tritangentes égales entre elles.

Conditions.

Le Concours est ouvert à *tous* les lecteurs des *Nouvelles Annales de Mathématiques.*

Le meilleur Mémoire envoyé en réponse au sujet proposé donnera droit, au profit de l'auteur :

1° A un crédit de 200fr d'Ouvrages à choisir dans le Catalogue de M. Gauthier-Villars;
2° A la publication du Mémoire;
3° A un tirage à part gratuit de 100 exemplaires.

Les manuscrits devront être parvenus à la Rédaction *avant le* 1er *mai* 1905, terme d'absolue rigueur.

Les auteurs pourront, à leur gré, se faire immédiatement connaître, ou garder provisoirement l'anonymat. Dans ce dernier cas, le Mémoire portera un signe, une devise ou un numéro d'ordre arbitraire, et sera accompagné d'un pli cacheté renfermant, avec la même indication, le nom et l'adresse de l'auteur. Les plis cachetés en question ne seront ouverts par la Rédaction qu'à partir *du* 1er *mai* 1905 et après le jugement prononcé.

Digitized by Google

Aucune limite n'est fixée quant à l'étendue des Mémoires; mais, à mérite égal, les plus concis seraient préférés par les juges du Concours. Chacun comprendra du reste que l'insertion d'un Travail trop étendu serait matériellement impossible.

Le jugement du Concours sera prononcé avant le 1er *juin* 1905, et le résultat en sera, sans retard, publié dans le journal.

La Rédaction, et les juges du Concours qui se seront associés à elle, se réservent la faculté :

1° De partager les récompenses ci-dessus mentionnées, au cas *tout à fait exceptionnel* où deux Mémoires y auraient droit avec un égal mérite;

2° De ne pas attribuer de récompenses si, parmi les Mémoires envoyés, aucun ne semblait en être digne. Dans ce dernier cas, les avantages stipulés seraient reportés sur un Concours ultérieur, et l'annonce en serait faite dans le journal en temps utile.

L'auteur du Mémoire récompensé sera immédiatement avisé par la Rédaction et voudra bien faire connaître sans retard s'il désire que la publication de son travail ait lieu sous son nom, ou sous forme anonyme. Son silence serait interprété comme une autorisation de publier le nom.

Les Rédacteurs.

Digitized by Google

[D6b]

DÉFINITION DE sin z PAR UN PRODUIT INFINI;

PAR M. L. DREYFUS.

THÉORÈME. — *Si l'on considère les séries*

$$S_p = a_{p,0} + a_{p,1} + \ldots + a_{p,n} + \ldots$$

supposées uniformément convergentes en fonction de p, et si les quantités $a_{p,n}$ ont pour limites, lorsque l'entier p augmente indéfiniment, des nombres a_n, la série

$$S = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$$

étant convergente, les sommes S_p ont pour limite S.

En effet, ε étant un nombre positif donné, je peux déterminer un entier, tel que les restes R_m et $R_{p,m}$ soient moindres chacun que $\frac{\varepsilon}{3}$, l'inégalité $R_{p,m} < \frac{\varepsilon}{3}$ ayant lieu quel que soit p; m étant ainsi déterminé, il existe un nombre P tel que la différence $S_{p,m} - S_m$ soit, en valeur absolue, moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$ si $p > P$; et, par suite, la différence

$$S - S_p$$

sera, si $p > P$, moindre en valeur absolue que le nombre positif ε, choisi aussi petit qu'on le veut : c'est dire que S_p a pour limite S.

THÉORÈME. — *Je considère les produits infinis*

$$P_q = (1 + a_{q,0})(1 + a_{q,1}) \ldots (1 + a_{q,n}) \ldots$$

uniformément convergents en fonction de q; si le

Digitized by Google

quantités $a_{q,n}$ ont pour limites des nombres a_n, le produit infini

$$P = (1 + a_0)\dots(1 + a_n)\dots$$

étant convergent ; je dis que les produits P_q ont pour limite P.

En effet, je peux considérer ces produits infinis comme somme des séries

$$P_q = P_q^{(0)} + P_q^{(0)} a_{q,1} + P_q^{(1)} a_{q,2} + \dots,$$
$$P = P^{(0)} + P^{(0)} a_1 + P^{(1)} a_2 + \dots,$$

en désignant par $P_q^{(n)}$ le produit des n premiers facteurs de P_q et par $P^{(n)}$ celui des n premiers facteurs de P.

On est alors ramené au théorème précédent, car $a_{q,n}$ tend vers a_n, le produit limité $P_q^{(n)}$ a pour limite le produit limité $P^{(n)}$ et les séries donnant P_q sont, par hypothèse, uniformément convergentes.

Je considère le produit infini

$$P(z) = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\dots,$$

z étant une variable complexe de module Z ; la série des modules

$$\frac{Z^2}{\pi^2} + \frac{Z^2}{4\pi^2} + \dots + \frac{Z^2}{n^2\pi^2} + \dots$$

étant, quel que soit z, dans une aire donnée, uniformément et absolument convergente, le produit sera lui-même absolument et uniformément convergent et représentera une fonction de z définie et continue en tout point du plan de la variable complexe z.

Elle admet les zéros simples

$$\begin{array}{lllll} 0, & 1, & 2, & 3, & \dots, \\ & -1, & -2, & -3, & \dots. \end{array}$$

Digitized by Google

Théorème. — *La fonction* P(z) *admet la période* 2π.

Je vais démontrer d'abord que l'on a

$$P(z+\pi) = -P(z).$$

En effet, le produit $P(z)$ est équivalent au produit infini

$$Q(z) = z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\cdots;$$

ce produit infini n'est plus absolument convergent, on ne pourra en intervertir les termes d'une façon quelconque, mais on pourra les déplacer d'un ou deux rangs sans changer la convergence ni la valeur du produit $Q(z)$.

Je pose

$$v_0(z) \quad = z,$$

$$v_{2p}(z) \quad = 1+\frac{z}{p\pi},$$

$$v_{2p-1}(z) = 1-\frac{z}{p\pi};$$

on a

$$P_m = Q_{2m} = v_0 v_1 v_2 \ldots v_{2m}.$$

Je remplace dans $P_m(z)$, z par $z+\pi$; j'aurai les égalités

$$v_{2p-1}(z+\pi) = \frac{p-1}{p}\left(1-\frac{z}{(p-1)\pi}\right) = \frac{p-1}{p} v_{2p-3},$$

$$v_{2p}(z+\pi) \quad = \frac{p+1}{p}\left(1+\frac{z}{(p+1)\pi}\right) = \frac{p+1}{p} v_{2p+2};$$

pour les deux premiers termes, ces formules ne sont plus applicables, car $p = 0$ ou 1, et l'on a

$$v_1(z+\pi) = -\frac{z}{\pi} \quad = -\frac{v_0(z)}{\pi},$$

$$v_0(z+\pi) = z+\pi = \pi v_2(z);$$

Digitized by Google

par suite, on peut écrire

$$Q_{2m}(z+\pi) = -v_2 v_0 v_4 v_1 v_6 v_3 \ldots v_{2m} v_{2m-3} v_{2m+2} \frac{m+1}{m};$$

car on peut remplacer le produit des deux facteurs consécutifs $\frac{p+1}{p} v_{2p+2}$ et $\frac{p}{p+1} v_{2p-1}$ par $v_{2p+2} v_{2p-1}$. On peut ensuite changer de deux rangs l'ordre des facteurs, et écrire

$$\left(1 - \frac{z}{m\pi}\right) P_m(z+\pi) = -\left(1 + \frac{z}{(m+1)\pi}\right)\left(1 + \frac{1}{m}\right) P_m(z).$$

m augmentant indéfiniment, cette égalité sera toujours vraie, et, en remplaçant chaque facteur par sa limite, on aura

$$P(z+\pi) = -P(z),$$

et, par suite, on a

$$P(z+2\pi) = P(z).$$

De plus, il est évident que la fonction $P(z)$ est une fonction impaire, c'est-à-dire que l'on a

$$P(z) = -P(-z),$$

puisque tous les facteurs $\left(1 - \frac{z^2}{p^2\pi^2}\right)$ conservent leurs valeurs, si l'on y remplace z par $-z$; seul, le premier facteur change de signe.

On en conclut que l'on a

$$P(z+\pi) = -P(z).$$

Donc on a

$$P(z-\pi) = -P(z),$$
$$P(\pi - z) = P(z).$$

Ces propriétés appartiennent à $\sin z$. Je vais démontrer que $P(z) = \sin z$.

Digitized by Google

En même temps que la fonction $P(z)$, il faudra considérer la fonction $P\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=P\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$, que je vais développer en produit infini. J'aurai

$$v_{2p}\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = 1+\frac{z+\frac{\pi}{2}}{p\pi}=\frac{p+\frac{1}{2}}{p}\left(1+\frac{z}{\left(p+\frac{1}{2}\right)\pi}\right),$$

$$v_0\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{z}{\frac{1}{2}\pi}\right),$$

$$v_{2p-1}\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{p-\frac{1}{2}}{p}\left(1-\frac{z}{\left(p-\frac{1}{2}\right)\pi}\right)$$

et, par suite, on en conclut, en groupant chaque facteur d'indice impair avec celui qui le précède, ce qui est permis,

$$P\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\frac{3}{2}\,\frac{3}{4}\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

De sorte que le produit $P\left(z+\frac{\pi}{2}\right)$ est égal au produit des deux produits absolument convergents

$$A=\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2.4}\right)\left(1+\frac{1}{4.6}\right)\left(1+\frac{1}{6.8}\right)\cdots,$$

$$Q(z)=\left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\cdots.$$

Je démontrerai par la suite que $A=1$, de sorte que j'aurai

$$P\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

Les théorèmes généraux sur les produits infinis dépendant d'une variable montrent que la fonction $P(z)$ a une dérivée; dans ce qui va suivre, je vais montrer

Digitized by Google

directement que cette fonction a une dérivée et que cette dérivée est le produit $Q(z)$.

Je remarque d'abord que si $P(z)$ a une dérivée, cette dérivée $P'(z)$ satisfait aux deux relations

$$P'(z+\pi) = -P'(z),$$
$$P'(z) \quad = \quad P'(-z),$$

et, en faisant $z = -\frac{\pi}{2}$, on trouve que $P'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et, par suite, la dérivée admet les mêmes zéros que $Q(z)$. Je vais démontrer que cette dérivée est effectivement $Q(z)$, d'où l'on conclut

$$P'(z) = \frac{1}{A} P\left(z + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$P''(z) = \frac{1}{A^2} P(z+\pi),$$

$$= -\frac{1}{A^2} P(z)$$

et, par suite, $P(z)$ satisfaisant à l'équation différentielle

$$y'' + \frac{1}{A^2} y = 0$$

qui admet pour intégrale générale

$$y = \alpha \sin\left(\frac{z}{A} + \beta\right),$$

α et β étant deux constantes quelconques, puisque $P(z)$ admet la période 2π, A est égal à l'unité; $P(z)$ s'annulant pour $z = 0$, β est nul; enfin, $\frac{P(z)}{z}$ tendant vers 1 quand z tend vers zéro, α est égal à 1 et, par suite, $P(z)$ est égal à $\sin z$.

Il faut donc démontrer que *la dérivée de* $P(z)$ *existe et qu'elle est* $Q(z)$.

Le polynome $P_m(z)$ ne contient que des termes de degré impair; il est de degré $2m+1$ et admet les

racines toutes réelles

$$0, \quad \pm\pi, \quad \pm 2\pi, \quad \ldots, \quad \pm m\pi;$$

ses coefficients sont donc réels et on peut lui appliquer le théorème de Rolle.

Sa dérivée est un polynome de degré $2m$, à racines toutes réelles et dont les termes sont tous de degré pair; par suite, les $2m$ racines sont deux à deux égales et de signes contraires.

Je peux donc écrire

$$P'_m(z) = B\left(1 - \frac{z^2}{\alpha_{m,1}^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{\alpha_{m,2}^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{z^2}{\alpha_{m,m}^2}\right).$$

Le nombre positif α_{mp} est compris entre $(p-1)\pi$ et $p\pi$, limites exclues, puisque le polynome P_m n'a pas de racines doubles. Le coefficient B est d'ailleurs égal à l'unité, puisque l'on peut écrire

$$P_m(z) = z + Kz^3 + \ldots,$$
$$P'_m(z) = 1 + 3Kz^2 + \ldots.$$

Je dis que l'on a

$$\alpha_{m,p} < \alpha_{m-1,p}.$$

En effet, si z est réel et varie dans l'intervalle $(p-1)\pi \ldots p\pi$, la dérivée logarithmique de $P_m(z)$ est positive ou négative, suivant que z est inférieur ou supérieur à $\alpha_{m,p}$; or, on a par définition

$$P_m = P_{m-1}\left(1 - \frac{z^2}{m^2\pi^2}\right),$$

$$\frac{P'_m(z)}{P_m(z)} = \frac{P'_{m-1}(z)}{P_{m-1}(z)} - \frac{2z}{1 - \frac{z^2}{m^2\pi^2}}$$

et par suite

$$\frac{P'_m(\alpha_{m,p})}{P_m(\alpha_{m-1,p})} = 0 + \frac{-2\alpha_{m,p}}{1 - \frac{\alpha_{m-1,p}^2}{m^2\pi^2}}.$$

Digitized by Google

Donc la dérivée logarithmique de P_m est négative pour $z = \alpha_{m-1,p}$, et par suite

$$\alpha_{m-1,p} > \alpha_{m,p}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Donc les nombres $\alpha_{m,p}$ diminuant avec $\frac{1}{m}$, mais restant supérieurs à $(p-1)\pi$, ont une limite α_p.

D'ailleurs α_p est compris entre $(p-1)\pi$ et $p\pi$, donc le produit infini

$$R(z) = \left(1 - \frac{z^2}{\alpha_1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{\alpha_2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{z^2}{\alpha_p^2}\right)\cdots$$

est convergent, et l'on en conclut, en appliquant le lemme démontré précédemment, que les produits $P'_m(z)$ ont pour limite $R(z)$. Si l'on intègre entre deux limites z_0 et z, on a

$$P_m(z) - P_m(z_0) = \int_{z_0}^{z} P'_m(z)\,dz.$$

La fonction sous le signe $\int$ est intégrable et uniforme : elle est uniformément convergente, en fonction de m, vers la fonction $R(z)$, donc le premier membre de l'équation a aussi une limite et cette limite est d'ailleurs $P(z) - P(z_0)$. C'est dire que $R(z)$ est la dérivée de $P(z)$.

Cette dérivée s'annule pour une valeur et une seule comprise entre $(p-1)\pi$ et $p\pi$, nous avons dit qu'elle s'annulait pour $(2p-1)\frac{\pi}{2}$; donc

$$\alpha_p = \frac{(2p-1)\pi}{2}$$

et $R(z)$ coïncide avec

$$Q(z) = P\left(z + \frac{\pi}{2}\right),$$

et l'on a donc

$$P(z) = \sin z.$$

Digitized by Google

Il résulte donc les deux développements infinis suivants :

$$\sin z = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right)\cdots,$$

$$\cos z = \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\cdots.$$

Nous avons vu aussi que $A = 1$, il en résulte l'égalité de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots.$$

Si l'on développe $P_m(z)$ en un polynome ordonné suivant les puissances croissantes de z, on aura

$$P_m(z) = z - B_1\frac{z^3}{\pi^2} + B_2\frac{z^3}{\pi^4} + \cdots.$$

B_p est la somme de tous les produits p à p, des inverses des carrés des m premiers nombres, les nombres entrant dans chaque produit étant distincts, on a donc

$$B_p < (B_1)^p.$$

Lorsque m augmente indéfiniment B_1 a pour limite la somme de la série convergente

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots,$$

les nombres B_2, B_3, ... sont des nombres positifs croissants et respectivement moindres que S^2, S^3, ..., S^p si l'on désigne par b_1, b_2, ..., b_p ces limites, la série

$$z - \frac{b_1}{\pi^2}z^3 + \frac{b_2}{\pi^4}z^5 - \cdots$$

sera convergente et, par suite du premier théorème démontré précédemment, sera la limite des poly-

Digitized by Google

nomes $P_m(z)$. C'est-à-dire que l'on aura

$$\sin z = z - \frac{b_1}{\pi^2} z^3 + \ldots,$$

série convergente au moins dans le cercle de rayon $\frac{\pi}{\sqrt{b_1}}$, mais on connaît déjà le développement

$$\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

et une fonction ne peut que d'une seule façon être représentée par une série entière. On a donc un certain nombre d'égalités numériques, dont la première donne la somme S,

$$\frac{\pi^2}{1.2.3} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots.$$

[D1a]

SUR LES FONCTIONS DISCONTINUES CROISSANTES ET SUR CERTAINES FONCTIONS CONTINUES;

Par M. J. RICHARD,
Professeur à Dijon.

Je vais montrer dans ce qui suit, qu'une fonction discontinue constamment croissante (ou décroissante) dans un intervalle (a, b) peut être mise sous la forme d'une somme de deux fonctions, l'une discontinue d'une certaine espèce, et l'autre continue.

I. Les points de l'intervalle (a, b) où la fonction $f(x)$ considérée n'est pas continue forment un ensemble dénombrable.

Digitized by Google

Pour le démontrer, supposons que la fonction soit discontinue pour $x = x_0$, $f(x_0 - h)$ croît quand h diminue, et comme il ne peut dépasser $f(x_0)$, il tend vers une limite que, selon l'usage, nous désignons par $f(x_0 - 0)$. De même $f(x_0 + h)$ tend vers une limite $f(x_0 + 0)$. La différence $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ est ce que je nommerai le *saut* de la fonction pour $x = x_0$. La connaissance de $f(x + 0)$ et de $f(x - 0)$ ne fait pas connaître $f(x)$. On peut supposer que $f(x)$ est la moyenne entre $f(x + 0)$ et $f(x - 0)$. Cela ne change pas la définition de $f(x)$ partout où elle est continue.

Soit ε un nombre positif arbitraire. Les points où le saut surpasse ε forment un ensemble fini, car si le nombre de ces points surpasse n, $f(b) - f(a)$ est plus grand que $n\varepsilon$: or $f(b) - f(a)$ est fini, il ne peut surpasser $n\varepsilon$ quelque grand que soit n.

Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ une suite de nombres positifs ayant pour limite zéro. Rangeons par ordre de grandeur les valeurs de x pour lesquelles le saut surpasse ε_1, puis celles pour lesquelles le saut est compris entre ε_1 et ε_2, puis celles pour lesquelles le saut est compris entre ε_2 et ε_3, etc. On a ainsi rangé toutes les valeurs de x pour lesquelles la fonction est discontinue. Ces valeurs forment donc un ensemble dénombrable.

II. Nous pouvons alors désigner par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs de x pour lesquelles la fonction est discontinue : soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$ les sauts correspondants; la série $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ est certainement convergente, car elle est à termes positifs, et la somme des n premiers termes ne saurait surpasser $f(b) - f(a)$. Soit alors $\varphi(x)$ une fonction définie comme il suit : $\varphi(x)$ est nul pour x négatif, égal à $\frac{1}{2}$ pour $x = 0$, égal à 1 pour x positif.

Digitized by Google

Considérons maintenant la fonction

$$\psi(x) = u_1\varphi(x - x_1) + u_2\varphi(x - x_2)$$
$$+ u_3\varphi(x - x_3) + \ldots + u_n\varphi(x - x_n) + \ldots.$$

Je vais montrer que $f(x) - \psi(x)$ est continue.

D'abord si x n'est égal ni à x_1, ni à x_2, ..., ni à x_n, $\psi(x)$ est continue, car c'est une série *uniformément convergente*, dont tous les termes sont des fonctions continues.

Pour $x = x_n$, $u_n\varphi(x - x_n)$ est le seul terme discontinu. Pour $x < x_n$ il est égal à zéro, pour $x = x_n$ il est $\frac{u_n}{2}$, pour $x > x_n$ il est u_n. Donc le saut de $\psi(x)$ pour $x = x_n$ est bien égal à u_n et en outre, $\psi(x_n)$ est bien la moyenne entre $\psi(x_n - 0)$ et $\psi(x_n + 0)$.

Alors $f(x) - \psi(x)$ ne subit aucun saut pour $x = x_n$, c'est une fonction continue $S(x)$ et l'on peut écrire

$$f(x) = \psi(x) + S(x).$$

On peut énoncer ceci sous la forme suivante. Toute fonction discontinue croissante $f(x)$ est la somme d'une fonction continue $S(x)$ et d'une fonction $\psi(x)$ complètement définie par les sauts qu'elle éprouve pour les diverses valeurs de x.

$f(x)$ est toujours intégrable, puisque les points où le saut est supérieur à ε forment un ensemble fini; on peut écrire :

$$\int f(x)\,dx = \int \psi(x)\,dx + \int S(x)\,dx.$$

Il est alors facile de voir que la fonction $\int f(x)\,dx$ n'a pas de dérivée pour les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mais en possède une pour les autres valeurs de x.

On forme ainsi une fonction croissante telle qu'il

Digitized by Google

existe dans l'intervalle (a, b) une infinité de valeurs pour lesquelles cette fonction n'a pas de dérivée, $\int S(x)\,dx$ a toujours une dérivée $S(x)$.

On connaît des fonctions continues n'ayant de dérivée pour aucune valeur de x; je ne crois pas qu'on connaisse des fonctions continues *croissantes* possédant la même propriété.

Je vais maintenant considérer des fonctions *continues* de nature particulière.

Je dirai que $f(x)$ est convexe dans l'intervalle (a, b), si, quels que soient m et n, l'équation $f(x) = mx + n$ n'a jamais plus de deux racines. Géométriquement l'arc de courbe $y = f(x)$ $(a < x < b)$ ne peut être coupé par une droite quelconque en plus de deux points.

Dans ces conditions, je vais faire voir que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

a une limite quand h tend vers zéro par valeurs positives (on verra de même qu'il en a une quand h tend vers zéro par valeurs négatives).

Des considérations géométriques rendront la démonstration plus facile, sans nuire à sa rigueur.

Soit x_0 un point quelconque de la courbe, x un autre point à droite $x = x_0 + h$. Je dis que h diminuant, le quotient de $f(x_0 + h) - f(x_0)$ par h varie constamment dans le même sens. La droite $x_0 x$ a précisément ce quotient pour coefficient angulaire. S'il ne variait pas toujours dans le même sens quand h diminue, on pourrait trouver trois points α, β, γ $(x_0 < \alpha < \beta < \gamma)$ tels que la droite $x_0 \beta$ ne soit pas comprise dans l'angle de $x_0 \alpha$ avec $x_0 \gamma$, alors l'arc de courbe $y = f(x)$ compris entre $x = \alpha$, $x = \gamma$ aurait des points non situés dans l'angle considéré, il devrait donc couper l'un des côtés

Digitized by Google

de cet angle. La courbe couperait ainsi l'un des côtés de l'angle en trois points : le point x_0, l'un des deux points α ou γ, et un autre point entre α et γ, ce qui est contraire à notre hypothèse.

$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ variant constamment dans le même sens tend vers une limite pour $h=0$ [il peut aussi devenir infini, mais dans ce cas encore la courbe $y=f(x)$ admet au point x_0 une tangente qui est verticale].

La courbe est donc telle qu'en tous ses points il y ait une dérivée à gauche et une dérivée à droite; elle présente en chaque point un point angulaire avec deux tangentes déterminées.

Il sera ensuite facile de démontrer que les points où l'angle de ces deux tangentes surpasse une certaine limite ε sont en nombre fini, et que par suite les points où les deux tangentes ne coïncident pas forment un ensemble dénombrable.

[J3b]

SUR LA SURFACE DE MOINDRE RÉSISTANCE;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

La surface de moindre résistance est la surface de révolution d'axe donné qui éprouve la plus petite résistance (lorsqu'elle se déplace dans l'air dans la direction de son axe), parmi celles qui sont engendrées par une courbe méridienne terminée en deux points fixes A, B dont l'un peut être situé sur l'axe.

Il y a lieu de faire quelques remarques au sujet de la façon dont le problème a été résolu par différents auteurs. Tout d'abord, l'expression de la résistance est

Digitized by Google

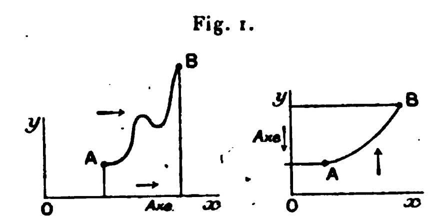
mise généralement sous la forme suivante :

$$R = k \int_a^b y \frac{y'^3_x}{1 + y'^2_x}\, dx,$$

en prenant l'axe de révolution comme axe des x. Cette formule s'obtient immédiatement en supposant que la résistance normale par unité de surface soit proportionnelle à la projection sur la normale du carré de la vitesse.

Or, il n'est pas évident que le minimum de cette intégrale corresponde au minimum de la résistance. En effet, cette intégrale a un sens lorsque y est une fonction uniforme et continue de x quelconque; tandis qu'elle ne représente la résistance que pour les courbes qui ne sont coupées qu'en un point par une parallèle à Ox. Il est manifeste que l'on doit exclure de l'ensemble des courbes acceptables, des courbes telles que celle qui est représentée (*fig.* 1). Ainsi le problème ne se pose que

Fig. 1.



lorsque x est fonction continue et *uniforme* de y. Il y a donc lieu (si l'on veut considérer comme d'habitude y comme fonction uniforme de x) de prendre l'axe de révolution *comme axe des* y. Et l'on obtient l'expression exacte cette fois pour la résistance (en négligeant la résistance de la surface frontale qui est constante)

$$R = k \int_\alpha^\beta \frac{x\, dx}{1 + y'^2}.$$

Digitized by Google

L'équation différentielle des extrémales (courbes annulant la variation première de R) sera de la forme

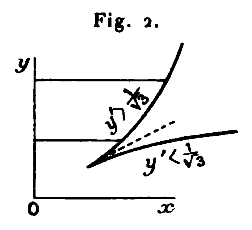
$$f'_y - \frac{d}{dx} f'_{y'} = 0 \qquad \text{en posant} \qquad f = \frac{x}{1+y'^2}.$$

Cette équation donnera la même famille de courbes qu'avec la formule précédente. Mais il ne faut pas commettre l'erreur qui consiste à écrire l'équation des extrémales après avoir pris comme variable l'arc s de la courbe (¹). En effet, en opérant ainsi, on suppose implicitement que les limites d'intégration sont fixes et, par conséquent, que *la longueur de la courbe est constante*. Le problème que l'on résout *n'est donc plus le même*. L'équation des extrémales est ici :

$$\frac{d}{dx}\left(x \frac{-2y'}{(1+y'^2)^2}\right) = 0.$$

En intégrant, on a la courbe (*fig.* 2) en fonction

Fig. 2.



d'un paramètre p qui est le coefficient angulaire de la tangente

$$x = c\,\frac{(1+p^2)^2}{p}, \qquad y = c\left(\frac{3p^4}{4} + p^2 - \mathrm{L}p\right) + e.$$

Et l'on sait que s'il y a une courbe continue (*à tan-*

(¹) *Voir* Starkoff, *Sur la résolution des problèmes géométriques par le calcul des variations* (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XIII, 1884-1885, p. 132).

Digitized by Google

gente continue ou non) qui donne le minimum, c'est nécessairement une extrémale ou une suite d'arcs d'extrémales ([1]).

Pour voir si cette courbe peut donner le minimum, formons, d'après la méthode de Weierstrass ([2]), la quantité

$$E(x,y,p,p_1) \equiv f(x,y,p_1) - f(x,y,p) + (p-p_1)\frac{\partial}{\partial p}f(x,y,p)$$
$$= \frac{x(p_1-p)^2}{(1+p_1^2)(1+p^2)^2}[2pp_1+p^2-1].$$

Il *faut* que cette quantité soit constamment positive ou nulle *quel que soit* p_1 lorsque y est l'ordonnée de l'extrémale considérée et p le coefficient angulaire de la tangente. Du moins, c'est une condition nécessaire pour que l'extrémale considérée présente un minimum *fort*, c'est-à-dire un minimum relativement aux courbes dont la différence des ordonnées avec celles-ci ait un maximum infiniment petit ([3]). Or, cette condition nécessaire (qui n'est pas du reste la seule) n'est évidemment pas satisfaite ici puisque le crochet est du premier degré en p_1 et par conséquent a un signe quelconque. Par conséquent, on doit pouvoir trouver des courbes aussi rapprochées que l'on veut d'une extrémale et qui donnent des valeurs plus petites pour R. *Il n'y a donc pas de minimum absolu.* Et en effet, Legendre a montré ([4]) qu'on pouvait construire des courbes continues (des lignes brisées) pour lesquelles la résistance a une valeur aussi petite que l'on veut. La limite inférieure de

---

([1]) *Voir* HADAMARD, *Leçons sur le calcul des variations*, professées au Collège de France (à paraître prochainement).

([2]) ID., *loc. cit.*

([3]) ID., *loc. cit.*

([4]) *Mémoires de l'Académie Royale de Paris*, 1786, § VI.

Digitized by Google

la quantité positive R est donc zéro et cette limite n'est pas atteinte. Il faut d'ailleurs remarquer que les lignes de Legendre ont des longueurs croissant indéfiniment et par conséquent ne correspondent pas à une solution *pratique*.

Au point de vue du calcul des variations, il y a lieu de chercher aussi les courbes qui présentent un minimum *faible* ([1]), c'est-à-dire qui présentent un minimum relativement aux courbes telles que, non seulement leurs ordonnées soient voisines de celles de l'extrémale considérée, mais encore que les coefficients angulaires de leurs tangentes varient très peu d'une courbe à l'autre.

Pour qu'il y ait minimum faible, il faut d'abord que la quantité $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ garde un signe constant sur l'extrémale γ considérée. Or on a ici :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{2x(3y'^2-1)}{(1+y'^2)^3}$$

et d'autre part la courbe présente deux branches reliées par un point de rebroussement pour $y' = \frac{1}{\sqrt{3}}$. C'est donc la branche qui correspond à $y' > \frac{1}{\sqrt{3}}$ qui seule peut donner un minimum faible. Pour qu'elle le donne effectivement, il faut encore que les extrémales issues de A coupent l'extrémale considérée γ en un point A' dont la limite, lorsque ces extrémales tendent vers γ, soit en dehors de l'arc AB ([2]). Autrement dit, il faut que l'équation aux variations des extrémales n'ait pas de solution nulle en x_0 et nulle pour x compris entre α

([1]) HADAMARD, *loc. cit.*

([2]) ID., *loc. cit.*

Digitized by Google

et β. Or cette équation aux variations est

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2x(3y'^2-1)}{(1+y'^2)^3}Y'\right)=0,$$

Y′ étant la variation. L'intégrale générale est

$$Y = m\int\frac{(1+y'^2)^3}{x(3y'^2-1)}dx+n$$
$$= m\int(1+y'^2)^2\frac{dy'}{y'}+n = m\left(\frac{y'^4}{4}+y'^2+\mathrm{L}y'\right)+n.$$

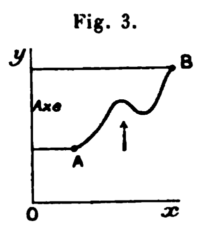
Or, celle-ci ne peut s'annuler pour deux abscisses différentes. En effet, il faudrait qu'elle s'annule pour deux valeurs différentes de y', et par conséquent que la fonction $\varphi = \frac{y'^4}{4}+y'^2+\mathrm{L}y'$ puisse prendre deux fois la même valeur. Ceci est impossible, car la dérivée $\frac{(1+y'^2)^2}{y'}$ en y' est toujours positive (y' toujours positif sur l'extrémale) et alors cette fonction φ croît toujours. Donc l'intégrale Y ne peut s'annuler deux fois (autrement dit, les extrémales issues d'un point n'ont pas d'enveloppes). Par conséquent, si les deux points A et B sont situés sur la branche $y' > \frac{1}{\sqrt{3}}$ d'une même extrémale γ, l'arc AB de γ fournira bien un minimum faible.

Remarque. — Puisqu'il n'y a pas de minimum absolu, le problème posé par Newton n'admet pas de solution. La question est donc tranchée au point de vue analytique. Toutefois, il y a lieu de se demander s'il ne conviendrait pas d'augmenter le nombre des conditions imposées à la courbe méridienne, pour se rapprocher de la pratique. En effet, nous avons supposé que y est une fonction de x uniforme et continue. Cela n'exclut

Digitized by Google

pas le choix de courbes présentant une cavité (*fig.* 3). Or on sait que dans ce cas, l'air contenu dans cette cavité forme comme un matelas sur lequel vient glisser l'air en mouvement. De telle sorte qu'il y aurait peut-être lieu, soit de supposer que la courbe a toujours sa conca-

Fig. 3.



vité du même côté des y positifs ou négatifs, soit de modifier la formule qui donne la résistance. On sait d'ailleurs que, même dans les cas les plus simples, la formule de Newton est loin d'avoir été établie avec toute la précision désirable.

[C2e]

SUR LE CALCUL DE CERTAINES INTÉGRALES INDÉFINIES;

Par M. J. SADIER.

Problème. — *Effectuer la réduction de l'intégrale*

$$\int f(x)e^u\,dx,$$

dans laquelle $f(x)$ *est une fonction rationnelle et* u *un polynome entier en* x *que nous supposerons de degré* p.

La méthode des racines égales permet de décomposer le dénominateur de $f(x)$ en un produit de facteurs de la forme P^n; les polynomes P étant premiers entre eux,

Digitized by Google

n'ayant pas de facteurs multiples et ayant leurs coefficients rationnels.

Par suite $f(x)$ se composera d'une partie entière et d'une série de termes de la forme $\frac{X}{P^n}$.

Je vais démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *L'intégrale* $\int f(x) e^u\,dx$ *peut, sans qu'il soit nécessaire de connaître les racines du dénominateur de* $f(x)$, *être mise sous la forme*

$$e^u F(x) + \int F_1(x) e^u\,dx + \sum \frac{\varphi(x) e^u}{P}\,dx.$$

F est une fonction rationnelle de x, F_1 un polynome de degré $< p - 1$.

Les polynomes φ sont de degré inférieur à ceux des polynomes P correspondants.

I.

Considérons d'abord le cas de l'intégrale correspondant à f entier, qui est une des parties du problème à résoudre.

Considérons l'intégrale

$$\int A e^u\,dx,$$

A polynome entier.

Première méthode (réductions successives). — Divisons A par u'

$$A = B_1 u' + C_1 \qquad (\text{degré } C_1 < p - 1),$$

$$\int A e^u\,dx = B_1 e^u - \int B'_1 e^u\,dx + \int C_1 e^u\,dx,$$

$$\int A e^u\,dx = B_1 e^u + \int A_1 e^u\,dx,$$

$$A_1 = C_1 - B'_1.$$

Digitized by Google

Si A est de degré m, A_1 est au plus de degré $m-(p-1)$.

En opérant sur cette seconde intégrale comme sur la première on la ramènera à une intégrale de la forme

$$\int A_2 e^u\, dx,$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne à une intégrale

$$\int A_q e^u\, dx \qquad (q < p-1).$$

Cette intégrale se réduit donc à la somme de deux termes: le premier est égal à e^u multiplié par un polynome entier en x; le second est une intégrale de même forme que la proposée. Le polynome sous le signe $\int$ étant de degré $< p-1$.

Seconde méthode (plus simple dans la pratique). — Sachant que le résultat est de la forme

$$\int A e^u\, dx = P e^u + \int R e^u\, dx \qquad (\text{degré } R < p-1),$$

on a, en égalant les dérivées :

$$A = P u' + P' + R.$$

Soit $P = p_1 + p_2 + \ldots$ le polynome P développé suivant les puissances décroissantes de a et u_1, le premier terme de u' ordonné de la même manière.

On peut déterminer successivement les termes p_1, p_2, ... par un procédé semblable à la division des polynomes.

En égalant les termes de degré le plus élevé dans les deux membres, a_1 étant le premier terme de A,

$$a_1 = p_1 u_1, \qquad \text{d'où} \qquad p_1;$$

Digitized by Google

retranchons les deux membres $p_1 u' + p'_1$. Il reste

$$R_1 = (p_2 + p_3 + \ldots) u' + p'_2 + p'_3 + \ldots + R.$$

On détermine de même p_2 et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne un reste de degré $< p - 1$ qui est le polynome R cherché.

II.

Réduction de l'intégrale

$$\int \frac{X_0 e^u \, dx}{P^n} = V_n,$$

X_0 *est de degré moindre que celui de* P. — Déterminons une fois pour toutes deux polynomes A et B tels que

$$AP - BP' \equiv 1,$$

ce qui est possible puisque P et P' sont premiers entre eux.

Multiplions la différentielle par $AP - BP'$

$$V_n = \int \frac{AX_0 e^u \, dx}{P^{n-1}} - \int \frac{BX_0 e^u P' \, dx}{P^n}.$$

Or

$$D\left(\frac{1}{P^{n-1}}\right) = -(n-1)\frac{P'}{P^n},$$

d'où

$$(n-1)V_n = (n-1)\int \frac{AX_0 e^u \, dx}{P^{n-1}} + \int BX_0 e^u \, d\frac{1}{P^{n-1}},$$

$$= \frac{BX_0 e^n}{P^{n-1}} + V_{n-1},$$

$$V_{n-1} = \int \frac{X_1 e^u \, dx}{P^{n-1}},$$

$$X_1 = (n-1)AX_0 - B'X_0 - BX_0 - BX_0 u',$$

$$= (n-1)AX_0 - D_x(BX_0) - BX_0 u'.$$

Digitized by Google

On a ainsi les deux sortes de formules de récurrence

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lllll} X_1 & = (n-1)\,AX_0 & -D(BX_0) & -BX_0 u', \\ X_2 & = (n-2)\,AX_1 & -D(BX_1) & -BX_1 u', \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots, \\ X_{n-1} & = 1 \qquad AX_{n-2} & -D(BX_{n-2}) & -BX_{n-2} u' \end{array}\right.$$

qui déterminent les polynomes successifs X.

Puis on a

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lll|l} (n-1)V_n & = \dfrac{BX_0 e^u}{P^{n-1}} & + V_{n-1} & n-2!, \\ (n-2)V_{n-1} & = \dfrac{BX_1 e^u}{P^{n-2}} & + V_{n-2} & n-3!, \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots, \\ 2V_3 & = \dfrac{BX_{n-3} e^u}{P} & + V_2 & 1!, \\ 1V_2 & = \dfrac{BX_{n-2}}{P} & + V_1 & 0!. \end{array}\right.$$

Ajoutons membre à membre ces équations après les avoir multipliées, en commençant par la dernière, par $0!$, $1!$, $2!$, ..., $n-2!$.

On a

$$n-1!\,V_n = Be^u\left(\frac{n-1!\,X_0}{P^{n-1}} + \dots + \frac{X_{n-2}}{P}\right) + V_1,$$

$$V_1 = \int \frac{X_{n-1} e^u}{P}\,dx.$$

X_{n-1} sera en général de degré supérieur à celui de P. On effectuera la division, ce qui donnera une partie entière (partie I du problème), ce qui montre qu'il faut d'abord traiter la deuxième partie (II).

Le théorème est ainsi démontré.

Remarque I. — On peut effectuer cette division sur chacun des polynomes X_1, X_2, mais alors on n'a plus les formules de récurrence précédentes.

Digitized by Google

Remarque II. — Dans une réduction pratique il n'est pas nécessaire d'appliquer ces formules de récurrence, il suffit d'en appliquer le principe.

Cas particulier : $u = x$. — Dans ce cas la réduction est plus complète. L'intégrale prend la forme

$$F(x)e^x + \sum \int \frac{Xe^x}{P}.$$

Note I. — Ce dernier problème est résolu complètement dans le *Traité* de M. Hermite (t. I, Gauthier-Villars), dans le cas où l'on peut résoudre entièrement le dénominateur de $f(x)$. On peut ajouter une remarque à cette solution.

La partie qui constitue une transcendance nouvelle est de la forme

$$\sum \frac{A e^x \, dx}{x - a}.$$

Tous ces termes se ramènent à une transcendante unique $\int \frac{e^x \, dx}{x}$, le logarithme intégral.

Faisons le changement de variable $x = a + x_1$, puis supprimons l'indice,

$$\sum \frac{A e^x \, dx}{x - a} \quad \text{devient} \quad \sum A e^a \int \frac{e^x \, dx}{x}.$$

Note II. — u étant un polynome entier en x, on a

$$\int u e^x \, dx = (u - u' + u'' - u''' + \ldots) e^x.$$

On peut écrire cette formule sous forme symbolique de la manière suivante :

$$\int u e^x \, dx = e^x \times (1 + D)^{-1} u.$$

Digitized by Google

On développe $(1+D)^{-1}$ suivant les puissances croissantes de D

$$1 - D + D^2 - D^3 + \ldots,$$

et l'on considère les termes du développement comme des indices de dérivation appliqués à u.

On a, en général, pour une intégrale multiple d'ordre n

$$\int_{(n)} ue^x\,dx^n = \int dx \int dx \int dx \ldots \int ue^x\,dx = e^x(1+D)^{-n}u.$$

Il suffit de vérifier que si cette formule est exacte pour une valeur de n, elle l'est pour la valeur suivante $n+1$.

D'une manière plus générale, on a

$$\int_{(n)} ue^{ax}\,dx^n = e^{ax} \times (1 + aD)^{-n}u,$$

en supposant $a = i$ ou a imaginaire quelconque, on obtient les formules relatives au cas où la différentielle renferme les fonctions circulaires sin et cos avec ou sans exponentielles.

Ces formules symboliques sont faciles à retenir et peuvent être utiles pour les applications.

BIBLIOGRAPHIE.

Traité de Mécanique rationnelle, Tome III : Équilibre et mouvement des milieux continus; par M. *P. Appell*, Membre de l'Institut. — 1 vol. in-8 de 558 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1903. Prix : 15fr.

Voici près d'un an que le troisième Tome du *Traité de Mécanique rationnelle* est paru et l'on pourrait s'étonner à

Digitized by Google

bon droit de ce qu'il n'a pas encore été signalé dans ce journal. C'est que les Ouvrages de l'éminent doyen de la Faculté des Sciences de Paris sont de ceux qu'il ne faut pas lire à la légère et qui méritent qu'on en fasse un compte rendu détaillé.

Ce Volume est remarquable.

Nous y retrouvons les admirables qualités d'exposition qui font de M. Appell l'un des premiers professeurs de France et grâce auxquelles il sait rendre faciles les sujets les plus abstraits. Entre ses mains tout devient clair et simple; et, à lire son exposition de ces théories difficiles qui n'ont vu que lentement le jour, on s'étonne presque, tant elles paraissent naturelles, qu'on ait mis si longtemps à les échafauder.

Ce Tome troisième, et probablement dernier, est réservé à l'étude de l'*équilibre et du mouvement des milieux continus*.

A première vue, les deux Chapitres du début paraissent donc hors du cadre de l'Ouvrage, puisque l'un est un Chapitre de Calcul intégral et le suivant une étude du potentiel newtonien. L'un et l'autre sont cependant utiles, pour ne pas dire nécessaires, à la suite.

Le Chapitre XXVIII (premier du Volume) contient en effet la démonstration et l'étude de la formule de Green

$$\int\int\int_V \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) d\tau = \int\int_S (\alpha F + \beta G + \gamma H)\, d\sigma$$

et de la formule de Stokes

$$\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$
$$= \int\int_S \left[\alpha\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \beta\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] d\sigma$$

qui, l'une et l'autre, servent de base à l'étude des propriétés des intégrales de volumes et d'aires dans un champ de vecteurs.

Immédiatement, et indépendamment de toute signification concrète, nous apprenons à connaître la notion de *flux* à travers une surface, de *divergence* d'un vecteur en un point, de *tourbillon* d'un vecteur et de *flux de tourbillon*.

De telle sorte que, lorsqu'on s'est bien assimilé les résultats fondamentaux de ce Chapitre d'Analyse pure, la lecture de la suite du Volume n'est plus qu'un jeu.

Digitized by Google

Ces généralités trouvent immédiatement une première application dans la théorie de l'attraction universelle et du potentiel qui fait l'objet du Chapitre XXIX suivant.

Nous y retrouvons, avec un peu plus de détails, les *Leçons sur le Potentiel* du même auteur, publiées jadis à la librairie Carré et Naud. L'étude de l'attraction de points isolés, de surfaces, de volumes, avec les applications classiques à la droite, au plan, à la sphère et aux ellipsoïdes, conduit à la connaissance de l'équation de Laplace

$$\Delta U = 0$$

et à celle des fonctions harmoniques qui la vérifient. L'analogie des formules avec beaucoup de celles qui suivront serait déjà une raison suffisante pour expliquer la place que M. Appell a donnée au potentiel newtonien dans son œuvre, si, par ailleurs, les tendances naturelles que l'on a d'assimiler l'électricité à un fluide n'imposaient pas cette classification.

Avec le Chapitre XXX nous entrons réellement dans l'étude des milieux continus par la démonstration des équations générales d'équilibre et de mouvement d'un tel milieu, indépendamment de toute hypothèse sur sa nature. La seule application du principe de solidification à un élément quelconque de volume pris dans le milieu, conduit aux équations fondamentales

$$(1)\qquad \begin{cases} T_x = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma, \\ T_y = T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma, \\ T_z = T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma; \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \rho(X - J_x) = \dfrac{\partial N_1}{\partial x} + \dfrac{\partial T_3}{\partial y} + \dfrac{\partial T_2}{\partial z}, \\[2mm] \rho(Y - J_y) = \dfrac{\partial T_3}{\partial x} + \dfrac{\partial N_2}{\partial y} + \dfrac{\partial T_1}{\partial z}, \\[2mm] \rho(Z - J_z) = \dfrac{\partial T_2}{\partial x} + \dfrac{\partial T_1}{\partial y} + \dfrac{\partial N_3}{\partial z} \end{cases}$$

qui fournissent l'effort T sur tout élément de surface et définissent le mouvement.

L'introduction de la *quadrique directrice* et de l'*ellipsoïde des efforts* permet de donner une interprétation géométrique simple des résultats.

Le Chapitre XXXI est l'application des formules générales à

Digitized by Google

l'*Hydrostatique*. Ici des hypothèses sont nécessaires. Celle de la *fluidité* conduit à admettre que

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0, \qquad N_1 = N_2 = N_3 = p,$$

p étant la pression; et cette pression elle-même ne peut être définie que par l'*équation caractéristique* du fluide entre la pression, la densité et la température, dont seule l'expérience pourra déterminer la forme. C'est ici que nous commençons à sentir que nous sommes aux confins de la Mécanique dite *rationnelle*, à l'un de ces points de jonction où la Mécanique théorique se soude et se mêle à la Mécanique appliquée et à la Physique. C'est là que l'on voit combien sont précaires les classifications artificielles que nous avons faites dans la Science!

Après l'exposé de l'Hydrostatique classique, principes d'Archimède et de Pascal, calcul des poussées, etc., M. Appell aborde, avec quelques détails, la question délicate de l'équilibre des corps flottants.

Ce sont surtout les remarquables travaux de M. Guyou, avec d'élégantes démonstrations géométriques, qu'il nous fait connaître.

Au Chapitre XXXII nous entamons l'étude générale des déformations d'un milieu continu, au point de vue géométrique. On ne se préoccupe pas encore de savoir *comment* cette déformation se produit, comment elle dépend du temps ou des efforts qui s'exercent sur le milieu; on se contente d'étudier les propriétés mêmes de cette déformation, supposée produite.

Tout d'abord, en exprimant que la *masse* d'un élément du milieu reste invariable dans la déformation, on obtient l'équation fondamentale dite *de continuité*

$$\rho_1 D - \rho = 0$$

qui lie les densités ρ et ρ_1 d'un élément avant et après la déformation au déterminant fonctionnel D.

L'analyse du problème conduit ensuite à des conclusions dont l'analogie avec celles relatives au déplacement d'un corps solide est complète.

Il nous suffira de citer le théorème du n° 679 :

Toute déformation homogène peut être obtenue par une translation et une rotation suivie d'une déformation pure.

Digitized by Google

La déformation dite *pure* est celle que subirait par exemple un corps que l'on chaufferait sans le déplacer. Le déplacement du corps solide n'est alors que le cas particulier où la déformation pure est nulle, où $\rho = \rho_1$ et $D = 1$ pour tous les éléments.

Le cas particulier de la déformation *infiniment petite*, étudiée avec soin dans le dernier paragraphe de ce Chapitre, a une importance toute particulière puisqu'il sert d'introduction au Chapitre XXXIII réservé à la cinématique des milieux continus. Ici le déterminant D a la valeur particulièrement simple

$$D = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

où u, v, w désignent les projections du déplacement infiniment petit de l'élément et, par suite, lorsqu'il s'agit d'un liquide incompressible, pour lequel $\rho = \rho_1$, $D = 1$, on a l'équation fondamentale

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

à laquelle se réduit l'équation de continuité.

Le problème maintenant se précise.

Après avoir étudié, suivant les méthodes de M. M. Cosserat, *une* déformation, nous abordons maintenant l'examen d'une *suite ininterrompue* de déformations successives. Les coordonnées x, y, z d'un élément sont alors des fonctions du temps dont il s'agit d'étudier la forme lorsqu'on embrasse à la fois tous les éléments de la masse.

La question peut alors se présenter sous deux faces.

D'une part, on peut considérer *un élément* particulier de la masse et le suivre sans cesse dans son mouvement. Les coordonnées x, y, z sont alors des fonctions du temps t et des coordonnées a, b, c de sa position initiale : ce sont les variables a, b, c, t de Lagrange.

Ou bien, d'autre part, on peut porter son attention sur *un point donné* de l'espace et examiner ce qu'il advient en ce point lorsque les éléments fluides y passent. Ce qui intéresse alors c'est de connaître à chaque instant les composantes u, v, w de la vitesse de l'élément qui passe en ce point. Ces composantes sont alors des fonctions des coordonnées x, y, z du point considéré et du temps t : ce sont là les variables d'Euler.

Digitized by Google

Ce sont surtout ces variables dont l'emploi paraît fécond.

En chaque point de l'espace on définit ainsi à chaque instant un vecteur W qui est la vitesse de la molécule fluide qui y passe et l'on a ainsi un champ de vecteurs auquel on peut appliquer toutes les propositions générales relatives aux flux et aux tourbillons, établies dans le Chapitre initial.

Le terrain est maintenant déblayé et, par étapes successives, nous sommes finalement arrivés à connaître tous les éléments qui nous sont nécessaires pour appliquer les équations fondamentales (1) et (2) du mouvement des milieux continus au cas particulier des fluides.

Nous atteignons le but, la dynamique des fluides, au Chapitre XXXIV qui se prolonge par l'admirable théorie des tourbillons de Helmholtz, exposée au Chapitre XXXV, et une étude approfondie, au Chapitre XXXVI, des mouvements parallèles à un plan.

Ici, puisque

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0, \qquad N_1 = N_2 = N_3 = p,$$

les équations (2) se réduisent à

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho(X - J_x), \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho(Y - J_y), \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho(Z - J_z),$$

et l'équation de continuité devient

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0.$$

La Cinématique nous fournit J_x, J_y, J_z et l'équation caractéristique du fluide nous donne une relation entre ρ, p et la température τ.

Après la démonstration du fameux théorème de Lagrange sur la conservation du potentiel des vitesses, l'auteur nous donne la série des applications classiques de l'Hydrodynamique : filets liquides, théorèmes de Bernoulli et de Toricelli, écoulement d'un gaz, etc.

La théorie des tourbillons, nous dit M. Appell, constitue le plus grand progrès fait en Hydrodynamique depuis les recherches d'Euler, Lagrange et Cauchy. C'est là un des Chapitres les plus intéressants de l'Ouvrage. Les propriétés des *Wirbelfaden*, des anneaux et filets de tourbillon qui se déplacent et se déforment en restant sans cesse formés des mêmes éléments

Digitized by Google

fluides; les explications théoriques de phénomènes complexes qui en résultent sont un des plus remarquables exemples de la puissance féconde de l'application de l'Analyse à l'étude des phénomènes naturels.

L'Ouvrage se termine par un Chapitre de notions sur la théorie de l'élasticité et un très court Chapitre sur les travaux encore peu étendus relatifs aux liquides visqueux.

La théorie de l'élasticité à elle seule, avec ses applications, pourrait remplir de gros volumes. Il faut savoir se limiter, d'autant plus que cette théorie, tout intéressante qu'elle soit, paraît, au moins sous sa forme purement théorique actuelle, en l'absence de connaissances expérimentales relatives aux déformations *finies* des corps élastiques, ne pouvoir s'appliquer que dans des limites très restreintes aux problèmes variés que nous offre la pratique.

Cette rapide analyse ne peut évidemment donner qu'une faible idée de ce bel Ouvrage, de son ordonnance parfaite, de sa grande limpidité.

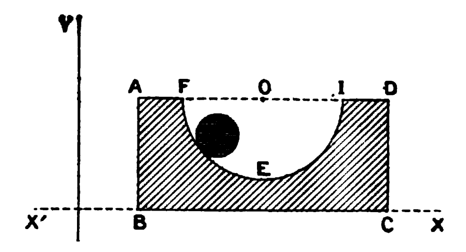
Il faut le lire.

CARLO BOURLET.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Dans un rectangle homogène d'épaisseur très petite* ABCD, *on a pratiqué une cavité demi-circulaire* IEF *de centre* O *situé sur* AD.



Ce rectangle est assujetti à rester dans un plan vertical XY *et le côté* BC *peut glisser sans frottement sur l'horizontale* X'X.

Digitized by Google

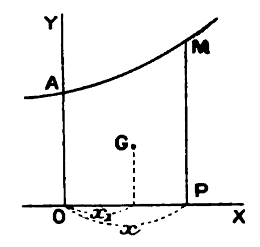
Une poulie ayant la forme d'un cercle homogène, de même épaisseur que le rectangle, peut rouler sans glisser sur le demi-cercle IEF *en restant toujours dans le plan vertical* XY.

On place à l'instant initial la poulie en contact en F *avec la demi-circonférence* FEI *et l'on suppose l'ensemble des deux corps en repos à l'instant initial.*

On demande d'étudier le mouvement de l'ensemble de ces deux solides et de déterminer la réaction exercée par la poulie sur la masse FABCDI.

On désignera par R *le rayon de la circonférence* OF, *par* a *le rayon de la poulie, par* M' *la masse du rectangle évidé et par* m *la masse de la poulie.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On demande de déterminer une courbe telle que l'abscisse* x_1 *du centre de gravité de l'aire* OAMP *comprise entre la courbe, l'axe des* X, *l'axe*



des Y *et une ordonnée variable* MP *et l'abscisse* x *du point* M *soient dans un rapport constant* m, *en sorte que l'on ait*

$$x_1 = mx.$$

Plus généralement, chercher une courbe telle que l'on ait

$$x_1 = mx^k,$$

k *étant un nombre donné.*

On pourra chercher encore une courbe telle que

$$x_1 = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ *étant une fonction donnée de* x. (Juillet 1903.)

Digitized by Google

Épreuve écrite. — I. *Étant donné un système de forces appliquées à un corps solide, on demande de déterminer géométriquement et analytiquement la position de l'axe central des moments.*

Trouver la valeur du couple résultant en un point de l'axe central.

Application. — *Cas d'un système de forces qui se réduit, en prenant pour centre de réduction l'origine des coordonnées, à une force* $R(X, Y, Z)$ *et à un couple d'axe* $G(L, M, N)$, *pour lesquels on a*

$$L = mX, \qquad M = nY, \qquad N = 0, \qquad Z = 0,$$

m et n étant deux nombres donnés.

II. *Un corps solide pesant est assujetti à tourner autour d'un axe horizontal* Oz *passant par deux points fixes* O *et* O'. *Le centre de gravité du corps se trouve dans le plan vertical* xOy *perpendiculaire à* Oz *à une distance de l'axe égale à* a.

On demande de déterminer la valeur des pressions exercées sur les deux points fixes O *et* O' *lorsque le corps est en mouvement.*

Que deviennent ces pressions :

1° *Dans le cas où* Oz *est un axe principal d'inertie relatif au point* O;

2° *Dans le cas où* Oz *est un axe principal relatif au point* O'.

On donne la masse du corps et les éléments de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O.

Épreuve pratique. — *Un triangle isoscèle* ABC *dont les côtés sont formés par des tiges homogènes pesantes, est assujetti à se mouvoir dans un plan vertical en tournant autour d'un axe fixe horizontal, perpendiculaire à ce plan et passant par son sommet* A.

Trouver la position du centre d'oscillation.

Parmi tous les triangles de même périmètre, quel est celui pour lequel le centre d'oscillation est le plus rapproché du point A?

On donne la longueur commune b *des côtés égaux* AB, AC *et la longueur* a *de* BC. (Novembre 1903.)

Digitized by Google

Lyon.

Épreuve écrite. — I. *On a une hélice* H, *variable avec le temps* t *et donnée par les équations*

$$x = R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi, \qquad z = (K + nt)\varphi,$$

où R, K, n *sont des constantes positives et l'axe des* z *vertical et dirigé vers le haut.*

Un point pesant M, *de masse* m, *est assujetti à parcourir l'hélice* H, *avec frottement, le coefficient de frottement étant* f.

Poser les équations différentielles du mouvement et parvenir à une équation différentielle Ω *entre* φ *et* t.

Intégrer Ω *dans le cas où*

$$f = 0$$

et où, pour $t = 0$,

$$\varphi = \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Solution.

On remarque que les diverses hélices mobiles s'obtiennent en imprimant, à une hélice rigide, une translation uniforme parallèle à l'axe des z. On est ramené ainsi à un problème facile de mouvement relatif.

II. *Soient*

S *un corps solide mobile ;*
A *un point de* S ;
D *une droite passant par* A *et invariablement liée à* S ;
Δ *une droite fixe de l'espace ;*
Ω *l'axe instantané de rotation et de glissement dans le mouvement du corps* S.

On admettra que D *reste constamment perpendiculaire à* Δ, *et que* A *parcourt* Δ.

Établir que la perpendiculaire commune à D *et* Ω *se trouve dans le plan mené par* A *perpendiculairement à* D.

On admet ensuite : 1° que A *parcourt* Δ *d'un mouvement*

Digitized by Google

uniforme; 2° *que, dans le corps* S, *le lieu de l'axe* Ω *est un hyperboloïde de révolution* U *autour de* D.

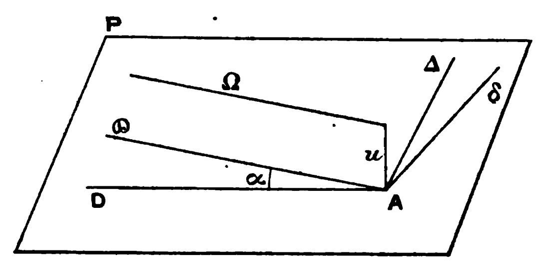
Trouver : 1° *quel est le mouvement de* S; 2° *quel est le lieu de* Ω *dans l'espace?*

SOLUTION.

Si g est une droite, on nommera, pour abréger :

$\overline{g}$ une rotation élémentaire autour de l'axe g;
g_0 la vitesse angulaire de $\overline{g}$;
g' une translation élémentaire parallèle à g;
g'_0 la vitesse de g'.

D décrit une surface de vis à filet carré; donc le mouvement élémentaire de S résulte de $\overline{D}$, $\overline{\Delta}$, Δ'. La résultante $\overline{\omega}$ de $\overline{D}$



et $\overline{\Delta}$ aura son axe ω situé sur le plan P et faisant avec D l'angle α et avec Δ l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Δ' se décompose en ω' et en δ', l'axe δ étant normal à ω et situé sur P.

La rotation $\overline{\omega}$ et la translation δ' se composent en une rotation $\overline{\Omega}$, dont l'axe Ω est parallèle à ω et situé dans le plan mené par ω normalement à δ. De plus, ω' coïncide avec Ω'.

Ω est l'axe instantané de rotation et de glissement.

La perpendiculaire à P en A est normale à Δ, D, Ω. La plus courte distance u est la même pour Ω et D et pour Ω et Δ.

Par hypothèse et dans l'hyperboloïde U, on a u et α constants. Ω est tangente à une hélice tracée sur un cylindre de révolution autour de Δ, de rayon u. Ω engendre une hélicoïde développable W, qui a avec U la génératrice Ω commune. U, entraînant S, roule et glisse sur W, lequel est fixe.

Digitized by Google

Ensuite on a

$$\Omega'_0 = \mathcal{Q}_0 = \Delta'_0 \sin\alpha = \text{const.},$$

puisque

$$\Delta'_0 = \text{const.}$$

Enfin

$$\Omega_0 = \mathcal{Q}_0 = \frac{\delta'_0}{u} = \frac{\Delta'_0 \cos\alpha}{u} = \text{const.}$$

La vitesse angulaire autour de la génératrice commune Ω, ainsi que la vitesse de glissement le long de la même génératrice sont constantes. (Juillet 1903.)

Montpellier.

Épreuve écrite. — *Un tube circulaire infiniment mince, homogène et pesant, est assujetti par des liaisons sans frottement, à se déplacer dans un plan vertical fixe tangentiellement à une horizontale fixe. Un point matériel pesant se meut sans frottement dans le tube. Le rayon du tube est égal à l'unité de longueur; les masses du tube et du point sont toutes deux égales à l'unité de masse. Le tube étant au repos, le point pesant est placé au point de contact du tube avec l'horizontale, et lancé horizontalement avec une vitesse donnée* ω.

Étudier le mouvement du système; calculer la réaction du tube sur le point et montrer que l'on peut choisir ω *de manière que le point décrive tout le tube sans que la réaction change de signe.*

Épreuve pratique. — *Un plan* Π *se meut par rapport à un plan fixe* P *avec lequel il coïncide, de telle sorte que deux points déterminés* A *et* B *de* Π *décrivent, dans* P, *deux cercles égaux, extérieurs l'un à l'autre, et dont la distance des centres est égale à la longueur* AB. *On suppose de plus que le mouvement ne se réduit pas à une translation continue.*

Trouver les courbes qui roulent sans glisser l'une sur l'autre, et indiquer sommairement ce que sont les trajectoires des différents points de Π.

Y a-t-il, à certains instants, une translation tangente?

(Juillet 1903.)

Digitized by Google

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une barre rectiligne, rigide, homogène et pesante, s'appuie par son extrémité inférieure* A *sur un plan horizontal fixe sur lequel elle peut glisser sans frottement. On imprime à la barre la rotation* ω *autour de la verticale ascendante issue de* A, *et l'on demande d'étudier son mouvement en supposant qu'elle ne cesse pas de s'appuyer sur le plan horizontal fixe.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un plan mobile, lié à un système d'axes* oxy, *glisse sur un plan fixe lié à un système d'axes* $o_1x_1y_1$. *On suppose que la rotation instantanée a une valeur constante. Dans cette hypothèse, écrire les valeurs des projections sur* ox, oy *de la vitesse et de l'accélération d'un point quelconque du plan mobile.*

Trouver, à un instant donné, le lieu des points dont l'accélération passe par un point donné du plan mobile.

(Novembre 1903.)

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un tore se meut d'un mouvement uniforme autour de son axe supposé vertical; un point matériel pesant de masse* 1 *est assujetti à ne pas quitter la surface de ce tore.*

On établira de diverses manières les équations et les intégrales premières du mouvement, en particulier par la méthode de Coriolis, par les théorèmes généraux et par les équations de Lagrange.

On supposera qu'à l'instant initial le point matériel se trouve sur l'équateur au point le plus éloigné de l'axe, et que sa vitesse initiale est horizontale; on donnera un aperçu du mouvement du point sur le tore et l'on s'attachera au cas où le rayon r *du cercle générateur est égal à* 10, *la distance* a *de son centre à l'axe est égale à* 20, *la constante* g *de la gravitation égale à* 981 *et où l'on a, entre la vitesse angulaire* ω *de rotation du tore et la vitesse initiale* v_0, *la relation*

$$\omega + \frac{v_0}{a+r} = \sqrt{\frac{g}{45}}.$$

On calculera la pression exercée par le point matériel sur le tore.

Digitized by Google

Épreuve pratique. — *Un tronc de cône homogène dont la hauteur est de 4^{cm} et les rayons de base de 5^{cm} et de 2^{cm} peut osciller autour de l'une de ses arêtes latérales supposée horizontale; on le place d'abord dans une position telle que la hauteur soit dans un même plan horizontal avec l'axe de suspension, puis on l'abandonne sans vitesse initiale.*

Calculer la durée de l'oscillation du tronc de cône.

Solution.

Suivons la méthode de Coriolis; prenons des axes $Oxyz$ entraînés avec le tore, O étant le centre et Oz l'axe de rotation dirigé vers le bas; la force centrifuge a pour composantes $\omega^2 x$, $\omega^2 y$ et o; la force centrifuge composée a pour composantes $2\omega\frac{dy}{dt}$, $-2\omega\frac{dx}{dt}$ et o; soient N_x, N_y, N_z les composantes de la réaction normale.

Les équations du mouvement sont

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \omega^2 x + 2\omega\frac{dy}{dt} + N_x,\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \omega^2 y - 2\omega\frac{dx}{dt} + N_y,\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \qquad\qquad g + N_z. \end{aligned}\right.$$

On en déduit deux intégrales premières, celle des moments des quantités de mouvement et celle des forces vives, dans lesquelles la réaction se trouve éliminée. Désignons par ρ, θ et z les coordonnées semi-polaires du mobile M et par φ l'angle formé avec le plan de l'équateur par le rayon du cercle générateur aboutissant au point M.

La première intégrale est

$$\rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}+\omega\right) = C$$

ou bien

$$(2)\qquad (a + r\cos\varphi)^2\left(\frac{d\theta}{dt}+\omega\right) = C;$$

Digitized by Google

la deuxième est

$$v^2 = \omega^2\rho^2 + 2gz + 2h$$

ou bien

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + (a + r\cos\varphi)^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$
$$= \omega^2(a + r\cos\varphi)^2 + 2gr\sin\varphi + 2h.$$

En éliminant $\frac{d\theta}{dt}$, et tenant compte des conditions initiales, on a

$$(3)\quad r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{C^2}{(a+r)^2} - \frac{C^2}{(a + r\cos\varphi)^2} + 2gr\sin\varphi,$$

avec

$$C = (a+r)^2\left(\frac{v_0}{a+r} + \omega\right).$$

L'équation (3) définit φ en fonction du temps; on voit que le second membre s'annule pour $\varphi = 0$ et n'est positif que si $\sin\varphi$ est positif; en prenant la dérivée de ce second membre, on voit qu'elle est d'abord positive, mais décroît constamment et s'annule une seule fois entre 0 et π; on en conclut que le second membre de (3), d'abord nul, est ensuite positif, puis décroît et s'annule pour une valeur de φ comprise entre 0 et π; par conséquent le mobile oscille entre le parallèle primitif et un parallèle situé au-dessous de l'équateur.

L'équation (2) montre que le mouvement absolu se projette sur le plan des xy suivant la loi des aires; la troisième équation du système (1) sert à déterminer la pression normale. Dans le cas particulier indiqué dans l'énoncé, l'équation (3) prend la forme

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{5}\left(1 + \sin\varphi - \frac{9}{(2 + \cos\varphi)^2}\right).$$

(Juillet 1903.)

Digitized by Google

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1755.

(1897, p. 52.)

Calculer les deux intégrales définies

$$\int_0^\infty e^{-tx^2}\cos[x(y-\alpha)]\,dx,$$
$$\int_0^\infty e^{-tx^2}\sin[x(y-\alpha)]\,dy,$$

où t désigne une constante POSITIVE *et où y et α sont des constantes* ARBITRAIRES. (C. BOURLET.)

SOLUTION

Par M. V. JAMET.

L'étude de ces deux intégrales se rattache à celle de l'intégrale suivante :

$$\int_0^\infty e^{\;tx^2+\lambda x}\,dx,$$

où t désigne encore une constante positive, et λ une constante arbitraire, réelle ou imaginaire. Or la première question à résoudre est celle-ci; l'intégrale proposée a-t-elle un sens? En d'autres termes l'intégrale U, définie comme il suit :

$$\mathrm{U}=\int_0^{\mathrm{X}} e^{-tx^2+\lambda x}\,dx,$$

a-t-elle une limite finie, quand X augmente au delà de toute limite, en restant sans cesse réelle et positive? Or cette intégrale peut être transformée comme il suit :

$$\mathrm{U}=e^{\frac{\lambda^2}{4t}}\int_0^{\mathrm{X}} e^{-\left(\sqrt{t}x+\frac{\lambda^2}{2\sqrt{t}}\right)^2}dx;$$

et si l'on pose

$$\sqrt{t}x-\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}=\sqrt{t}z,$$

Digitized by Google

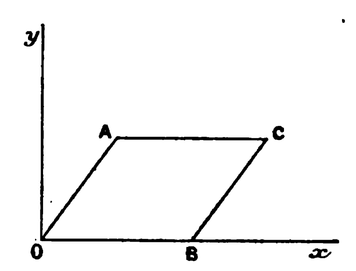
on trouve :

$$U = e^{+\frac{\lambda^2}{4t}} \int e^{-tz^2}\, dz,$$

en supposant que la variable z décrit un vecteur AC, parallèle à l'axe Ox, et de longueur X, issu du point A dont l'affixe est $\frac{\lambda}{2t}\cdot$ Mais l'intégrale

$$\int e^{-tz^2}\, dz,$$

calculée tout le long du contour du parallélogramme OBCA



est nulle, et nous aurons établi que l'intégrale proposée a une limite, savoir :

$$\lim \int_0^X e^{-tz^2}\, dz - \int_{OA} e^{-tz^2}\, dz,$$

si nous démontrons : 1° que le premier terme de cette dernière expression a une limite finie; 2° que l'intégrale

$$\int_{BC} e^{-tz^2}\, dz$$

tend vers zéro, lorsque le segment OB, égal à X, est de plus en plus grand. Or :

1°

$$\int_0^X e^{-tz^2}\, dz = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\frac{X}{\sqrt{t}}} e^{-y^2}\, dy,$$

en vertu de la transformation

$$z = \frac{y}{\sqrt{t}},$$

Digitized by Google

et l'on sait que, X croissant au delà de toute limite, l'intégrale écrite au second membre de cette égalité a pour limite $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

2° L'équation de la droite BC est de la forme

$$x = X + \alpha y,$$

α désignant une constante; et si l'on désigne par h l'ordonnée commune aux deux points A, C, on trouve

$$\int_{BC} e^{-tz^2}\,dz = (\alpha + i)\int_0^h e^{-(X+\alpha y+iy)^2}\,dy$$
$$= (\alpha + i)\int_0^h e^{-[X^2+(\alpha^2-1)y^2+2\alpha Xy+2iy(X+y)]}\,dy.$$

Son module est donc inférieur à

$$(1) \qquad \sqrt{\alpha^2+1}\int_0^h e^{-[X^2+2\alpha yX+(\alpha^2-1)y^2]}\,dy.$$

Mais l'exposant de e qui figure sous le signe d'intégration est maximum ou minimum pour $y = -\frac{\alpha X}{\alpha^2 - 1}$, et nous pouvons supposer X assez grand pour que la valeur numérique du second membre de cette égalité ne soit pas comprise entre zéro et h. Donc, y variant de zéro à h, la fonction sous le signe $\int$ varie sans cesse dans le même sens, et l'expression (1) est comprise entre le plus grand et le plus petit des deux nombres

$$\frac{h\sqrt{\alpha^2+1}}{e^{X^2}}$$

et

$$\frac{h\sqrt{\alpha^2+1}}{e^{X^2+2\alpha hX+(\alpha^2-1)h^2}},$$

qui tendent vers zéro l'un et l'autre, quand X augmente au delà de toute limite; ce qui démontre la proposition énoncée.

Ceci suppose toutefois que $\alpha^2 - 1$ n'est pas nul; si $\alpha^2 - 1$ était nul, l'étude de l'expression (1) conduirait encore plus facilement à la même conclusion.

De tout ce qui précède, résulte l'égalité

$$U = \int_0^\infty e^{-tx^2+\lambda x}\,dx = e^{\frac{\lambda^2}{4t}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}} - \int_{OA} e^{-tz^2}\,dz\right),$$

Digitized by Google

ou encore

$$(2)\qquad \int_0^\infty e^{-tx^2+\lambda x}\,dx = e^{\frac{\lambda^2}{4t}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}} - \int_0^{\frac{\lambda}{2t}} e^{-tz^2}\,dz\right).$$

Si maintenant nous faisons $y - x = \beta$, nous voyons que la première des intégrales proposées par M. Bourlet, savoir

$$\int_0^\infty e^{-tx^2}\cos[x(y-x)]\,dx,$$

est égale à

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-tx^2+i\beta x}\,dx + \int_0^\infty e^{-tx^2-i\beta x}\,dx\right)$$

et, d'après notre formule (2), à

$$\frac{1}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4t}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{t}} - \int_0^{\frac{\beta i}{2t}} e^{-tz^2}\,dz - \int_0^{-\frac{\beta i}{2t}} e^{-tz^2}\,dz\right).$$

Mais, dans ces deux dernières intégrales, deux éléments répondant à deux valeurs de z égales et de signe contraire sont égaux et de signe contraire.

Donc la somme de ces deux intégrales est nulle.

Donc enfin

$$\int_0^\infty e^{-tx^2}\cos\beta t\,dt = \tfrac{1}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4t}}\sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

La deuxième intégrale est égale

$$\frac{1}{2i}\left(\int_0^\infty e^{-tx^2+i\beta x}\,dx - \int_0^\infty e^{-tx^2-i\beta x}\,dx\right),$$

et, toujours en vertu de la formule (2), à

$$\frac{i}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4t}}\int_0^{\frac{\beta i}{2t}} e^{-tx^2}\,dx.$$

Il nous reste à faire connaître un développement de cette fonction en série entière procédant suivant les puissances de β, et nous vérifierons ensuite que ce développement est valable

Digitized by Google

pour toutes les valeurs possibles de β. A cet effet, posons

$$V = \frac{i}{2} e^{-\frac{\beta^2}{4t}} \int_0^{\frac{\beta i}{2t}} e^{-tx^2} dx.$$

Nous en concluons

$$(3) \qquad \frac{dV}{d\beta} = -\frac{\beta}{2t} V - \frac{1}{4t},$$

et, en différentiant p fois de suite les deux membres de cette dernière équation,

$$\frac{d^{p+1} V}{d\beta^{+1}} = -\frac{1}{2t}\left(\beta \frac{d^p V}{d\beta^p} + p \frac{d^{p-1} V}{d\beta^{p-1}}\right).$$

Si donc la fonction V est identique, pour les valeurs de β comprises dans un certain domaine de l'origine, à la somme d'une série de la forme

$$a_0 + a_1 \beta + a_2 \beta^2 + \ldots + a_p \beta^p + \ldots,$$

il suffit de faire, dans l'égalité ci-dessus, $\beta = 0$, et de diviser ses deux membres par $\overline{p+1}\,!$ pour trouver immédiatement

$$a_{p+1} = -\frac{1}{2t} \frac{a_{p-1}}{p+1}.$$

Or la fonction considérée s'annulant avec β, on trouve $a_0 = 0$ et, par suite, $a_2 = 0$, $a_4 = 0$, $a_6 = 0$, ... Mais on trouve aussi

$$a_3 = \frac{1}{2t} \frac{a_1}{1.3},$$

$$a_5 = \frac{1}{2t} \frac{a_3}{5} = \frac{1}{4t^2} \frac{a_1}{1.3.5},$$

$$a_{2k+1} = \frac{(2t)^k}{(-1)^k} \frac{a_1}{1.3.5.7\ldots\overline{2k+1}}.$$

Le développement cherché est donc de la forme

$$a_1\left(\beta - \frac{1}{2t} \frac{\beta^3}{1.3} + \frac{1}{4t^2} \frac{\beta^5}{1.3.5} - \ldots + \frac{(-1)^k}{(2t)^k} \frac{\beta^{2k+1}}{1.3.5\ldots\overline{2k+1}} + \ldots\right),$$

Digitized by Google

et l'on voit sans peine que le rapport du terme de rang k au terme précédent, dans la série entre parenthèses, tend vers zéro lorsque le nombre k augmente au delà de toute limite, de sorte que cette série est absolument et uniformément convergente à l'intérieur de tout cercle ayant l'origine pour centre. Quant au coefficient a_1, il est égal à la valeur que prend, pour $\beta = 0$, la dérivée de la fonction V. Donc, en vertu de l'équation (3),

$$a_1 = -\frac{1}{4t}.$$

Donc enfin

$$V = -\frac{1}{4t}\left(\beta - \frac{1}{2t}\frac{\beta^3}{1.3} + \frac{1}{4t^2}\frac{\beta^5}{1.3.5} - \ldots\right).$$

Ainsi s'exprime, en fonction de $\beta = y - \alpha$, la deuxième intégrale de M. Bourlet.

QUESTIONS.

1995. Étant donnés deux ternes de points ABC et A'B'C', si D est un point de la cubique gauche qui passe par ces six points, les quadriques, en nombre doublement infini, qui sont inscrites aux deux tétraèdres DABC et DA'B'C' passent par la droite d'intersection des plans ABC et A'B'C' (ce qui constitue d'ailleurs une condition simple).

(G. Fontené.)

1996. La caustique par réflexion d'une ellipse pour des rayons parallèles au grand axe est une sextique dont l'aire est

$$\frac{3\pi b(5a^2 - b^2)}{16a},$$

a et b étant les demi-axes de l'ellipse.

(E.-N. Barisien.)

Nota. — La question n° 1994 (mars 1904) est de M. *Canon*.

Digitized by Google

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS.

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS,

FONDÉ EN 1894 PAR C.-A. LAISANT ET É. LEMOINE,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Examinateur à l'École Polytechnique

ÉMILE LEMOINE,
Ingénieur civil,
Ancien Élève de l'École Polytechnique

ED. MAILLET,
Docteur ès Sciences,
Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Répétiteur à l'École Polytechnique,

A. GRÉVY,
Docteur ès Sciences,
Ancien Élève de l'École Normale supérieure,
Professeur au Lycée Saint-Louis.

Publication honorée d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique.

PRIX POUR UN AN (12 NUMÉROS) :

Paris, 7 fr. — Départements et Union postale, 8 fr. 50.

Un numéro spécimen est envoyé sur demande.

Chacune des années précédentes se vend........................... 7 fr.

MM. *Laisant* et *Lemoine* ont eu l'idée de mettre en rapport scientifique les ...hématiciens, au moyen d'un organe international dont le titre, L'INTER... ...AIRE DES MATHÉMATICIENS, indique le but. Ce recueil mensuel n'admet ...tres articles que des questions posées par les mathématiciens à leurs ...ues, soit pour en indiquer l'intérêt général, soit pour les besoins de ...rs recherches personnelles, et les réponses à ces questions. La Mathématique ... si vaste maintenant que nul n'en connaît complètement même une des ...ches et qu'une question de détail peut arrêter longtemps un savant de ...ier ordre, si ce détail sort du cadre de ses études ordinaires, tandis ...le ne serait qu'un jeu pour un autre.

...tte publication répond évidemment à un besoin, car, dès que les rédac...rs se sont occupés d'obtenir dans leurs relations les questions qui forme...ent les premiers numéros, et de les communiquer autour d'eux, pour avoir ...*ques réponses* dès l'origine, ils ont trouvé un accueil qui a dépassé leurs ...rances les plus optimistes; la liste des correspondants effectifs du journal, ... déjà longue, comprend les noms de membres de l'Institut et d'un ...nombre de géomètres connus, mêlés à beaucoup d'autres moins en vue, ... le but et l'essence même de l'*Intermédiaire des mathématiciens* est ...utile *à tous ceux qui cultivent la Mathématique*. L'idée était si nou...que les rédacteurs de l'*Intermédiaire* n'ont dû viser que des débuts ...modestes, puisque le prix annuel de l'abonnement n'est que de 7 francs ...r Paris, 8 fr. 50 pour la province et les pays de l'Union postale.

...n peut adresser les questions et communications soit à M. Ed. Maillet, ...ue de Fontenay, à Bourg-la-Reine, soit à M. Grévy, 62, rue Saint-Placide, ...aris.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Avril 1904.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

COMBEROUSSE (**Ch. de**), Ingénieur civil, Professeur au Conservatoire national des Arts et Métiers et à l'École centrale des Arts et Manufactures, ancien Professeur de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal. — **Algèbre supérieure**, à l'usage des Candidats à l'École Polytechnique, à l'École Normale supérieure, à l'École Centrale. Deux forts volumes in-8 (23,5 × 14). (Ces deux volumes forment les Tomes III et IV du *Cours de Mathématiques*.)................ 30 fr.

On vend séparément :

Ire Partie : *Compléments d'Algèbre élémentaire* (*Déterminants, fractions continues*, etc.). — *Combinaisons*. — *Séries*. — *Étude des fonctions*. — *Dérivées et différentielles, Premiers principes du Calcul intégral* (XXI-767 p.), avec 20 fig. 3e édition; 1904.. 15 fr.

IIe Partie : *Étude des imaginaires*. — *Théorie générale des équations* (XXIV-832 pages), avec 63 figures. 2e édition; 1890.. 15 fr.

FREYCINET (**Ch. de**), de l'Institut. — **De l'Expérience en Géométrie**. Volume in-8 de XX-175 pages; 1903.............................. 4 fr.

LACROIX (**S.-F.**). — **Éléments d'Algèbre**, à l'usage des candidats aux Écoles du Gouvernement. 25e édit., revue, corrigée et annotée par *Prouhet*, professeur de Mathématiques; 1888. (*L'introduction de cet Ouvrage dans les Écoles publiques a été autorisée par décision ministérielle.*) 6 fr.

34577 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.



NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME IV.

MAI 1904.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris,
à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,
ou à M. BOURLET, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,
ou à M. BRICARD, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.
(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Digitized by Google

Rédacteur de service : M. C. Bourlet.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences.

Besançon : M. N.... — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Duport. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. — Montpellier : M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers : M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

BOREL (Émile), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Collection de monographies sur la Théorie des fonctions**, publiée sous la direction de M. E. Borel.

Leçons sur la théorie des fonctions (Éléments de la théorie des ensembles et applications), par M. Emile Borel, 1898. .... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions entières; 1900. .... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les séries divergentes; 1901. .... 4 fr. 50 c.

Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France, recueillies et rédigées par M. Robert d'Adhémar; 1902. .... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au Collège de France, recueillies et rédigées par M. Ludovic Zoretti; 1903. .... 3 fr. 50 c.

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France, par M. Henri Lebesgue, 1904. ..... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions de variables réelles et leur représentation par des séries de polynomes, professées à l'École Normale supérieure par M. Emile Borel et rédigées par M. Maurice Fréchet, avec une Note de M. Paul Painlevé. .... (*Sous presse.*)

Leçons sur les séries de polynomes. .... (*En préparation.*)

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par M. Ernest Lindelöf. .... (*En préparation.*)

Quelques principes fondamentaux de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, par M. Pierre Cousin. .... (*En préparation.*)

Développements en séries de polynomes des fonctions analytiques, par M. Emile Borel. .... (*En préparation.*)

Leçons sur les fonctions discontinues, par M. René Baire. . (*En prép.*)

Leçons sur les correspondances entre variables réelles, par M. Jules Drach. .... (*En préparation.*)

Digitized by Google

CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES ».

Par erreur nous avons intitulé le concours annoncé dans le numéro d'avril « Concours pour 1904 », c'est évidemment « Concours pour 1905 » qu'il faut lire.

[A3k]

SUR LA RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DE L'ÉQUATION DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. G. HUMBERT.

La relation algébrique qui lie $p\frac{u}{2}$ et pu conduit, pour la résolution de l'équation générale du quatrième degré, à une formule remarquablement symétrique. J'établirai d'abord une expression, qui me semble nouvelle, de $p\frac{u}{2}$ en fonction de $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$; c'est la suivante :

$$(1)\quad p\frac{u}{2} = \frac{e_1(e_2-e_3)\sigma_1 u + e_2(e_3-e_1)\sigma_2 u + e_3(e_1-e_2)\sigma_3 u}{(e_2-e_3)\sigma_1 u + (e_3-e_1)\sigma_2 u + (e_1-e_2)\sigma_3 u},$$

ou, ce qui revient au même, en posant comme d'ordinaire $\sigma_{\alpha 0} u = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}$,

$$(2)\quad p\frac{u}{2} = \frac{e_1(e_2-e_3)\sigma_{10} u + e_2(e_3-e_1)\sigma_{20} u + e_3(e_1-e_2)\sigma_{30} u}{(e_2-e_3)\sigma_{10} u + (e_3-e_1)\sigma_{20} u + (e_1-e_2)\sigma_{30} u}.$$

Désignons par $\varphi(u)$ et $f(u)$ le numérateur et le dénominateur du second membre; ce sont des fonc-

Digitized by Google

tions elliptiques de u, aux périodes $4\omega_1$, $4\omega_2$, et dont les seuls pôles possibles, d'ordre *un* au plus, sont, dans un parallélogramme des périodes, les points 0, $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$. Or le point $u = 0$ n'est pôle ni pour $\varphi(u)$, ni pour $f(u)$; on a en effet, aux environs de ce point,

$$\sigma_{\alpha 0} u = \frac{1}{u} - \frac{1}{2} e_\alpha u + \left(\frac{1}{40} g_2 - \frac{1}{8} e_\alpha^2\right) u^3 + \left(\frac{1}{56} g_3 + \frac{1}{80} g_2 e_\alpha - \frac{1}{16} e_\alpha^3\right) u^5 + \ldots,$$

d'où l'on tire sans difficulté

$$\varphi(u) = -\frac{1}{2} u \; \Sigma e_\alpha^2 (e_\beta - e_\gamma) + u^5(\quad) + \ldots,$$

$$f(u) = -\frac{1}{8} u^3 \, \Sigma e_\alpha^2 (e_\beta - e_\gamma) + u^7(\quad) + \ldots.$$

Ainsi les termes en $\frac{1}{u}$ ont disparu dans $\varphi(u)$ et $f(u)$; de plus $f(u)$ ne contient pas de termes en u et en u^5, et $\varphi(u)$ pas de terme en u^3.

On en conclut que $\varphi(u)$ et $f(u)$ n'ont, comme pôles, que les pôles simples $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$; ce sont donc des fonctions d'ordre *trois*, et le seul zéro de $f(u)$, dans un parallélogramme des périodes contenant l'origine, est dès lors le zéro triple $u = 0$.

D'après cela, le quotient $\varphi(u) : f(u)$ n'admet, dans ce parallélogramme, qu'un seul pôle, $u = 0$, qui est double; et les formules précédentes donnent, autour de ce point,

$$(3) \qquad \frac{\varphi(u)}{f(u)} = \frac{4}{u^2} + \lambda u^2 + \ldots.$$

Il n'y a pas de terme constant, parce que les termes en u^3 et u^5 manquent respectivement dans $\varphi(u)$ et $f(u)$.

Digitized by Google

Il en résulte immédiatement que la différence

$$p\frac{u}{2} - \frac{\varphi(u)}{f(u)},$$

qui est une fonction elliptique aux périodes $4\omega_1$, $4\omega_2$, n'a pas de pôle dans un parallélogramme contenant l'origine; c'est donc une constante, et, en vertu de (3), une constante nulle. C. Q. F. D.

Cela posé, si l'on donne pu, les valeurs de $p\left(\frac{u}{2}\right)$ sont les quatre quantités

$$p\left(\frac{u}{2}\right), \quad p\left(\frac{u}{2}+\omega_1\right), \quad p\left(\frac{u}{2}+\omega_2\right), \quad p\left(\frac{u}{2}+\omega_3\right).$$

Or la formule (2), si l'on y remplace u par $u+2\omega_\alpha$, garde la même forme, à cela près que $\sigma_{\beta 0}u$ et $\sigma_{\gamma 0}u$ changent tous deux de signe; ou encore que $\sigma_{\alpha 0}u$ change seul de signe. Il en résulte, puisque $\sigma_{\alpha 0}u = \sqrt{pu - e_\alpha}$, que les quatre valeurs de $p\frac{u}{2}$, en fonction de pu, sont données par la formule

$$p\frac{u}{2} = \frac{e_1(e_2-e_3)\sqrt{pu-e_1}+e_2(e_3-e_1)\sqrt{pu-e_2}+e_3(e_1-e_2)\sqrt{pu-e_3}}{(e_2-e_3)\sqrt{pu-e_1}+(e_3-e_1)\sqrt{pu-e_2}+(e_1-e_2)\sqrt{pu-e_3}},$$

où les trois radicaux prennent tous les signes possibles, le signe de chacun d'eux étant d'ailleurs le même au numérateur et au dénominateur.

Si maintenant, dans l'équation classique qui lie pu et $p\frac{u}{2}$, on pose $pu = a$, $p\frac{u}{2} = x$, cette équation s'écrit

$$4(2x+a)(4x^3-g_2x-g_3) = \left(6x^2-\frac{1}{2}g_2\right)^2$$

ou

$$4x^4 - 16ax^3 + 2g_2x^2 + 4x(2g_3+ag_2) + \frac{1}{4}g_2^2 + 4ag_3 = 0.$$

Digitized by Google

Posons-y, pour faire disparaître le terme en x^3,

$$x = \xi + a,$$

il vient

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &4\xi^4 + 2\xi^2(g_2 - 12a^2)\\ &\quad + 8\xi(-4a^3 + g_2 a + g_3)\\ &\quad - 12a^4 + 6a^2 g_2 + 12 a g_3 + \frac{1}{4} g_2^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Soit, en général, une équation du type

$$(5)\qquad \xi^4 + 6A\xi^2 + 4B\xi + C = 0;$$

on la ramènera au type (4) en posant

$$\begin{aligned} g_2 - 12a^2 &= 12A,\\ g_3 + ag_2 - 4a^3 &= 2B,\\ -12a^4 + 6a^2 g_2 + 12 a g_3 + \frac{1}{4} g_2^2 &= 4C, \end{aligned}$$

ce qui donne, pour a, g_2 et g_3, les valeurs

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} a &= \frac{1}{6B}(C - 9A^2),\\ g_2 &= 12(A + a^2),\\ g_3 &= 2B - 12Aa - 8a^3. \end{aligned}\right.$$

Ainsi, étant donnée l'équation (5), pour la résoudre algébriquement, on formera, par (6), les quantités a, g_2, g_3; on calculera les racines e_1, e_2, e_3 de la *résolvante du troisième ordre* $4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$; et l'on aura, pour les quatre racines cherchées, la formule

$$\xi = -a + \frac{e_1(e_2 - e_3)\sqrt{a - e_1} + e_2(e_3 - e_1)\sqrt{a - e_2} + e_3(e_1 - e_2)\sqrt{a - e_3}}{(e_2 - e_3)\sqrt{a - e_1} + (e_3 - e_1)\sqrt{a - e_2} + (e_1 - e_2)\sqrt{a - e_3}},$$

où les trois radicaux prennent tous les signes possibles, le signe de chacun d'eux étant le même au numérateur et au dénominateur.

Digitized by Google

[U10a]

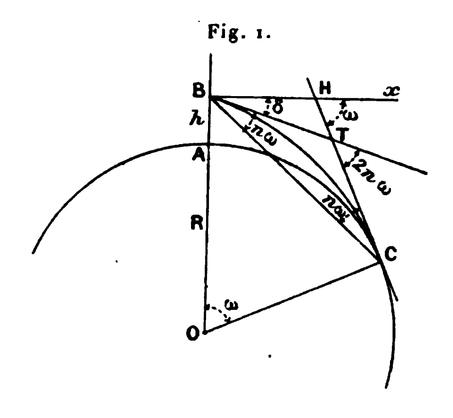
SUR LA DÉPRESSION DE L'HORIZON DE LA MER ET LE NIVELLEMENT GÉODÉSIQUE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1. Voici un procédé direct, très élémentaire, pour obtenir la formule qui fait connaître la dépression de l'horizon de la mer lorsque l'on tient compte de la réfraction géodésique.

Le rayon lumineux issu de B (*fig.* 1) et tangent en C

Fig. 1.



à la sphère terrestre pouvant, comme l'a démontré l'expérience, être assimilé à un arc de cercle, et les tangentes en B et en C à cet arc faisant, avec la corde BC, des angles $n\omega$ proportionnels à l'angle ω des verticales en B et en C (loi de Biot), on voit immédiatement que

$$\widehat{CHx} = \omega \qquad \text{(côtés perpendiculaires à AOC)},$$

$$\widehat{BTH} = 2n\omega \qquad \text{(extérieur au triangle BCT)},$$

Digitized by Google

et, par suite, que la dépression δ de l'horizon est liée à ω par la formule

$$(1) \qquad \delta = \omega - 2n\omega = (1-2n)\omega.$$

On voit, en outre, que, dans le triangle OBC,

$$\widehat{OCB} = \frac{\pi}{2} - n\omega,$$

$$\widehat{OBC} = \frac{\pi}{2} - (\delta + n\omega) = \frac{\pi}{2} - (1-n)\omega.$$

Par suite, ce triangle OBC donne

$$\frac{R+h}{R} = \frac{\cos n\omega}{\cos(1-n)\omega},$$

ou, en négligeant dans le second membre les quantités du quatrième ordre,

$$1 + \frac{h}{R} = \frac{1 - \frac{n^2\omega^2}{2}}{1 - \frac{(1-n)^2\omega^2}{2}} = 1 + \frac{(1-n)^2 - n^2}{2}\omega^2$$

$$= 1 + \frac{1-2n}{2}\omega^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{h}{R} = \frac{1-2n}{2}\omega^2.$$

Remplaçant, dans (1), ω par la valeur tirée de là, on a

$$(2) \qquad \delta = \sqrt{(1-2n)\frac{2h}{R}},$$

qui est bien la formule classique.

2. La même méthode s'applique aussi facilement à la détermination de la différence de niveau de deux points lorsque l'on tient compte de la réfraction géodésique.

Les tangentes au rayon lumineux curviligne faisant

Digitized by Google

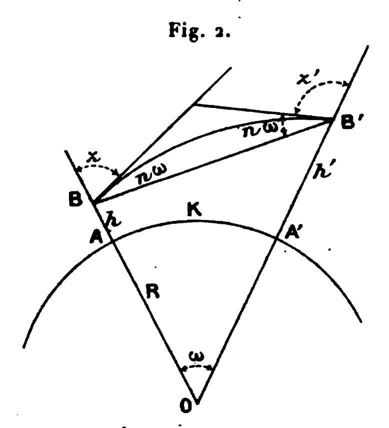
encore en B et en B′ avec la corde BB′ (*fig.* 2) des angles égaux à $n\omega$, on a, dans le triangle OBB′,

$$\frac{R+h'}{R+h} = \frac{\sin(z+n\omega)}{\sin(z'+n\omega)}$$

ou

$$(3)\qquad \frac{h'-h}{R+h} = \frac{2\sin\frac{z-z'}{2}\cos\left(\frac{z+z'}{2}+n\omega\right)}{\sin(z'+n\omega)}.$$

Fig. 2.



Mais, la somme des angles extérieurs en B et B′ donne

$$z+z'+2n\omega = \pi+\omega,$$

d'où l'on déduit successivement

$$\frac{z+z'}{2}+n\omega = \frac{\pi}{2}+\frac{\omega}{2},$$

$$z'+n\omega = \pi-[z+(n-1)\omega],$$

et, par soustraction,

$$\frac{z-z'}{2} = -\frac{\pi}{2}+\left(z-\frac{1-2n}{2}\omega\right).$$

Portant ces valeurs dans (3), on a

$$\frac{h'-h}{R+h} = \frac{2\cos\left(z-\frac{1-2n}{2}\omega\right)\sin\frac{\omega}{2}}{\sin[z+(n-1)\omega]},$$

Digitized by Google

ou, en négligeant les termes du second ordre,

$$\frac{h'-h}{R+h}=\omega\frac{\cos z+\frac{1-2n}{2}\omega\sin z}{\sin z},$$

c'est-à-dire

$$h'-h=R\left(1+\frac{h}{R}\right)\left(\omega\cot z+\frac{1-2n}{2}\omega^2\right).$$

Si l'on tient compte de la relation

$$\omega=\frac{K}{R},$$

et que l'on néglige encore les termes du second ordre, on a enfin

$$(4)\qquad h'-h=K\cot z+\frac{1-2n}{2}\frac{K^2}{R},$$

qui est la formule bien connue.

[D1b]

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION EN SÉRIE ORDONNÉE SUIVANT LES PUISSANCES ENTIÈRES ET POSITIVES D'UNE AUTRE FONCTION;

PAR M. P. ZERVOS.

I. Soit par une transformation conforme de l'intégrale de Cauchy, soit directement on peut démontrer la formule

$$\int_C\frac{f(z)}{\sigma(z)-\sigma(x)}dz=2\pi i\frac{f(x)}{\sigma'(x)},$$

où nous supposons : 1° que la fonction $f(z)$ est holomorphe comme la fonction $\sigma(z)$ (la dernière prenant une détermination) à l'intérieur du domaine limité par un contour C; 2° qu'il n'y ait pas de racine de $\sigma'(x)$

dans le même domaine; 3° que la fonction $\sigma(z) - \sigma(x)$ et le contour C soient tels qu'un point quelconque x_i du domaine soit la seule racine de la fonction $\sigma(z) - \sigma(x_i)$ dans ce domaine; une telle fonction, par exemple, est la fonction $z^2 - x^2$ à l'intérieur d'une aire dont le contour ne coupe pas un des deux axes.

II. Démonstration directe de la formule

$$\int_G \frac{f(z)}{\sigma(z) - \sigma(x)} dz = 2\pi i \frac{f(x)}{\sigma'(x)}.$$

Décrivons de x comme centre un cercle γ de rayon ρ, intérieur à l'aire G. Nous aurons

$$\int_G \frac{f(z)}{\sigma(z) - \sigma(x)} dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{\sigma(z) - \sigma(x)} dz,$$

où le rayon ρ peut être aussi petit qu'on veut. Nous développons les fonctions $f(z)$ et $\sigma(z)$ au voisinage du point x. Alors nous aurons

$$\int_G \frac{f(z)}{\sigma(z) - \sigma(x)} dz$$

$$= \int_\gamma \frac{f(x) + \rho e^{\theta i} f'(x) + \frac{\rho^2 e^{\theta^2 i^2}}{1.2} f''(x) + \ldots}{\rho e^{\theta i} \sigma'(x) + \frac{\rho^2 e^{\theta^2 i^2}}{1.2} \sigma''(x) + \ldots} i \rho e^{\theta i} d\theta$$

ou, séparant la seconde,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_G \frac{f(z)}{\sigma(z) - \sigma(x)} dz \\ &\quad = \int_\gamma \frac{f(x)}{\sigma'(x) + \frac{\rho e^{\theta i}}{1.2} \sigma''(x) + \ldots} i\, d\theta \\ &\quad + \int_\gamma \frac{\rho e^{\theta i} f'(x) + \frac{\rho^2 e^{\theta^2 i^2}}{1.2} f''(x) + \ldots}{\sigma'(x) + \frac{\rho e^{\theta i}}{1.2} \sigma''(x) + \ldots} i\, d\theta. \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

De celles-ci la seconde est nulle parce que nous voyons que, d'après nos hypothèses, il est facile de démontrer que l'on peut trouver un nombre positif M tel que l'inégalité

$$\left| e^{\theta i}\left(f'(x)+\frac{\rho e^{\theta i}}{1.2}f''(x)+\ldots\right)\right| < \mathrm{M}$$

soit vraie pour tout point de la circonférence γ, et aussi un nombre positif m tel que l'inégalité

$$\sigma'(x)+\frac{\rho e^{\theta i}}{1.2}\sigma''(x)+\ldots > m$$

soit vraie pour les mêmes points, en rappelant que nous avons supposé $\sigma'(x)\neq 0$ pour tout point du domaine G. Ainsi l'intégrale considérée est moindre que $\rho\, 2\pi i\frac{\mathrm{M}}{m}$.

Donc la seconde intégrale du second membre de l'égalité (1) est rigoureusement nulle, ρ étant aussi petit que l'on veut.

Pour la première, je remarque que l'on a

$$\int_\gamma \frac{f(x)}{\sigma'(x)+\frac{\rho e^{\theta i}}{1.2}\sigma''(x)+\ldots}d\theta-\int_\gamma\frac{f(x)}{\sigma'(x)}d\theta$$
$$=-\rho\int_\gamma\frac{e^{\theta i}f(x)\left(\frac{\sigma''(x)}{1.2}+\frac{\sigma'''(x)}{1.2.3}\rho e^{\theta i}+\ldots\right)}{\sigma'(x)\left(\sigma'(x)+\frac{\rho e^{\theta i}}{1.2}\sigma''(x)+\ldots\right)}.$$

En se servant de la même manière que précédemment, nous pouvons voir que le second membre est nul. Par conséquent l'égalité (1) devient

$$\int_G\frac{f(z)}{\sigma(z)-\sigma(x)}dz=\int_\gamma\frac{f(x)}{\sigma'(x)}i\,d\theta=2\pi i\frac{f(x)}{\sigma'(x)}.$$

III. Nous pouvons, par cette formule, calculer immé-

Digitized by Google

diatement plusieurs intégrales; par exemple

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 + a^2} dx \qquad (m > 0,\ a > 0).$$

Pour cela, il suffit de calculer l'intégrale

$$\int \frac{z e^{mzi}}{z^2 + a^2} dz,$$

effectuée le long du périmètre d'un demi-cercle tracé dans le demi-plan. Nous l'écrirons sous la forme

$$\int \frac{z e^{mzi}}{z^2 - (ai)^2} dz.$$

Le demi-cercle considéré est une aire dans laquelle le facteur $(z + ai)$ ne s'annule jamais.

Nous pouvons donc appliquer la formule précédente et nous aurons

$$\int_C \frac{z e^{mzi}}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i \frac{ai\, e^{-ma}}{2ai} = i\pi e^{-ma}.$$

IV. Une application de cette formule, que je crois intéressante, est le développement d'une fonction en série ordonnée suivant les puissances positives d'une autre fonction. Pour cela, prenons l'identité

$$\frac{1}{\sigma(z) - \sigma(x)} = \frac{1}{\sigma(z)} + \frac{\sigma(x)}{[\sigma(z)]^2} + \ldots + \frac{[\sigma(x)]^n}{[\sigma(z)]^{n+1}} + \left(\frac{\sigma(x)}{\sigma(z)}\right)^{n+1} \frac{1}{\sigma(z) - \sigma(x)}.$$

Alors la formule (1) devient

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{\sigma'(x)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{\sigma(z)} dz + \frac{\sigma(x)}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{[\sigma(z)]^2} dz + \ldots \\ + \frac{[\sigma(x)]^n}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{[\sigma(z)]^{n+1}} dz \\ + \frac{[\sigma(x)]^{n+1}}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{[\sigma(z) - \sigma(x)]} \frac{dz}{[\sigma(z)]^{n+1}}.\end{aligned}$$

Digitized by Google

Si donc nous prenons nos hypothèses telles que le terme complémentaire

$$\frac{[\sigma(x)]^{n+1}}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{[\sigma(z)-\sigma(x)]}\frac{dz}{[\sigma(z)]^{n+1}}$$

tend vers zéro pour n infini, nous aurons un développement de $\frac{f(x)}{\sigma'(x)}$ en une série ordonnée suivant les puissances positives d'une autre fonction $\sigma(x)$.

D'autre part

$$\frac{f(x+\Delta x)}{\sigma(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{\sigma(x)}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}f(z)\left(\frac{1}{\sigma(z)-\sigma(x+\Delta x)}-\frac{1}{\sigma(z)-\sigma(x)}\right)dz.$$

Si l'on divise par Δx et qu'on prenne la limite pour $\Delta x=0$, nous aurons

$$(2)\qquad\left(\frac{f(x)}{\sigma'(x)}\right)'=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{\sigma'(x)f(z)}{[\sigma(z)-\sigma(x)]^{2}}dz.$$

Supposons qu'il y ait une racine de la fonction $\sigma(x)$ dans le domaine C. Soit

$$(\alpha)\qquad\sigma(a)=0.$$

Alors on peut déduire de la formule (2) la formule

$$(3)\qquad\frac{\sigma'(a)f'(a)-f(a)\sigma''(a)}{[\sigma'(a)]^{3}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(z)}{[\sigma(z)]^{2}}dz.$$

De même de la formule (2) nous déduirons avec l'hypothèse (α)

$$(4)\qquad\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{f(x)}{\sigma'(x)}\right)''_{\text{pour } x=a}\\&\quad=\frac{\sigma''(a)}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(z)}{[\sigma(z)]^{2}}dz+\frac{2[\sigma'(a)]^{2}}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(z)}{[\sigma(z)]^{3}}dz;\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

d'où, si l'on considère l'égalité (3), nous déduirons la valeur de l'intégrale

$$\int_C \frac{f(z)}{[\sigma(z)]^3}\,dz.$$

En continuant de la même manière on peut trouver l'intégrale $\int_C \frac{f(z)}{[\sigma(z)]^n}dz$ exprimée en fonction des valeurs

$$\sigma'(a),\quad \ldots,\quad \sigma^{n-1}(a),$$
$$f'(a),\quad \ldots,\quad f^{n-1}(a),$$

et alors la fonction $\frac{f(x)}{\sigma'(x)}$ se développe sous la forme

$$A_0 + A_1\,\sigma(x) + A_2[\sigma(x)]^2 + \ldots + A_m[\sigma(x)]^m + \ldots.$$

Quant à cette dernière application, nous pouvons remarquer qu'il est facile de voir quelles sont les différences essentielles entre notre méthode pour la recherche des coefficients du développement et celles pour la série de Burmann.

[B1c]

DÉVELOPPEMENT D'UN CERTAIN DÉTERMINANT;

PAR M. J. SADIER.

Dans la *Théorie des nombres* de E. Lucas (p. 286) on propose le développement d'un déterminant Δ défini de la manière suivante :

Les éléments de la diagonale principale sont

$$a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_n.$$

Digitized by Google

Donc

$$a_{ii} = a_i,$$
$$a_{ik} = x \quad \text{pour} \quad k > i,$$
$$\quad = y \quad \text{pour} \quad k < i.$$

Une solution a été donnée (*J. S.*, 1892, p. 54) par M. Schoute, en considérant des déterminants auxiliaires. En voici une solution directe.

Pour abréger l'écriture, nous prendrons $n = 4$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & x & x & x \\ y & b & x & x \\ y & y & c & x \\ y & y & y & d \end{vmatrix}.$$

Posons

$$f(x) = (a-x)(b-x)(c-x)(d-x),$$

$$\begin{matrix} (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = a-x, & b-x, & c-x, & d-x \\ (\alpha', \beta', \gamma', \delta') = a-y, & b-y, & c-y, & d-y \end{matrix} \qquad (z = x - y).$$

Introduisons une colonne d'éléments égaux à 1 et une ligne d'éléments égaux à 0, sauf le premier égal à 1. On a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & x & x & x \\ 1 & y & b & x & x \\ 1 & y & y & c & x \\ 1 & y & y & y & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} & \bar{x} \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \bar{z} & \beta & 0 & 0 \\ 1 & \bar{z} & \bar{z} & \gamma & 0 \\ 1 & \bar{z} & \bar{z} & \bar{z} & \delta \end{vmatrix},$$

en retranchant la première colonne multipliée par x de chacune des autres. On a ensuite

$$\Delta = \alpha\beta\gamma\delta + x \times \begin{vmatrix} 0 & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \bar{z} & \beta & 0 & 0 \\ 1 & \bar{z} & \bar{z} & \gamma & 0 \\ 1 & \bar{z} & \bar{z} & \bar{z} & \delta \end{vmatrix} = f(x) + Mx.$$

Digitized by Google

En retranchant la première colonne multipliée par y de chacune des autres, on obtient de même

$$\Delta = f(y) + \mathrm{M}'y,$$

$$\mathrm{M}' = \begin{vmatrix} 0 & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ 1 & \alpha' & z & z & z \\ 1 & 0 & \beta' & z & z \\ 1 & 0 & 0 & \gamma' & z \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous allons montrer que l'on a

$$\mathrm{M}' = \mathrm{M}.$$

Dans le déterminant M', ajoutons la première ligne multipliée par z à chacune des suivantes; on a

$$\mathrm{M}' = \begin{vmatrix} 0 & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \bar{z} & \beta & 0 & 0 \\ 1 & \bar{z} & \bar{z} & \gamma & 0 \\ 1 & \bar{z} & \bar{z} & \bar{z} & \delta \end{vmatrix} = \mathrm{M} \qquad (\alpha' - z = \alpha).$$

On a donc les deux relations

$$\Delta = f(x) + \mathrm{M}x,$$
$$\Delta = f(y) + \mathrm{M}y.$$

Éliminons M,

$$(x-y)\Delta = x\,f(y) - y\,f(x),$$

$$\Delta = \frac{x\,f(y) - y\,f(x)}{x-y}. \qquad \text{Q. E. I.}$$

Remarque I. — Dans le déterminant, le signe — a été placé au-dessus du nombre, comme pour les caractéristiques négatives des logarithmes, ce qui est moins encombrant.

Digitized by Google

Remarque II. — Dans la réponse indiquée par E. Lucas, on a dans le second membre le facteur $(-1)^n$. Cela provient de ce que E. Lucas a représenté par $f(x)$ le produit $\Pi(x-a)$.

On évite ce facteur en posant

$$f(x) = \Pi(a-x).$$

[K7a]

SUR UNE EXTENSION DE LA NOTION DU RAPPORT ANHARMONIQUE ET LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE;

Par M. Georges REMOUNDOZ.

1. On sait que l'on appelle *rapport anharmonique* de quatre quantités y_1, y_2, y_3, y_4 une expression telle que

$$\frac{(y_1-y_3)(y_2-y_4)}{(y_1-y_4)(y_2-y_3)}.$$

On se rappelle qu'il y a en général six tels rapports distincts, dont trois sont les inverses des trois autres.

Dans l'hypothèse où y_1, y_2, y_3, y_4 désignent quatre intégrales particulières d'une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \tag{1}$$

$P(x,y)$ et (x,y) étant des polynomes en x et y, la considération du rapport anharmonique combinée avec le théorème classique de M. Picard sur les valeurs d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point essentiel isolé (voir *Traité d'Analyse*, t. III, p. 347) nous con-

duit à la conclusion qu'il n'y a pas plus de trois transcendantes uniformes distinctes satisfaisant à l'équation (1) (¹).

2. Je me suis proposé d'appliquer l'extension récente (²) aux fonctions multiformes du théorème de M. Picard pour trouver une limite supérieure du nombre des transcendantes distinctes à r branches satisfaisant à l'équation (1), et à cette occasion j'ai recherché s'il est possible d'étendre au cas de $2n$ quantités (n un entier quelconque) la notion du rapport anharmonique.

Posons-nous le problème suivant :

Étant données $2n$ quantités $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{2n}$, former tous les produits de la forme suivante :

$$(2) \qquad (y_{k_1}-y_{\mu_1})(y_{k_2}-y_{\mu_2})\ldots(y_{k_n}-y_{\mu_n}),$$

où $k_1, k_2, \ldots, k_n$ et $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ désignent deux combinaisons des $2n$ objets $1, 2, 3, \ldots, 2n$, pris n à n, n'ayant aucun objet commun, sans répétitions et telles qu'on ait

$$(3) \qquad \mu_1 < k_1, \qquad \mu_2 < k_2, \qquad \mu_i < k_i, \qquad \mu_n < k_n.$$

A chaque combinaison $k_1, k_2, \ldots, k_n$ correspond un

(¹) A ce sujet, *voir* M. Petrowitch, *Thèse pour le doctorat des Sciences mathématiques*, 1894; ou bien le *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. III, p. 356.

(²) *Une nouvelle généralisation du théorème de M. Picard sur les fonctions entières* (*Comptes rendus*, 20 avril 1903); *voir* aussi E. Maillet, *Sur les fonctions monodromes ou à r branches* (*Comptes rendus*, 11 mai 1903). Récemment, nous avons pu établir l'extension dans le cas le plus général. Voir : *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes* (*Bulletin de la Société mathématique*).

Digitized by Google

nombre de combinaisons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ égal au produit

$$(k_1-1)(k_2-3)(k_3-5)\ldots(k_n-2n+1),$$

si l'on suppose que $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_n$.

En effet, l'indice λ_i peut prendre toutes les valeurs inférieures à k_i sauf $k_1, k_2, \ldots, k_{i-1}$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{i-1}$.

Ainsi le nombre total m de tous les produits de la forme (2) est donné par la formule

$$(4) \qquad m = \sum (k_1-1)(k_2-3)(k_3-5)\ldots(k_n-2n+1),$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons possibles de 1, 2, 3, ..., $2n$, pris n à n sans répétitions, pour lesquelles on a

$$k_1 > 1, \qquad k_2 > 3, \qquad \ldots, \qquad k_n > 2n-1$$

$(k_1 \neq k_2 \neq \ldots \neq k_n)$, puisqu'il est facile de voir que tous les produits ainsi obtenus sont distincts grâce aux inégalités (3), qui, n'étant pas essentielles, n'ont été supposées que pour cela.

En envisageant les rapports (quotients) de ces produits deux à deux, nous avons l'extension la plus naturelle de la notion du rapport anharmonique. En appliquant la formule (4) au cas ordinaire de $n = 2$, nous trouvons trois produits de la forme (2), avec lesquels nous formons six rapports distincts, qui sont en valeur absolue (au signe près) égaux aux rapports anharmoniques usuels.

3. Dans le cas où les quantités y désignent $2n$ intégrales particulières de l'équation différentielle (1), ces rapports $R(y_1, y_2, \ldots, y_{2n})$ se caractérisent par le fait que leurs infinis et leurs zéros coïncident avec les zéros des diverses différences $y_i - y_j$ et par suite leur nombre

Digitized by Google

est fini (*voir* la Thèse précitée de M. Pétrowitch et l'Analyse de M. Picard, *loc. cit.*). Cela tient à ce que, grâce à leur conformation, ces rapports sont finis et différents de zéro pour tous les infinis d'une quelconque de ces intégrales.

La question suivante se pose maintenant :

Étudier les relations qui existent entre ces différents rapports (que l'on pourrait appeler *hyperanharmoniques* dans le cas de $n > 2$) *et constater si elles permettent en général de résoudre le problème que je me suis proposé à l'égard des transcendantes multiformes satisfaisant à l'équation* (1).

BIBLIOGRAPHIE.

Nouveaux éléments de Géométrie, nouvelle édition revue et augmentée; par M. *Ch. Méray,* professeur à la Faculté des Sciences de Dijon. — 1 vol. in-8 de VIII-450 pages. Dijon, Jobard, 1903. Prix : 7fr.

« La première édition de cet Ouvrage a paru en 1874 et, pendant vingt-six ans, des approbations chaleureuses, mais isolées, se sont perdues dans le vide d'une indifférence générale mêlée de quelques railleries. » Telles sont les premières lignes de la Préface des *Nouveaux éléments de Géométrie*, de M. Ch. Méray.

Comme le dit M. Jules Tannery dans un article plein d'humour sur l'Enseignement de la Géométrie élémentaire, paru dans la *Revue Pédagogique* (1), « il était conforme à la destinée de M. Méray que les choses se passassent ainsi; et cette destinée aurait été moins parfaite, les futurs historiens

(1) Tome XLIII, n° 7, 15 juillet 1903.

Digitized by Google

des Mathématiques seraient privés d'un vif plaisir, s'il était arrivé une seule fois que l'importance d'une des idées de M. Méray fût reconnue de suite ».

A l'exemple de tous les grands penseurs, l'éminent professeur de l'Université de Dijon a été longtemps un isolé. Vivant au milieu de *sa* Science, ignorant celle des autres, qui ainsi n'a pas influencé le libre essor de son esprit, il méconnut le monde et le monde le méconnut. Un jour, ils se découvrirent mutuellement. M. Ch. Méray s'aperçut que d'autres, à son insu et à leur insu, se couvraient de lauriers qu'il avait cueillis depuis fort longtemps; le monde apprit qu'à Dijon il y avait un *mathématicien.*

Et voici pourquoi ce n'est que 26 ans après son apparition que le corps enseignant commence à s'intéresser à une entreprise originale de rénovation et de modernisation de la Géométrie élémentaire, entreprise qui, si elle réussit comme nous devons le souhaiter, révolutionnera notre enseignement classique.

I.

S'il n'y avait pas de corps solides dans la nature, il n'y aurait pas de Géométrie, dit M. Henri Poincaré dans un de ces remarquables et profonds articles qu'il a publiés dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* (¹).

Il y explique comment la Géométrie n'est en somme que l'étude des propriétés du *groupe des déplacements* (²).

C'est à ce point de vue, et d'ailleurs vraisemblablement en ignorant les travaux du maître norvégien Sophus Lie, que M. Ch. Méray s'est placé. Ainsi, une fois de plus, sans le savoir, il aura suivi une voie parallèle à celle de l'un de ses contemporains.

Lorsqu'on lit un Livre de Géométrie élémentaire et que l'on cherche à analyser avec soin quelles sont les notions expérimentales *a priori* que la lecture d'un tel Livre suppose, on reste stupéfait devant la quantité de faits laissés sans démonstration, de notions supposées préexistantes, d'affirmations que

---

(¹) Troisième année, nº 6, novembre 1895.

(²) *Voir* aussi *Revue de Métaphys. et de Morale,* 5ᵉ année, nº 1, janvier 1897.

Digitized by Google

le bon sens seul justifie. On comprend alors la part énorme de l'intuition et de l'expérience dans les fondements de la Géométrie et l'on cesse de dédaigner les essais loyaux de Géométrie pure, je ne dirai pas basée sur l'expérience, car toutes les Géométries le sont, mais où la part de l'expérience est franchement avouée et mise en évidence.

Ayant admis que notre esprit est capable de concevoir ces figures irréelles sur lesquelles raisonne le Géomètre, la première notion que présuppose *toute* Géométrie élémentaire est celle de l'invariabilité d'une figure dans un déplacement. Que devons-nous entendre par cette phrase si fréquemment employée dans toutes nos Géométries classiques : « Soient A et B deux positions d'une *même* figure F ? » Elle sous-entend évidemment que le lecteur a l'intuition d'un *déplacement*, c'est-à-dire d'un changement de position d'une figure *sans changement de forme*. La notion de déplacement, résultante de la notion du solide et de celle du mouvement, est donc à la base même de toute Géométrie élémentaire dans laquelle nous postulons, consciemment ou inconsciemment, toutes les propriétés du *groupe* à 6 paramètres des déplacements.

Quel est l'auteur qui raisonnablement voudrait écrire des éléments de Géométrie pure sans admettre : qu'un même déplacement peut être répété indéfiniment, que le déplacement inverse d'un déplacement quelconque est possible, que deux déplacements consécutifs équivalent à un déplacement unique, etc...? Et n'est-ce pas là postuler implicitement que les déplacements forment un *groupe*, au sens précis que Lie attache à ce mot?

Ce groupe à 6 paramètres admet des sous-groupes : ceux d'ordre 3 qui laissent un point fixe; ceux d'ordre 2 qui laissent un droit fixe; ceux d'ordre 1 qui laissent fixes tous les points d'une droite.

Nombreuses sont les propriétés de ces sous-groupes que nos Géométries classiques admettent implicitement comme *évidentes !*

A-t-on jamais mis en doute qu'on puisse faire pivoter une figure autour d'une droite de façon à amener en coïncidence un plan de la figure passant par l'axe avec un autre plan passant par le même axe? qu'on peut faire glisser une droite sur elle-même? qu'on peut la faire pivoter autour d'un de ses points dans un plan qui la contient? etc. Et tous

ces postulats sont de *même nature,* tous reviennent à admettre des propriétés du groupe des déplacements.

Or, dans nos Géométries classiques, un postulat et un seul, celui qui porte le nom d'Euclide, paraît faire exception à la règle. Et ainsi il occupe une place à part, prépondérante, comme quelque phénomène inattendu, jetant une note discordante dans un parfait concert. C'est à ce postulat fameux que M. Méray s'attaque tout d'abord en le faisant rentrer dans la règle commune. C'est là la première et principale originalité de sa Géométrie nouvelle, le grand progrès vers l'unité de méthode et de conceptions.

Dans le groupe des déplacements, les *translations* forment un *groupe,* puisque deux translations successives peuvent être remplacées par une seule translation. Pourquoi, après avoir admis tant de propriétés des déplacements, ne pas admettre celle-ci ? En quoi ce postulat répugne-t-il plus à notre esprit que celui d'Euclide? Parce que nos esprits, formés à l'école classique, n'y sont pas accoutumés. Mais si nous faisons effort sur nous-mêmes, si nous nous dégageons de nos vieilles habitudes, nous nous apercevrons sans peine que M. Méray a raison.

En substituant à la proposition d'Euclide celle qui consiste à admettre comme évidente la possibilité d'une translation dans laquelle *deux* droites glissent sur elles-mêmes et comme évident le fait que ces translations forment un groupe, il donne enfin à l'ensemble des postulats de la Géométrie élémentaire une unité ignorée jusqu'alors.

Voici donc le fait capital : *Tous les postulats de la Géométrie de M. Méray sont tirés des propriétés des déplacements;* et ainsi il avait réalisé d'avance dans le domaine élémentaire l'affirmation de M. Henri Poincaré.

Courageusement il met tous ces postulats en évidence, sans les masquer, sans détours. Voici, par exemple, comment débute le Chapitre III (Perpendicularité des droites et des plans):

« Une demi-droite mobile *t* peut glisser indéfiniment sur un plan fixe P de manière que son origine *o* demeure en coïncidence constante avec un point O de ce plan....

» Un plan mobile *p* peut glisser indéfiniment aussi sur le plan fixe P, sous la condition que l'une de ces demi-droites *t* y soit animée du mouvement défini ci-dessus.

Digitized by Google

» *Outre o il existe, dans une figure mobile de l'espace liée invariablement au plan p, quelque autre point o' conservant comme celui-ci une position* O' *fixe dans l'espace.* »

J'ai intentionnellement souligné la fin de cette citation. D'aucuns lèveront les bras au ciel en lisant cela. On admet tout alors! Oui, on admet ce qui est *nécessaire,* et c'est là simplement admettre une propriété du sous-groupe à un paramètre.

Pour se rendre compte de ce que l'on admet dans nos Géométries élémentaires pour remplacer ce postulat, il faut analyser de près les premiers théorèmes sur les droites et plans perpendiculaires. Dans l'excellente *Géométrie* de M. Hadamard, comme Introduction à la démonstration d'une perpendiculaire à une droite dans un plan qui la contient, je trouve ceci (p. 5 et 6) :

« Deux angles égaux $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'A'C'}$ peuvent être placés l'un sur l'autre de deux façons différentes, savoir : ou bien le côté A'B' venant sur AB et A'C' sur AC, ou l'inverse. On passe de l'une à l'autre en retournant l'un des angles sur lui-même. *Dans ce retournement il y a une demi-droite intérieure à l'angle qui ne change pas,* c'est celle qui divise l'angle en deux parties égales. »

Ce postulat vaut-il mieux que celui de M. Méray? Il fait peut-être un peu plus illusion; mais il est moins fécond.

II.

La disparition de la fameuse proposition d'Euclide, l'unité dans les postulats constituent la véritable originalité de la *Géométrie* de M. Méray. Concurremment, je dirai presque *conséquemment,* M. Méray *fusionne* les deux Géométries du plan et de l'espace. C'est là une idée qui était neuve en 1874, lors de la première édition de l'Ouvrage, et qui depuis a fait son chemin; il y a cependant quelque mérite à la soutenir et à la mettre en œuvre. Car, pour opérer vraiment cette fusion, il ne suffisait pas de démarquer les théorèmes de la *Géométrie* d'Euclide pour en changer l'ordre séculairement consacré. Il fallait faire plus.

Digitized by Google

Sur ce point d'ailleurs la cause est gagnée. Tous les mathématiciens sont d'accord pour convenir que *notre* Géométrie dite *plane* n'est pas une Géométrie plane. Il n'y a pas, en effet, une seule des premières pages de nos Traités classiques où l'on ne fasse des opérations *dans l'espace* pour démontrer des propositions de Géométrie plane. Je citais tout à l'heure, dans un autre but, quelques lignes de la *Géométrie* de M. Hadamard et elles contiennent un déplacement dans l'espace. Pour retourner un angle, il faut bien le sortir de son plan! Si l'on voulait construire une vraie Géométrie plane, c'est-à-dire une Géométrie fondée uniquement sur des déplacements dans un plan, qui pût être comprise par des êtres à deux dimensions, on serait conduit à une Géométrie qui différerait de la nôtre sur bien des points et qui, d'ailleurs, serait sans intérêt pratique.

Dans une telle Géométrie, deux triangles ayant les trois côtés égaux ne seraient pas nécessairement égaux, c'est-à-dire superposables, et l'on se heurterait à des difficultés semblables à celles qui naissent dans l'espace, uniquement parce que nous n'avons pas le sens de la quatrième dimension.

Outre la *fusion* que M. Méray pose en principe, il fait une large place dans son Ouvrage au *Calcul*. Par un esprit de classification poussé à l'excès, on prétendait jadis partager les Mathématiques en domaines limités, rigoureusement fermés les uns aux autres et se suffisant par eux-mêmes. On trouve encore dans notre enseignement secondaire de vieux professeurs qui bannissent toute *lettre* de l'Arithmétique, sous prétexte que c'est de l'*Algèbre,* et qui n'acceptent pas qu'on démontre le théorème de Pythagore en se servant des propriétés des proportions, *car ce n'est pas de la Géométrie!* C'est enfantin, et l'on peut affirmer qu'il n'y a que ceux dont les connaissances sont très bornées qui puissent ainsi prétendre mettre des bornes à chaque branche de la Science et qui ne voient pas qu'elles se pénètrent les unes les autres, sans pouvoir être délimitées.

« Qu'entend-on par caractère géométrique? Qu'est-ce qui distingue les notions purement géométriques des notions analytiques? » écrit M. Henri Poincaré. « Est-ce d'être susceptibles de représentation?... Cela veut-il dire que nous nous représentons les objets dans l'espace géométrique? Mais nos représentations ne peuvent être que la reproduction de nos

Digitized by Google

sensations; on ne peut donc se représenter les objets que dans l'espace sensible tout à fait différent de l'espace géométrique. Cela veut-il dire, au contraire, que nous raisonnons sur le monde extérieur comme s'il était dans l'espace géométrique? Où est alors ce *caractère géométrique,* si profondément distinct du caractère analytique? »

Et les puristes verront avec horreur, dans le Livre de M. Méray, les triangles semblables précéder les triangles égaux et le *Calcul* se mêler à la démonstration des cas d'égalité des triangles!

III.

Jusqu'ici, je n'ai parlé que de la doctrine de M. Méray, et c'est l'essentiel. Il me reste à dire quelques mots de ses procédés d'exposition.

J'avoue franchement que ce côté de l'œuvre ne me satisfait pas pleinement. C'est, il est vrai, dans l'état actuel des choses, un point secondaire, mais qui, pour la vulgarisation facile des idées de l'auteur, aura cependant plus tard une grande importance.

Avant tout, évidemment pour éviter le reproche d'empirisme qu'on n'eût pas manqué de faire à sa *Géométrie,* M. Méray a tenu, avec une insistance manifeste, à introduire une rigueur parfaite dans toute son exposition. Non content d'avoir minutieusement mis en évidence tous les postulats qu'il admettait, il a tenu à ne jamais faire appel à l'intuition lorsqu'il pouvait s'en passer. C'est ainsi qu'il définit scrupuleusement un point d'une droite intérieur ou extérieur à un segment de cette droite, qu'il fait précéder la théorie des lignes courbes de notions très développées sur les limites, etc.

Il a eu raison; et voici que je parais être en contradiction avec moi-même en disant : qu'il a eu raison d'avoir tort.

Je m'explique.

Je conçois fort bien que, pour *faire accepter* sa *Géométrie,* M. Méray ait cru devoir ne rien laisser au hasard, la ciseler, la polir avec soin pour bien montrer que c'était une œuvre vraiment mathématique.

Il a donc eu raison de rédiger ainsi son *premier Ouvrage,* qui sera, en quelque sorte, la Bible de la nouvelle Géométrie.

Mais, maintenant que l'œuvre est connue, que des expériences probantes et répétées ont prouvé l'excellence de la

Digitized by Google

méthode, on pourrait simplifier l'exposition. Je sais bien que M. Méray m'objectera que ces expériences mêmes plaident en faveur de sa rédaction. Je lui répondrai, et il ne me contredira point, que les maîtres qui ont fait ces expériences ont été pour la plupart exceptionnels et que le rôle de l'enseignement oral a eu sa large part.

D'autre part, dans un but de parfait ordonnancement, M. Méray a adopté un ordre parfaitement logique, mais qui, à mon avis, ne sera pas conservé lorsque ses méthodes se vulgariseront. Il a d'un seul trait épuisé d'abord tout ce qui est relatif à la droite et au plan, jusqu'aux polyèdres et à l'homotétie dans l'espace, y compris les mesures des angles et les lignes trigonométriques, sans prononcer le mot de *cercle*. Ce n'est qu'après tout cela qu'on aborde les lignes courbes avec l'ampleur qu'un bon analyste sait donner au sujet et qu'on apprend à connaître le cercle.

C'est parfait en théorie, un peu dogmatique en pratique. D'ailleurs, M. Méray lui-même ne tient pas outre mesure à cet ordre, et il prévoit dans sa Préface que les professeurs auront à faire dans l'Ouvrage, suivant les besoins, des *transpositions ou des coupures*.

Nous sommes d'accord.

Les nouveaux programmes de l'Enseignement secondaire ont introduit l'étude de la Géométrie dans les basses classes de nos Lycées. Les premiers essais ont été peu satisfaisants. Les enfants comprennent mal les indigestes théorèmes classiques. Déjà, entre universitaires, on parle d'essayer dans ces classes un enseignement purement expérimental de la Géométrie.

Voilà une belle occasion pour adopter définitivement la méthode Méray, qui se prêtera admirablement à cet essai.

Si l'on conserve pour l'enseignement théorique la méthode classique artificielle d'Euclide, on aura *deux* enseignements de la Géométrie, comme nous avons actuellement deux enseignements de la Mécanique, l'un en Physique (le vrai), l'autre en Mathématiques purement symbolique et irréel. Si, au contraire, on opte pour la nouvelle Géométrie, on pourra créer aisément une suite d'enseignements concentriques qui, d'abord empiriques, finiront, au dernier échelon, par acquérir toute la précision désirable.

La méthode de M. Méray prend, comme nous l'avons vu, tous ses postulats dans le groupe des déplacements. Rien ne

Digitized by Google

sera plus aisé que de vérifier et d'expliquer expérimentalement ces postulats devant de jeunes enfants et de leur en donner d'abord les conséquences les plus simples, les plus aisées à concevoir et les plus immédiatement utiles.

Ce sera un premier petit Livre rudimentaire. Plus tard, on complétera ces premières notions dans une seconde étude sans avoir à les démolir pour y substituer des théorèmes arbitraires. Et enfin, aux grands élèves, à ceux qui se destinent à des carrières scientifiques, on exposera la théorie complète avec toute la rigueur qui convient à une Science exacte.

Voilà le programme que je souhaite voir réalisé dans un avenir prochain, pour le bien de notre enseignement scientifique et pour la gloire du Maître, dont le nom restera impérissable dans la Science française et dans le monde.

CARLO BOURLET.

P. S. — Je n'ai presque pas parlé des nombreuses expériences probantes auxquelles a donné lieu la *Géométrie* de M. Méray. On l'enseigne actuellement dans les écoles normales d'instituteurs de Nîmes, Auxerre, Dijon, Lyon, Albertville, Grenoble, Melun, Châlons-sur-Marne, Quimper, Aurillac; dans les écoles primaires supérieures de Dijon, Montbard, Chalon-sur-Saône, Lyon, Charmes, Nancy. Partout le succès a été immédiat et éclatant. On trouvera d'ailleurs à ce sujet des renseignements très complets dans un rapport de M. Duport, professeur à l'Université de Dijon, paru dans le Tome XIV de la *Revue bourguignonne* (1904).

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Un mobile de masse m est soumis à l'action d'une force centrale répulsive constante* $F = mk$ *émanant du point* O. *Ce mobile part du point* A $(OA = a)$ *avec une vitesse dont l'intensité est* $v_0 = \sqrt{2ka}$ *et de direction à déterminer.*

Le point A *est situé sur l'axe* Ox. *On prend sur* Ox *le*

Digitized by Google

point B *symétrique du point* A *par rapport au point* O. *Parmi les courbes allant de* A *en* B, *situées dans le plan* xOy *et qu'on peut forcer le mobile à parcourir en le lançant suivant la tangente en* A *avec la vitesse* $v_0 = \sqrt{2ka}$, *quelle est celle qui est brachistochrone?*

II. *Une plaque matérielle homogène, non pesante, a la forme d'une ellipse; elle est mobile autour d'un axe fixe* Oz *perpendiculaire à son plan au centre* O *de l'ellipse. La masse de cette lame est* $4m$. *Un point matériel* M *de masse* m *peut se mouvoir, sans frottement, le long du contour de cette ellipse. Ce point est attiré par le point* O *proportionnellement à la distance* (*on désignera par* μ^2 *la valeur absolue du coefficient de proportionnalité, par* a *et* b *les demi-axes de l'ellipse*).

1° *Étudier le mouvement du système en prenant les conditions initiales suivantes : le point est d'abord au sommet* A *du grand axe, la vitesse de la plaque est nulle;*

2° *Montrer que l'on peut déterminer la vitesse initiale du point, de façon que l'ellipse reste immobile : déduire des équations du mouvement général la valeur de cette vitesse particulière en fonction des données.*

Épreuve pratique. — *Une demi-ellipse est plongée dans un liquide. Le grand axe, qui la limite, est horizontal et situé dans le plan de charge. Le liquide vient jusqu'à ce plan et confine au vide.*

On demande :

1° *Le centre de pression de cette demi-ellipse;*

2° *La longueur du pendule simple synchrone du pendule composé que l'on obtiendrait en faisant osciller la demi-ellipse, supposée homogène, autour de son axe horizontal supposé fixe* (*les oscillations ayant lieu dans le vide bien entendu*). (Juillet 1903.)

Épreuve écrite. — *Un quadrilatère, en général gauche,* LPQR, *de forme invariable, de masse nulle, peut tourner autour du côté* LP *qui est fixe. Le côté opposé* QR *constitue l'axe d'un solide homogène de révolution* (S). *Ce solide peut tourner autour de* QR *et glisser le long de cette droite. Les seules forces agissant sur* (S) *proviennent des*

Digitized by Google

liaisons qui sont toutes sans frottement. L'état initial des vitesses étant donné, trouver le mouvement ultérieur.

On intégrera, dans le cas général, les équations différentielles du problème.

On étudiera le mouvement du centre de gravité G *de* (S) *dans le cas particulier où* LP *et* QR *se rencontrent, et où la vitesse initiale de* G *est perpendiculaire à* LP.

Appeler :

θ *l'angle de* LP *et* QR;
a *leur plus courte distance.*

Définir la position de (S) *par les paramètres suivants :*

distance ρ *du centre de gravité* G *au point* g *où la perpendiculaire commune à* LP *et* QR *rencontre cette dernière droite;*
angles d'Euler ψ, θ, φ *définissant l'orientation relative des deux trièdres trirectangles* $Ox_1y_1z_1$ *et* $Gxyz$;
$Ox_1y_1z_1$ *est fixe;*
Oz_1 *coïncide avec* LP;
$Gxyz$ *constitue un système d'axes principaux d'inertie de* (S);
Gz *coïncide avec* QR.

SOLUTION.

Les équations de Lagrange s'appliquent naturellement à ce problème. La force vive $2T$ est une forme quadratique de $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\rho}{dt}$, dont les coefficients ne dépendent que de ρ. On a deux intégrales premières en utilisant les équations de Lagrange relatives à ψ et φ; on a, en outre, l'intégrale des forces vives. Le temps t et les variables ψ et φ s'expriment par des intégrales de fonctions algébriques de la variable ρ.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un disque circulaire matériel homogène, de masse* m, *de rayon* r, *d'épaisseur négligeable, peut tourner autour de l'un de ses diamètres* Δ.

Il est soumis à l'action d'un couple tendant à s'opposer à son mouvement. L'axe du couple est parallèle à Δ; *le moment du couple* $C\theta$ *est proportionnel à l'angle* θ *dont le disque a tourné à partir de l'une de ses positions.*

Digitized by Google

On imprime au disque, placé dans sa position d'équilibre, une rotation initiale inconnue ω; on observe l'angle maximum d'écart avec la position d'équilibre; soit Θ cet angle. Calculer la durée des oscillations qui se produisent et la vitesse ω.

Dans une seconde expérience, on adjoint au couple précédent un autre couple résistant, d'axe parallèle à Δ, de moment proportionnel à la vitesse angulaire de rotation. On lance le disque comme précédemment. Il revient, pour la première fois, à sa position d'équilibre au bout d'un temps T. *Déterminer le second couple.*

Application numérique : $m = 0^g,1$, $r = 0^{cm},5$. — *Le moment du premier couple, pour une rotation d'un angle droit, est de* $54^{mg\text{-}cm}$. *L'angle* Θ *est de* 45°. *Dans la seconde expérience le temps* T, *séparant le départ du moment où le disque repasse par sa position d'équilibre, est trois fois plus grand que dans la première.*

Solution.

Dans le premier cas, l'équation du mouvement est

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + C\theta = 0 \qquad \text{avec} \qquad I = \frac{m\pi^2}{4};$$

en posant $\sqrt{\frac{C}{I}} = \alpha_1$, on a

$$\theta = \Theta \sin\alpha_1 t.$$

La durée d'une demi-oscillation est

$$T_1 = \frac{\pi}{\alpha_1};$$

la période $2T_1$, la vitesse initiale $\alpha_1\Theta$.

L'équation du mouvement relative à la seconde expérience est

$$(1) \qquad I\frac{d^2\theta}{dt^2} + R\frac{d\theta}{dt} + C\theta = 0$$

(R est une constante à déterminer).

Pour que le disque repasse par sa position d'équilibre au

Digitized by Google

bout d'un temps fini, il faut que l'équation caractéristique de (1) ait ses racines imaginaires.

On a alors

$$\theta = A e^{-\frac{R}{2I}t} \sin \alpha_2 t,$$

A étant une constante, et α_2 égal à $\frac{\sqrt{4IC - R^2}}{2I}$;

$$T = \frac{\pi}{\alpha_2},$$

et le calcul de R est immédiat.

On emploie les unités C. G. S. pour l'application numérique. (Un changement d'unités est nécessaire pour le moment du premier couple et pour l'angle maximum d'écart.)

(Novembre 1903.)

Lille

Épreuve écrite : Cinématique. — *Construction de Savary pour déterminer le centre de gravité de l'enveloppe d'un profil invariablement lié à une figure plane se déplaçant dans son plan, ou de la trajectoire d'un point de cette figure.*

Dynamique. — *Application du théorème de Dalembert à l'extension des théorèmes généraux de la Mécanique aux systèmes à liaisons.*

Problème. — *Un point matériel, de masse* 1, *assujetti à se mouvoir sans frottement sur une sphère de rayon* 1, *est attiré, en raison inverse du cube de la distance, par trois plans rectangulaires deux à deux passant par le centre de la sphère.*

1° *Démontrer que, dans le mouvement, la réaction de la sphère est constante;*

2° *Trouver les équations finies de la trajectoire qui est une courbe algébrique (conditions initiales quelconques);*

3° *Déterminer les positions d'équilibre du point.*

Solution.

Les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{a}{x^3} + Rx, \qquad \ldots$$

Digitized by Google

donnent

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} + \frac{c}{z^2} = h$$

(h constante des forces vives); puis

$$\mathrm{R} = x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{a}{x^2} - \frac{b}{y^2} - \frac{c}{z^2}$$

ou

$$\mathrm{R} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right) - h = -h.$$

Il vient ensuite

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{a}{x^2} - hx^2 + \alpha \qquad (\alpha, \beta, \gamma \text{ constantes}).$$

. . . .

De là on déduit

$$\sqrt{a + \alpha x^2 - hx^4} + \sqrt{b + \beta y^2 - hy^4} + \sqrt{c + \gamma z^2 - hx^4} = 0.$$

La question s'achève immédiatement. (Juillet 1903.)

Épreuve écrite : Cinématique. — *Mouvement d'un solide autour d'un point fixe. On étudiera seulement les questions suivantes : composantes de la vitesse d'un point du solide; mouvement continu du solide; composantes de l'accélération d'un point du solide.*

Dynamique. — *Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe. On étudiera seulement les questions suivantes : réduction des forces d'inertie du solide; réactions du solide sur ses appuis; propriétés mécaniques des axes principaux d'inertie.*

Problème. — *Un point matériel* M, *de masse* 1, *se meut sans frottement dans un plan, attiré proportionnellement à la distance par deux points de ce plan, l'un* O *fixe, l'autre* S *tournant uniformément autour de* O. *On demande la trajectoire de* M *par rapport à la droite mobile* OS.

Digitized by Google

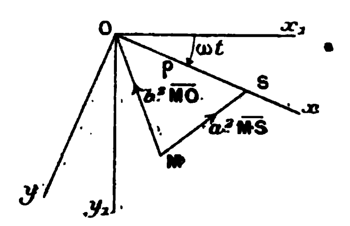
Solution.

Les équations du mouvement relatif de M sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \omega^2 x - 2\omega\frac{dy}{dt} = -a^2x - b^2(x-l),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \omega^2 y + 2\omega\frac{dx}{dt} = -a^2y - b^2y.$$

Posons $x = \dfrac{b^2 l}{a^2+b^2-\omega^2} + X$; $y = Y$ (nouvelle origine sur OS).



On obtient les deux intégrales premières

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + (a^2+b^2-\omega^2)(X^2+Y^2) = h,$$

$$Y\frac{dX}{dt} - X\frac{dY}{dt} - \omega(X^2+Y^2) = k.$$

L'élimination du temps donne en coordonnées polaires l'équation de la trajectoire

$$\varphi = \int \frac{(k-\omega\rho^2)\,d\rho}{\rho\sqrt{[(\omega^2-a^2-b^2)\rho^4+(\omega+h)\rho^2-k](k-\omega\rho^2)}}.$$

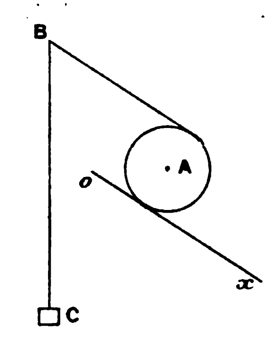
Si l'on pose $\rho^2 = u$, on est ramené à une quadrature elliptique. Il reste à faire la discussion. (Novembre 1903.)

Marseille.

Épreuve écrite. — *Dans un plan vertical, sur une droite Ox dépolie, inclinée d'un angle α sur l'horizon,*

Digitized by Google

est placée une poulie A homogène et de poids P, sur laquelle est enroulé un fil qui se déroule parallèlement à Ox, passe ensuite sur une poulie très petite B, puis pend



verticalement et porte à son extrémité C un poids Q.

Étudier le mouvement de ce système et dire :

1° *A quelle condition il y aurait équilibre;*

2° *A quelle condition le point C serait seul en équilibre;*

3° *A quelle condition le centre de la poulie resterait fixe en A.*

Étudier le cas particulier suivant :

$$P = Q, \qquad \tang\alpha = \frac{3}{4},$$

coefficient de frottement $f = 1$, vitesses initiales nulles.

SOLUTION.

Soient

x l'abscisse du centre A compté parallèlement à Ox;

θ l'angle dont tourne le disque dans le sens des aiguilles d'une montre;

y la distance BC;

T la tension du fil;

N la composante normale de l'action de Ox sur la poulie;

S la composante tangentielle;

M la masse du disque;

m la masse du point C.

La force N est égale à $Mg \cos\alpha$, et la force S est infé-

Digitized by Google

rieure à $Mgf\cos\alpha$ s'il n'y a pas glissement, et elle est égale à $Mgf\cos\alpha$ s'il y a glissement. Dans ce dernier cas, elle est en sens contraire de la vitesse du point de contact du disque et de Ox. Cette vitesse comptée suivant Ox est

$$\frac{dx}{dt} - R\frac{d\theta}{dt}.$$

Si l'on compte S dans le sens Ox, on a dans le cas du glissement

$$S = \pm Mgf\cos\alpha$$

et dans le cas où il n'y a pas glissement

$$|S| < Mgf\cos\alpha.$$

Si a désigne la longueur non enroulée du fil lorsque y et θ sont nuls, on aura

$$(1) \qquad x + y + R\theta = a.$$

Les équations du mouvement sont

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\alpha + S - T,$$

$$MR\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2(S+T),$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - T.$$

A ces équations on adjoindra, s'il y a glissement, l'équation

$$S = \pm Mgf\cos\alpha,$$

et l'on prendra, pour commencer, le signe — ou le signe + selon que $\frac{dx}{dt} - R\frac{d\theta}{dt}$ sera positif ou négatif.

On y adjoindra, au contraire, l'équation

$$\frac{dx}{dt} - R\frac{d\theta}{dt} = 0,$$

s'il y a roulement, et il faut que

$$|S| < Mgf\cos\alpha.$$

Digitized by Google

Examinons d'abord les questions posées :

1° *Conditions de l'équilibre.* — Dans ce cas $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ sont nuls; on a donc

$$Mg\sin\alpha + S - T = 0,$$
$$S + T = 0,$$
$$mg - T = 0.$$

On en tire

$$T = mg, \qquad S = -mg, \qquad 2S = -Mg\sin\alpha.$$

De plus, puisqu'il n'y a pas glissement, il faut

$$|S| < Mgf\cos\alpha.$$

On a donc comme condition

$$Mg\sin\alpha = 2mg, \qquad \operatorname{tang}\alpha < \frac{1}{2}f.$$

L'équilibre a donc lieu si la composante, parallèle au plan incliné, du poids de la poulie est égale au double du poids Q, et si la tangente de l'angle α est inférieure à la moitié du coefficient de frottement.

2° *Le point* C *peut-il être immobile ?* — Dans ce cas $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, et le point E glisse nécessairement sur Ox, car l'on a, par la relation (1),

$$\frac{dx}{dt} + R\frac{d\theta}{dt} = 0,$$

de sorte que la vitesse du point E est $2\frac{dx}{dt}$ et elle ne pourrait être nulle que si tout le système était en équilibre. Si l'on suppose $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 > 0$, les équations du mouvement seront

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\alpha - Mgf\cos\alpha - T,$$
$$MR\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2(Mgf\cos\alpha - T),$$
$$0 = mg - T;$$

Digitized by Google

et, puisque $\frac{dx}{dt} + R\frac{d\theta}{dt} = 0$, on tire de là :

$$0 = Mg\sin\alpha + Mgf\cos\alpha - 3mg$$

ou

$$3mg = Mg(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Telle est la relation qui doit exister entre les poids de la poulie et du point C pour que le point C soit immobile pendant que la poulie descend; on verrait facilement qu'elle descendra indéfiniment d'un mouvement uniformément accéléré si l'on a

$$Mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) - mg > 0.$$

Dans le cas contraire, la vitesse ira en diminuant, puis elle deviendra nulle. A partir de cet instant, les équations du mouvement devront être changées, et l'équilibre du point C cessera d'exister. Car alors, ou bien la vitesse du point E continuera à être nulle, le disque roulera et entraînera nécessairement le point C, ou bien la vitesse du point E sera négative, il faudra changer le sens de S, et la relation

$$3mg = Mg(\sin\alpha + f\cos\alpha)$$

doit être changée.

3° *Condition pour que le centre de la poulie soit fixe.* — Si l'on suppose que, primitivement, le point C descende, la vitesse est positive, $S = -Mgf\cos\alpha$, et les équations du mouvement sont

$$0 = Mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) - T,$$

$$MR\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2(Mgf\cos\alpha - T),$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - T.$$

On a d'ailleurs, puisque x est constant,

$$\frac{dx}{dt} + R\frac{d\theta}{dt} = 0$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + R\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0.$$

Digitized by Google

On a donc

$$\frac{2}{M}(Mgf\cos\alpha - T) + g - \frac{1}{m}T = 0$$

et, par suite,

$$g(1 + 2f\cos\alpha) - \left(\frac{2}{M} + \frac{1}{m}\right)Mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) = 0$$

ou

$$\frac{1 + 2f\cos\alpha}{\sin\alpha - f\cos\alpha} = \frac{M + 2m}{m}$$

ou encore

$$\frac{M}{m} = \frac{1 - 2\sin\alpha + 4f\cos\alpha}{\sin\alpha - f\cos\alpha},$$

ce qui exige d'ailleurs que $\sin\alpha - f\cos\alpha > 0$, c'est-à-dire

$$\tang\alpha > f.$$

Ces conditions étant réalisées, le centre de la poulie resterait fixe au moins pendant un certain temps. Mais il pourrait arriver que cet état ne persiste pas, car si $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ est négatif, $\frac{d\theta}{dt}$ finira par être nul et ensuite négatif, et les équations ne conviendront plus

Mouvement dans le cas où $f = 1$, $P = Q$, $\tang\alpha = \frac{3}{4}$; *vitesses initiales nulles.* — On a alors

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\alpha + S - T,$$

$$MR\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2(S + T),$$

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = Mg - T.$$

Les vitesses initiales étant nulles, on ne sait pas si E glissera; supposons qu'il glisse vers le bas; alors S sera égal à

$$-Mgf\cos\alpha$$

et, puisque $f = 1$, on aura

$$S = -Mg\cos\alpha.$$

Digitized by Google

On aura donc

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = Mg\sin\alpha - Mg\cos\alpha - T,$$

$$MR\frac{d^2\theta}{dt^2} = +2(Mg\cos\alpha - T),$$

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = Mg - T.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} + R\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0,$$

et l'on suppose que E glisse vers le bas, c'est-à-dire

$$\frac{dx}{dt} - R\frac{d\theta}{dt} > 0.$$

Additionnant les trois équations on a

$$0 = Mg(\sin\alpha + \cos\alpha + 1) - 4T.$$

On aura par conséquent

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\left(\sin\alpha - \cos\alpha - \frac{\sin\alpha + \cos\alpha + 1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}g(3\sin\alpha - 5\cos\alpha - 1),$$

$$R\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2g\left(\cos\alpha - \frac{\sin\alpha + \cos\alpha + 1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2}g(3\cos\alpha - \sin\alpha - 1);$$

d'où

$$\frac{d^2x}{dt^2} - R\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{4}g(5\sin\alpha - 11\cos\alpha + 1).$$

Or $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, on a donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} - R\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{44}{5} + 1\right) = -1,2.$$

Donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} - R\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Digitized by Google

est négatif, et par conséquent

$$\frac{dx}{dt} - R\frac{d\theta}{dt},$$

qui, dans l'instant initial, est nul, sera négatif dans l'instant suivant, contrairement à l'hypothèse.

On verrait de même qu'on ne peut pas supposer

$$\frac{dx}{dt} - R\frac{d\theta}{dt}$$

négatif.

La seule hypothèse est donc de supposer qu'il y a roulement et que

$$\frac{dx}{dt} - R\frac{d\theta}{dt}$$

reste nul.

Dans ce cas, les équations du mouvement seront

$$\begin{aligned} M\frac{d^2x}{dt^2} &= Mg\sin\alpha + S - T,\\ MR\frac{d^2\theta}{dt^2} &= -2(S+T),\\ M\frac{d^2y}{dt^2} &= Mg - T, \end{aligned}$$

et il faudra vérifier $|S| < Mgf\cos\alpha$, c'est-à-dire $|S| < Mg\cos\alpha$.

On a, outre les trois équations précédentes, les deux suivantes :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} + R\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = R\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

qui donnent donc

$$\begin{aligned} Mg\sin\alpha + S - T - 2(S+T) + Mg - T &= 0\\ Mg\sin\alpha + S - T + 2(S+T) &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} Mg(1+\sin\alpha) &= S + 4T,\\ -Mg\sin\alpha &= 3S + T \end{aligned}$$

d'où

$$11S = -Mg(1+5\sin\alpha).$$

Digitized by Google

Comme $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, on a donc

$$11\,S = -4Mg, \qquad S = -\frac{4}{11}Mg,$$

et l'on a

$$\frac{4}{11}Mg < Mg\cos\alpha,$$

c'est-à-dire

$$\frac{4}{11}Mg < \frac{4}{5}Mg \qquad \text{soit} \qquad 20 < 44.$$

Il y a donc bien roulement. On a

$$S = -\frac{4}{11}Mg,$$
$$T = -Mg\sin\alpha - 3S = \left(\frac{12}{11} - \frac{3}{5}\right)Mg = \frac{27}{55}Mg.$$

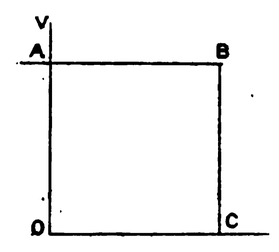
On aura par conséquent

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{11} - \frac{27}{55}\right) = -\frac{14}{55}g,$$
$$R\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{14}{55}g,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{28}{55}g.$$

Donc le disque A monte en roulant d'un mouvement uniformément accéléré.

Le cas général se ferait facilement en calquant le raisonnement sur le cas précédent.

Épreuve pratique. — *Une poutre* AB, *encastrée en* A *dans*



un mur vertical, repose par son extrémité B *sur un support* BC. *Sa longueur est de* 5^m, *sa section est un carré*

Digitized by Google

de $0^m,20$ *de côté, et elle supporte une charge uniformément répartie de* 200^{kg} *par mètre courant, calculer la réaction* N *exercée en* B *par le support :*

1° *Lorsque, ce support étant supposé incompressible, l'extrémité* B *reste à la même hauteur que* A;

2° *Lorsque,* BC *étant supposé compressible, le point* B *peut s'abaisser d'une petite quantité* $BB' = \varepsilon$.

Calculer, dans ce cas, la réaction N' *et l'abaissement* ε *en admettant que le support* BC *est constitué par une poutre de même nature et de mêmes dimensions que la poutre* AB.

On adoptera pour le coefficient E *la valeur* $0,6 \times 10^9$.

SOLUTION.

On trouve

$$N = 375^{kg},$$

et sensiblement

$$N' = N.$$

On a

$$\varepsilon = 0^{mm},078.$$

(Juillet 1903.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1853.

(1900, p. 288.)

On considère la surface engendrée par un cercle de grandeur invariable qui se déplace suivant une loi quelconque; montrer que les normales à cette surface, menées au point, qui appartiennent au cercle mobile dans une de ses positions, s'appuient sur deux droites.

(R. Bricard.)

SOLUTION

Par M. R. Bricard.

Le théorème est encore vrai si, dans l'énoncé, on remplace le mot *cercle* par les mots *hélice tracée sur un cylindre de révolution.*

Digitized by Google

Soient H l'hélice considérée dans une de ses positions, (S) la surface qu'elle engendre dans son déplacement.

Les normales à (S), aux différents points de H, sont :

1° Normales aux trajectoires de ces points;

2° Normales à H.

Elles appartiennent donc, en vertu des théorèmes connus, à deux complexes linéaires et font, par conséquent, partie d'une congruence linéaire. C. Q. F. D.

Dans le cas où H se réduit à un cercle, l'une des deux directrices de la congruence linéaire est évidemment l'axe du cercle; l'autre est la conjuguée de cet axe dans le déplacement.

1949.

(1902, p. 575.)

On considère dans un plan quatre couples de points AA', BB', CC', DD' *et les six contours quadrangulaires*

D'BA'C, DB'AC',
D'CB'A, DC'BA',
D'AC'B, DA'CB'.

On peut inscrire à ces contours six coniques qui soient bitangentes à une même conique. (G. Fontené.)

SOLUTION

Par un abonné.

On peut inscrire à cinq des six contours quadrangulaires cinq coniques qui soient bitangentes à une même conique. Supposons que, par une transformation homographique, on ait fait de cette dernière conique un cercle; si O est le sommet de l'un des deux cônes isotropes qui passent par ce cercle, en joignant le point O à tous les points de la figure et en coupant par une sphère de centre O, on a à démontrer le fait suivant : Étant donnés sur une sphère quatre couples de points AA', BB', CC', DD' et les six contours quadrangulaires analogues à ceux de l'énoncé, si cinq de ces contours sont circonscriptibles à des cercles, le sixième est également circonscriptible à un cercle. Or, en adoptant l'hypothèse de contours

Digitized by Google

convexes, afin d'écarter des difficultés secondaires (¹), les trois premières conditions de circonscriptibilité sont :

$$D'B - BA' + A'C - CD' = 0,$$
$$D'C - CB' + B'A - AD' = 0,$$
$$D'A - AC' + C'B - BD' = 0,$$

et l'une d'elles peut être remplacée par celle-ci :

$$- BA' + A'C - CB' + B'A - AC' + C'B = 0;$$

la même chose ayant lieu pour les trois autres conditions de circonscriptibilité, le théorème est démontré.

Un cas singulier de la figure précédente se rencontre dans le problème de Malfatti étendu à la sphère. Soient ABC un triangle sphérique, D' le pôle intérieur du cercle inscrit; les cercles inscrits aux triangles sphériques D'BC, D'CA, D'AB touchant les côtés BC, CA, AB en des points A', B', C', et l'on peut regarder la figure D'BA'C, par exemple, comme le cas limite d'un quadrilatère circonscriptible; les deux cercles tangents à D'A ont une seconde tangente commune de même espèce que D'A, laquelle passe en A', et les trois tangentes communes que l'on obtient ainsi concourent en un point D; les trois quadrilatères DB'AC', DC'AB', DA'BC' sont circonscriptibles à des cercles tangents entre eux deux à deux.

1975.

(1903, p. 384.)

D'un point P *du plan d'une parabole on abaisse les trois normales à la courbe dont les pieds sont* A, B, C. *Par chacun des pieds* A, B, C *on mène la droite symétrique respectivement de* PA, PB, PC *par rapport à la direction de l'axe de la parabole. Démontrer que ces trois droites concourent en un point* P' *et que la projection de la distance* PP' *sur l'axe est constante.* (E.-N. Barisien.)

(¹) Le lecteur est prié de faire la figure, en plaçant par exemple les points A, B, C et le point D' sur l'hémisphère vu, les arcs D'A, D'B, D'C rayonnant autour de D'; les quatre autres points seront dans le voisinage des points diamétralement opposés aux premiers; les six côtés du contour BA', A'C, CB', ... franchissent le contour apparent.


Digitized by Google

SOLUTION

Par M. A.-H. Couvert.

La première partie de l'énoncé n'est qu'un cas particulier d'un théorème démontré par M. Duporcq, à propos de la question 1803 (voir *N. A. M.*, 1901, p. 474). Nous allons démontrer cette propriété analytiquement. Pour cela, nous écrirons d'une part l'équation aux y des pieds des normales issues de $P(\alpha, \beta)$ à la parabole $y^2 - 2px = 0$, d'autre part l'équation aux y des pieds des droites symétriques des normales par rapport à la direction de l'axe issues d'un point $P'(u, v)$. L'équation d'une normale PA est

$$Y - y = -\frac{y}{p}\left(X - \frac{y^2}{2p}\right).$$

Exprimons qu'elle passe en P, nous avons

$$(\beta - y)2p^2 + y(2p\alpha - y^2) = 0$$

ou

$$(1) \qquad -y^3 + 2p(\alpha - p)y + 2p^2\beta = 0.$$

Une droite telle que P'A sera

$$Y - y = \frac{y}{p}\left(X - \frac{y^2}{2p}\right).$$

Écrivons qu'elle passe en P' :

$$(v - y)2p^2 - y(2pu - y^2) = 0$$

ou

$$(2) \qquad y^3 - 2p(u + p)y + 2p^2 v = 0.$$

Il y a donc trois droites telles que P'A issues d'un point P', de même qu'il y a trois normales issues de P. Écrivons que ces deux séries de trois droites se correspondent; il suffit d'identifier (1) et (2). Cela donne

$$-1 = \frac{\alpha - p}{-u - p} = \frac{\beta}{v}.$$

D'où

$$(3) \qquad u = \alpha - 2p \qquad \text{et} \qquad v = -\beta.$$

Digitized by Google

On voit qu'à tout point P du plan correspond un point P', ce qui démontre la première partie de l'énoncé. En outre, de $u = \alpha - 2p$, on tire

$$\alpha - u = 2p,$$

ce qui montre que la projection de PP' sur l'axe est constante et égale à $2p$.

Remarques. — On peut ajouter quelques propriétés intéressantes :

I. La droite PP' a pour équation

$$\frac{y-\beta}{\beta - v} = \frac{x-\alpha}{\alpha - u}$$

ou

$$(4) \qquad p(y-\beta) - \beta(x-\alpha) = 0.$$

On déduit facilement de cette équation le résultat suivant :

Si P *décrit une hyperbole équilatère d'équation*

$$p(B-y) - y(A-x) = 0,$$

la droite PP' *passe par un point fixe* (A, B).

II. Lorsque le point P décrit une droite (D), le point P' décrit une autre droite (D') également inclinée sur l'axe de la parabole et PP' enveloppe une parabole dont l'axe est perpendiculaire à celui de la proposée.

Reprenons en effet les équations (3). Soit

$$(5) \qquad y = mx + n$$

la droite (D). On a

$$\alpha = u + 2p, \qquad \beta = -v.$$

Portons ces valeurs de α, β à la place de x, y dans (5); cela donne :

$$-v = m(u+2p) + n \qquad \text{ou} \qquad v = -mu - 2mp - n.$$

On voit que le lieu de P' est une droite (D') de coefficient angulaire égal à $-m$, ce qui démontre la première partie.

Digitized by Google

Pour chercher l'enveloppe de PP', mettons l'équation de (D) sous la forme $x = \lambda y + \mu$ et remplaçons α par $\lambda\beta + \mu$ dans (4); cela donne

$$p(y - \beta) - \beta(x - \lambda\beta - \mu) = 0$$

ou

$$\lambda\beta^2 - (p + x - \mu)\beta + py = 0.$$

L'enveloppe de cette droite est

$$(x + p - \mu)^2 - 4\lambda py = 0.$$

C. Q. F. D.

III. 1° Lorsque la droite (D) est l'ordonnée $x = p$, les points P et P' sont symétriques par rapport au sommet de la parabole;

2° Lorsque la droite (D) est l'ordonnée $x = \frac{3}{2}p$, la droite PP' passe constamment par le foyer de la parabole;

3° Lorsque (D) est un diamètre de la parabole, PP' a une direction fixe.

Ces derniers résultats se vérifient aisément.

Autre solution par M. Letierce.

1976.

(1903, p. 384.)

I *et* O *sont les centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle* ABC. *On projette sur* IO *les points de contact du cercle* I *et des côtés du triangle : la somme algébrique des rayons projetants est nulle.* (G. Fleuri.)

SOLUTION

Par M. Letierce.

Désignons par α, β, γ les points de contact du cercle (I) et des côtés BC, CA, AB. Pour démontrer la proposition, il suffit de faire voir que le centre de gravité du triangle $\alpha\beta\gamma$ est sur la droite OI.

Soit ε le milieu du côté $\beta\gamma$; la polaire de ε, par rapport au cercle (I), est parallèle à $\beta\gamma$ et passe par A; c'est donc la

bissectrice extérieure du triangle ABC, relative au sommet A. Donc le pôle de la médiane αa par rapport à I est le pied de cette bissectrice extérieure.

Par suite, si Δ est la droite joignant les pieds des bissectrices extérieures du triangle ABC, nous concluons que Δ est la polaire par rapport à (I) du centre de gravité de $\alpha\beta\gamma$.

Mais on sait (*Traité de Géométrie* de Rouché, *Géométrie du triangle*) que Δ est perpendiculaire à IO ; donc le centre de gravité de $\alpha\beta\gamma$ est sur la droite IO.

C. Q. F. D.

Autres solutions de MM. Plakhowo, F. Farjon, Barisien, Alasia.

QUESTIONS.

1997. Démontrer l'identité

$$2^n \cos^n \frac{a}{2} \sin\left(x + n\frac{a}{2}\right)$$
$$= \sin x + C_n^1 \sin(x+a) + C_n^2 \sin(x+2a) + \ldots$$
$$+ C_n^p \sin(x+pa) + \ldots + C_n^n \sin(x+na),$$

où C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n sont les coefficients binomiaux.

(C. Bourlet.)

1998. Calculer le déterminant

$$D_m = \begin{vmatrix} 1 & C_2^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & C_3^2 & C_3^3 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & \ldots & 0 \\ . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ 1 & C_m^2 & C_m^3 & C_m^4 & \ldots & C_m^m \\ 1 & C_{m+1}^2 & C_{m+1}^3 & C_{m+1}^4 & \ldots & C_{m+1}^m \end{vmatrix}.$$

(C. Bourlet.)

Digitized by Google

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

MÉTHODOLOGIE ET ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT. — PHILOSOPHIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES. — CHRONIQUE SCIENTIFIQUE. — MÉLANGES. — BIBLIOGRAPHIE.

REVUE INTERNATIONALE PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS,

DIRIGÉE PAR

C. A. LAISANT,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique de Paris.

H. FEHR,
Professeur à l'Université de Genève et au Gymnase.

AVEC LA COLLABORATION DE

A. BUHL,
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Prix de l'abonnement annuel : Union postale........... **15 fr.**

On s'abonne par l'envoi d'un mandat postal à l'un des libraires-éditeurs

GAUTHIER-VILLARS,
55, quai des Grands-Augustins, Paris.

GEORG et Cie,
10, rue Corraterie, Genève.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

[BO]USSINESQ (J.), Membre de l'Institut, Professeur de Mécanique physique [à] la Faculté des Sciences de Paris. — **Cours d'Analyse infinitésimale,** à l'usage des personnes qui étudient cette Science en vue de ses applications mécaniques et physiques. 2e éd., 2 vol. grand in-8, avec fig.

On vend séparément :

TOME I. — *Calcul différentiel.*

[Pa]rtie élémentaire (pour les Élèves des Écoles industrielles); 1887.. 7 fr. 50 c.
[Co]mpléments; 1887.. 9 fr. 50 c.

TOME II. — *Calcul intégral.*

[Pa]rtie élémentaire (pour les Élèves des Écoles industrielles); 1890. 7 fr. 50 c.
[Co]mpléments; 1890.. 16 fr.

Ce Cours d'Analyse s'adresse aux physiciens, naturalistes, élèves ingénieurs, [ph]ilosophes, etc., qui, sans avoir fait des études mathématiques très étendues, [é]prouvent le besoin de connaître, dans son esprit et dans ses applications [con]crètes (même les plus avancées), le calcul des infiniment petits ou des fonc[tio]ns continues. L'auteur espère, en conduisant son lecteur *pas à pas* par les [vo]ies les plus intuitives, les mieux appropriées à notre sentiment naturel de [la] graduelle variation des choses, le familiariser entièrement avec les idées et [le]s méthodes qui ont valu à ce puissant instrument intellectuel, toujours en [voi]e d'accroissement depuis le XVIIe siècle, sa merveilleuse coopération aux [pro]grès des Sciences de la nature.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Mai 1904.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6ᵉ).

CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS (Exposition universelle de 1900). — **Rapports présentés au Congrès international des Mathématiciens**, réuni à Paris en 1900, rassemblés et publiés par E. Duporcq, Secrétaire général du Congrès. Grand in-8; 1902. 16 fr.

DARBOUX (G.), Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences. — **Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal.** 4 volumes grand in-8, avec figures, se vendant séparément :

Ire Partie : *Généralités. — Coordonnées curvilignes. Surfaces minima*; 1887 .... 15 fr.

IIe Partie : *Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. Des lignes tracées sur les surfaces*; 1889 .... 15 fr.

IIIe Partie : *Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres différentiels. Déformation des surfaces*; 1894 .... 15 fr.

IVe Partie : *Déformation infiniment petite et représentation sphérique*; 1896 .... 15 fr.

31577 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.



NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME IV.

JUIN 1904.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris,
à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,
ou à M. BOURLET, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,
ou à M. BRICARD, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.
(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Digitized by Google

Rédacteur de service : M. C. Bourlet.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences.

Besançon : M. Ét. Delassus. — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Duport. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. Montpellier M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers : M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

BOREL (Émile), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Collection de monographies sur la Théorie des fonctions**, publiée sous la direction de Émile Borel.

Leçons sur la théorie des fonctions (*Éléments de la théorie des ensembles et applications*), par Émile Borel, 1898.......................... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions entières, par Émile Borel ; 1900..... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les séries divergentes, par Émile Borel ; 1901.... 4 fr. 50 c.

Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France, recueillies et rédigées par Robert d'Adhémar ; 1902........ 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au Collège de France, recueillies et rédigées par Ludovic Zoretti ; 1903............ 3 fr. 50 c.

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France, par Henri Lebesgue, 1904......... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions de variables réelles et leur représentation par des séries de polynomes, professées à l'École Normale supérieure par Émile Borel et rédigées par Maurice Fréchet, avec une Note de Paul Painlevé.. (*Sous presse.*)

Leçons sur les fonctions discontinues, par René Baire.. (*Sous presse.*)

Leçons sur les séries de polynomes. .... (*En préparation.*)

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par Ernest Lindelöf.. (*En préparation.*)

Quelques principes fondamentaux de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, par Pierre Cousin.............. (*En préparation.*)

Développements en séries de polynomes des fonctions analytiques, par É. Borel.. (*En préparation.*)

...s sur les correspondances entre variables réelles, par M. Jules .... (*En préparation.*)

Digitized by Google

[K9aα]

SUR UNE GÉNÉRALISATION DES NOTIONS D'AIRE ET DE PLAN;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

La généralisation que je propose pour la notion d'aire avait été déjà énoncée séparément par M. Peano (1890) *et M. Laisant* (1899). *M. Peano en donne même une application fort intéressante à la définition de l'aire d'une surface* [Sulla definizione dell'area d'una superficie (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 19 *janvier* 1890)]. *M. Laisant, qui ne connaissait pas la Note de M. Peano, a également proposé la généralisation de notion de plan* [Aire d'une courbe gauche fermée (Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, 18 *septembre* 1899)].

Le premier paragraphe de cet article ne présente donc rien de nouveau; le second me paraît apporter une utile justification de l'extension proposée et peut avoir un certain intérêt au point de vue du calcul fonctionnel.

1° Nous ne considérerons, dans ce qui suit, que des courbes L, planes ou gauches, formées d'un ou de plusieurs contours fermés à tangente continue, sauf en un nombre fini de points isolés. Supposons appliquée suivant chaque élément de L une force F représentée en grandeur, direction et sens par la moitié de cet élément (en supposant qu'un sens de parcours ait été préalablement défini sur L).

Digitized by Google

La résultante générale et le moment résultant de ce système de forces pris à l'origine seront des vecteurs finis

$$R : \frac{1}{2}\int_L dx, \quad \frac{1}{2}\int_L dy, \quad \frac{1}{2}\int_L dz,$$

$$S : \begin{cases} S_1 = \frac{1}{2}\int_L y\,dz - z\,dy, \\ S_2 = \frac{1}{2}\int_L z\,dx - x\,dz, \\ S_3 = \frac{1}{2}\int_L x\,dy - y\,dx. \end{cases}$$

D'ailleurs, puisque la courbe L est composée de lignes fermées, les trois premières intégrales sont nulles. Donc le système de forces se réduit à un couple dont le moment résultant est le même en un point quelconque et a pour projections sur les axes de coordonnées les aires S_1, S_2, S_3 des trois projections de L.

D'ailleurs, si la courbe est plane, son aire est égale, comme on sait, à la longueur $\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$ du vecteur S, et son plan est perpendiculaire à ce vecteur. Mais la définition de ce vecteur est indépendante de la question de savoir si la courbe est plane ou non. Il est alors naturel de prendre ces propriétés comme définition dans le cas général. Nous appellerons donc AIRE *d'une courbe* L, *plane ou gauche, formée d'un ou de plusieurs contours fermés, la longueur du* VECTEUR S *qui a pour projection les aires* S_1, S_2, S_3 *des projections de* L *et* DIRECTION DE PLAN *de cette courbe la direction de plan pependiculaire à ce vecteur*. Les aires S_1, S_2, S_3 seront d'ailleurs comptées positivement ou négativement selon que la projection du sens de parcours de L sur un plan de coordonnées sera le sens direct de rotation défini dans ce plan ou non.

Digitized by Google

Nous allons montrer que cette définition, non seulement contient la définition ordinaire comme cas particulier, mais qu'elle permet d'énoncer encore, dans le cas de courbes gauches, certaines propriétés de l'aire et du plan d'une courbe plane.

Tout d'abord, la définition mécanique que nous avons donnée du vecteur S nous permet de constater que la définition de ce vecteur est indépendante du choix des axes de coordonnées. Par conséquent, l'aire et le plan d'une courbe gauche ne dépendent que de cette ligne elle-même.

On voit de même que la projection du vecteur S sur un axe quelconque est la somme des moments des forces F par rapport à cet axe. Par suite, l'AIRE *de la projection d'une courbe* GAUCHE L *sur un plan quelconque* P *est égale au produit de l'*AIRE *de cette courbe par le cosinus de l'angle du plan* P *avec le* PLAN *de la courbe* L.

Il en résulte immédiatement la proposition suivante :

Étant donnée une courbe fermée plane ou gauche L, *il existe en général une direction de plan* P *et une seule telle que l'aire de la projection de* L *sur un plan quelconque perpendiculaire à* P *soit constamment nulle.*

C'est cette direction P que nous avons appelée *direction du plan de la courbe.* S'il existe deux telles directions, toute projection de la courbe a une aire nulle. Il en est ainsi, par exemple, lorsque L se compose de deux courbes fermées L_1, L_2 telles que L_2 s'obtienne en effectuant une translation quelconque de L_1 et renversant le sens de parcours. Il serait intéressant de chercher si ce cas peut aussi se présenter pour une courbe fermée d'un seul morceau et sans points doubles.

Digitized by Google

Le théorème précédent fait apparaître la direction de plan d'une courbe comme une direction privilégiée jouissant de propriétés particulières, même lorsque la courbe n'est pas plane.

Cette observation est encore confirmée par la remarque suivante :

Tout plan de symétrie d'une courbe plane ou gauche est perpendiculaire à la direction du plan de cette courbe.

2° Arrivons maintenant au théorème qui montre le mieux le caractère, en quelque sorte nécessaire, de notre généralisation (que sa définition mécanique avait pu faire paraître un peu artificielle).

Auparavant, rappelons quelques définitions. Nous appellerons *fonction de la ligne* L une quantité déterminée par la ligne L et qui ne varie qu'avec elle. Nous dirons que deux courbes L, L′ ont un voisinage défini par le nombre ε, si l'on peut établir entre les points de L et de L′ une correspondance univoque et réciproque dans laquelle la distance de deux points correspondants reste inférieure à ε.

Par définition, une fonction de ligne U_L sera continue si $(U_{L'} - U_L)$ tend vers zéro lorsque ε tend vers zéro, L restant fixe.

Enfin étant données deux courbes L, L′, nous désignerons par L + L′ l'ensemble des courbes L, L′ duquel on a supprimé, s'il en existe, les arcs communs à L, L′ parcourus en sens contraires.

La courbe L + L′ rentrera comme L et L′ dans la catégorie de courbes à laquelle nous nous limitons.

Ceci posé, il suffit de réfléchir à la manière dont on définit, en Géométrie élémentaire, l'aire d'une courbe

Digitized by Google

plane L pour constater que la méthode ordinaire permet d'énoncer la proposition suivante :

L'aire d'une ligne PLANE *fermée* L *est la* SEULE *fonction de ligne* U_L *qui jouisse des quatre propriétés suivantes lorsque la ligne* L *reste dans un plan fixe :*

I. *Elle est continue ;*

II. *Elle vérifie l'équation fonctionnelle*

$$U_{L+L'} = U_L + U_{L'};$$

III. *Elle ne varie pas lorsqu'on déplace la courbe* L *sans la déformer ;*

IV. *Elle est égale à* 1 *pour un carré de côté égal à* 1 *parcouru dans le sens direct.*

Nous sommes conduits à chercher s'il existe une fonction de ligne jouissant des mêmes propriétés dans le cas d'une courbe plane ou gauche.

D'après ce qui précède, cette fonction U_L coïncidera avec l'aire de L lorsque la courbe L sera plane. Mais, pour qu'on puisse étendre les quatre conditions à une courbe gauche, il faudra supprimer l'hypothèse que L reste dans un plan fixe. Cela suffit pour qu'il soit maintenant impossible de réaliser les quatre conditions. Car si les sens de parcours des faces L_1, L_2, L_3 d'une pyramide triangulaire de sommet P et de base L sont convenablement choisis, on aura

$$L = L_1 + L_2 + L_3$$

et, par conséquent, on devrait avoir

$$U_L = U_{L_1} + U_{L_2} + U_{L_3}.$$

Or L_1, L_2, L_3, L étant des courbes planes, les quan-

Digitized by Google

tités U_L, U_{L_1}, U_{L_2}, U_{L_3} seront les aires des quatre faces de la pyramide et cette égalité, qui est exacte lorsque P est dans le plan de L, n'aura pas lieu quel que soit P.

On ne peut donc pas généraliser d'une manière immédiate; mais cela tient à ce qu'il faut généraliser les conditions en même temps que les objets auxquels elles s'appliquent. Et la considération du vecteur S nous conduit naturellement à cette extension. Nous pourrons appeler *fonction vectorielle continue de la ligne* L un vecteur dont les trois projections sont des fonctions continues de la ligne L et nous énoncerons la proposition suivante :

Le vecteur S *est la seule* FONCTION VECTORIELLE U_L *de la ligne fermée* L *qui jouisse des quatre propriétés suivantes :*

I'. *Elle est continue;*

II'. *Elle vérifie l'équation fonctionnelle*

$$U_{L+L'} = (U_L + U_{L'}),$$

l'expression $(U_L + U_{L'})$ *désignant la somme* GÉOMÉTRIQUE *des deux vecteurs* U_L, $U_{L'}$;

III'. *Dans un déplacement de* L *sans déformation, le vecteur* U_L *subit le même déplacement;*

IV'. *La longueur du vecteur* U_L *est égale à* 1 *lorsque* L *est un carré de côté égal à* 1 *parcouru dans le sens direct.*

Il suffit de se reporter à la définition mécanique de S pour constater que S vérifie bien ces quatre conditions. Nous allons montrer qu'il n'y a pas d'autre solution.

Digitized by Google

En effet, s'il existe un vecteur U_L vérifiant I', II', III', IV', sa longueur satisfera aux conditions I, II, III, IV, lorsque L est une ligne plane d'un plan fixe arbitraire. Donc, cette longueur mesure l'aire de L lorsque L est une courbe plane.

D'autre part, la direction du vecteur U_L doit être perpendiculaire au plan de la ligne plane L. En effet, considérons deux lignes L, L' d'un plan P, symétriques par rapport à une droite D du plan P; leurs aires seront égales et de signes contraires. Donc l'aire de L + L' est nulle et, par conséquent,

$$U_{L+L'} = 0;$$

les vecteurs U_L et $U_{L'}$ sont, par suite, égaux et de sens contraire, puisque leur résultante est nulle. Or, on passe de L à L' et, par suite, de U_L à $U_{L'}$ par une rotation de 180° autour de D. Les vecteurs U_L, $U_{L'}$ doivent donc être symétriques par rapport à D et, comme ils sont directement opposés, ils sont nécessairement perpendiculaires à D. En résumé, quelle que soit la ligne L du plan P, le vecteur U_L est constamment perpendiculaire à toute droite de ce plan, il est donc perpendiculaire à ce plan.

Il résulte de ce qui précède que le vecteur U_L coïncide certainement avec le vecteur S quand la ligne est plane. Il est facile de montrer qu'il en est encore de même pour une ligne fermée gauche quelconque L. En effet, inscrivons une ligne polygonale fermée Π_n de n côtés dans cette ligne L, de façon que les sens de parcours se correspondent, et soit A un point quelconque de l'espace. On pourra déterminer les sens de parcours des triangles $L_1, L_2, \ldots, L_n$ de sommet A ayant pour bases les côtés de Π_n, de façon que l'on ait

$$\Pi_n = L_1 + L_2 + \ldots + L_n,$$

Digitized by Google

d'où

$$U_{\Pi_n} = (U_{L_1} + U_{L_2} + \ldots + U_{L_n}).$$

Par suite, la projection sur Oxy de U_{Π_n} sera la somme algébrique des projections de $U_{L_1}, \ldots, U_{L_n}$, c'est-à-dire des aires des projections $L'_1, \ldots, L'_n$ de $L_1, \ldots, L_n$ sur xOy. Or, si Π'_n est la projection de Π_n sur xOy, l'aire de Π'_n sera égale à cette somme algébrique. En définitive, les projections de U_{Π_n} seront les aires algébriques des projections de Π_n.

Si, maintenant, on fait tendre les longueurs des côtés de Π_n vers zéro, avec $\frac{1}{n}$, la propriété de continuité montre qu'il en sera de même pour L. Donc U_L est identique à S.

On voit ainsi que, pour avoir une véritable généralisation de l'aire, il faut remplacer le *nombre* qui mesure l'aire par le *vecteur* S. On pourrait appeler le vecteur S, *aire vectorielle* de L et sa longueur *aire scalaire* de L. On pourrait alors énoncer ainsi un théorème bien connu dans le cas des courbes planes :

L'aire vectorielle de la projection de L *sur un plan* P *est égale à la projection de l'aire vectorielle de* L *sur la perpendiculaire à* P.

Ce théorème doit être entendu en grandeur et en signe; c'est-à-dire que l'aire de la projection sera affectée d'un signe ainsi que les longueurs portées sur l'axe Δ perpendiculaire au plan P. Les aires seront comptées positivement quand un observateur placé sur l'axe Δ, la tête dans le sens positif par rapport aux pieds, voit le contour projeté parcouru dans le sens direct.

Digitized by Google

[M¹5h]

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CUBIQUES NODALES;

PAR M. T. LEMOYNE.

Considérons une cubique nodale et une involution de droites OP, OP′, OQ, OQ′, ..., ayant pour sommet le point double O et pour rayons doubles les tangentes à la cubique en ce point. Ces rayons doubles forment une involution avec chaque système de deux couples tels que OP, OQ et OP′, OQ′; OP, OQ′ et OP′, OQ; par suite, d'après un théorème bien connu de Chasles, les droites PQ, P′Q′ d'une part et les droites PQ′, P′Q de l'autre se coupent en deux points de la courbe.

1. *Si, par le point double* O *d'une cubique nodale, on mène deux couples de droites* OP, OP′ *et* OQ, OQ′, *conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes en* O, *les cordes* PQ, P′Q′ *et* PQ′, P′Q *interceptées par deux droites non conjugées des deux couples et par les deux droites restantes se coupent en deux points* M *et* N *de la courbe.*

On en déduit immédiatement, lorsque OQ se rapproche indéfiniment de OP, que :

2. *Lorsque deux droites issues du point double sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes en ce point, les tangentes aux deux points où elles rencontrent la cubique se coupent sur cette courbe.*

Par un point A de la cubique on ne peut mener que deux tangentes n'ayant pas leur contact en ce point. Si l'on trace dès lors la droite AP tangente en P, la conju-

Digitized by Google

guée harmonique OP′ de OP par rapport aux tangentes en O rencontre la courbe en un point P′ tel que la tangente en ce point passe par A (2). Le point P′ coïncide par suite avec le point de contact de la seconde tangente menée par A.

3. *Si, d'un point d'une cubique nodale, on mène les deux tangentes à la courbe autres que la tangente en ce point, les droites qui joignent les points de contact au point double sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes en ce dernier point.*

On en déduit cette propriété des cubiques dont les tangentes au point double sont rectangulaires :

4. *Lorsque, par un point d'une telle cubique, on mène les deux tangentes à la courbe autres que la tangente en ce point, l'angle sous lequel la corde de contact est vue du point double a pour bissectrices les tangentes en ce dernier point.*

On en déduit comme cas particulier ce théorème connu :

Si, d'un point d'inflexion I *d'une cubique nodale, on mène la tangente* IM *à la cubique en* M, *les droites qui joignent* I *et* M *au point double sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes en ce point.*

Lorsque, dans le théorème 3, le point d'où l'on mène les deux tangentes décrit la cubique, les droites qui joignent les points de contact au point double engendrent évidemment l'involution qui a pour rayons doubles les tangentes en ce dernier point. La corde de contact enveloppe par suite une conique; d'ailleurs la corde interceptée par chacun des rayons doubles de l'involution considérés comme deux rayons homologues

Digitized by Google

infiniment voisins est évidemment ce rayon lui-même. Nous pouvons donc dire que :

5. *La corde de contact des deux tangentes menées d'un point mobile d'une cubique nodale à cette courbe enveloppe une conique tangente aux deux tangentes à la cubique en son point double.*

Si ces deux tangentes sont rectangulaires, les droites isotropes sont homologues dans l'involution et, par suite, si la cubique est circulaire, elles interceptent dans cette cubique la droite de l'infini, ce qui nous donne la propriété connue :

Si, d'un point d'une strophoïde on mène les deux tangentes à la courbe autres que la tangente en ce point, la corde de contact enveloppe une parabole dont la directrice passe par le point double.

Lorsque les droites isotropes sont tangentes au point double, les rayons homologues de l'involution sont rectangulaires et l'on a les propriétés suivantes des cubiques acnodales tangentes en leur point conjugué aux droites isotropes :

6. *Si, par le point conjugué d'une telle cubique on mène deux couples de sécantes rectangulaires coupant respectivement la cubique en* A, A′ *et* B, B′, *les cordes* AB, A′B′ *et* AB′, A′B *se coupent en deux points* M *et* N *de la courbe.*

7. *Les tangentes aux extrémités d'une corde vue du point double isolé sous un angle droit se coupent en un point* P *de la courbe.*

8. *Réciproquement, si d'un point* P *de la cubique, on mène les deux tangentes à cette courbe, la corde*

Digitized by Google

de contact AB *est vue du point conjugué sous un angle droit.*

9. *Cette corde enveloppe, lorsque le point* P *décrit la courbe, une conique ayant le point conjugué pour foyer.*

En remarquant que les côtés d'un angle qui admet des bissectrices données engendrent un faisceau involutif dont les droites isotropes forment un couple de rayons homologues, on obtiendra la propriété suivante des mêmes cubiques :

10. *Lorsque, par le point conjugué* O *d'une cubique acnodale tangente en ce point aux droites isotropes, on mène une sécante quelconque coupant la courbe en* E, *les couples de droites issues de* O *également inclinées sur* OE *interceptent dans la courbe des cordes qui concourent au point d'intersection de la cubique et de la tangente en* E.

[M¹5h]

SUR QUELQUES APPLICATIONS D'UN THÉORÈME DE CHASLES AUX CUBIQUES NODALES CIRCULAIRES;

Par M. T. LEMOYNE.

I.

Je me propose de donner dans cette Note quelques propriétés qui dérivent toutes du théorème suivant de Chasles :

Si l'on mène par le point double d'une cubique des

Digitized by Google

couples de droites en involution tels que les deux tangentes à la courbe en ce point forment un des couples, les cordes interceptées dans la cubique entre ces droites passeront toutes par un même point de cette courbe.

Si les deux tangentes ne forment pas un couple faisant partie de l'involution, les cordes sous-tendues enveloppent une conique.

Par le point double O d'une cubique circulaire, menons des couples de droites également inclinées sur les bissectrices de l'angle des tangentes en ce point; les droites isotropes sont homologues dans cette involution. D'après le théorème précédent, les cordes interceptées par les couples de droites passent par un point fixe de la courbe, les droites isotropes interceptent d'ailleurs une corde qui, passant par les points cycliques, appartient à la droite de l'infini et le point de concours des cordes est le troisième point où la cubique coupe cette droite. Chaque rayon double pouvant être considéré comme deux rayons homologues infiniment voisins, l'interceptée devient alors la tangente en son point d'intersection avec la courbe. Les deux tangentes ainsi obtenues sont celles que l'on peut mener à la courbe par son troisième point d'intersection avec la droite de l'infini en dehors de la tangente en ce point qui est asymptote. Elles sont évidemment parallèles à celle-ci.

1. *Lorsque, par le point double d'une cubique circulaire, on mène des couples de droites également inclinées sur les bissectrices de l'angle des tangentes en ce point, les cordes interceptées dans la courbe sont parallèles à l'asymptote.*

2. *Dans une cubique circulaire, les tangentes aux*

Digitized by Google

deux points d'intersection de la courbe et des bissectrices de l'angle des tangentes au poiut double sont parallèles à l'asymptote.

De ce qu'une parallèle à l'asymptote ne rencontre la cubique qu'en deux points à distance finie, on déduit très facilement que :

3. *Toute corde parallèle à l'asymptote d'une cubique nodale circulaire est vue du point double sous un angle qui a pour bissectrices les bissectrices de l'angle des tangentes en ce point.*

Les deux tangentes à la courbe parallèles à son asymptote ont leurs points de contact sur les bissectrices de l'angle des tangentes au point double.

Traçons deux sécantes rectangulaires OP, OQ et envisageons maintenant le cas où les droites homologues sont également inclinées sur l'une de ces droites. Les tangentes au point double ne forment pas un couple appartenant à l'involution, les cordes interceptées enveloppent dès lors une conique qui, tangente à la droite de l'infini interceptée dans la courbe par le couple de droites isotropes, est une parabole. Cette parabole est d'ailleurs tangente aux tangentes à la courbe ayant pour contact les intersections P et Q des deux sécantes et de la courbe.

4. *Lorsque par le point double* O *d'une cubique circulaire on mène deux sécantes rectangulaires* OP, OQ *et que l'on trace par* O *des couples de droites également inclinées sur* OP *et* OQ, *les cordes interceptées enveloppent une parabole tangente aux tangentes en* P *et* Q *à la cubique.*

Digitized by Google

II.

Si, au lieu d'être formée par des couples de transversales également inclinées sur une autre, l'involution se compose de droites rectangulaires, les droites isotropes seront les rayons doubles de cette involution et, par conséquent, les cordes interceptées enveloppent (hormis le cas de la strophoïde) une conique qui est évidemment tangente aux tangentes à la courbe aux points cycliques, c'est-à-dire aux droites isotropes issues de son foyer singulier; celui-ci est donc foyer de cette conique.

5. *Si, par le point double d'une cubique circulaire, on mène des couples de droites rectangulaires, les cordes interceptées enveloppent une conique ayant pour foyer le foyer singulier de la cubique.*

On en déduit que :

6. *Les projections du foyer singulier d'une cubique nodale circulaire sur les cordes interceptées par des couples de droites rectangulaires issues du point double sont sur un cercle.*

III.

Par le point double O de la cubique, menons une droite fixe quelconque Δ et considérons le faisceau de cercles qui ont leurs centres sur cette droite et passent par O.

Un cercle passant par O ne peut couper la cubique qu'en deux autres points A, B; d'ailleurs, dans le cas actuel, lorsque l'un de ces points est déterminé, l'autre

Digitized by Google

l'est également, car il n'y a qu'un cercle passant par O, A et ayant son centre sur Δ; la correspondance des droites OA et OB étant visiblement réciproque est par suite involutive.

En considérant le cercle dont le centre est infiniment voisin de O, on voit que les tangentes à la courbe en O forment un couple de l'involution, ce qui montre que les cordes interceptées concourent en un point de la cubique. Pour déterminer ce point, prenons maintenant comme centre un point M infiniment éloigné de O sur Δ, désignons par OC la corde perpendiculaire en O à Δ, le cercle de rayon MO se réduit à la droite de l'infini et à OC; la corde interceptée est parallèle à l'asymptote menée par C, elle coupe la courbe au point fixe D, point de concours des cordes.

Lorsque les cordes interceptées sont les diamètres des cercles, les couples de droites homologues sont rectangulaires et l'on retombe sur la définition de la strophoïde qui n'est plus dès lors qu'un cas particulier de la proposition suivante applicable à cette courbe ainsi qu'aux autres cubiques circulaires.

7. *Si, par le point double* O *d'une cubique circulaire, on mène une droite quelconque* Δ, *les cercles passant par* O *et ayant leurs centres sur* Δ *interceptent dans la cubique des cordes qui passent par un point fixe* D *de cette courbe.*

Le point fixe D *est l'intersection de la courbe et de la parallèle à l'asymptote menée par l'extrémité* C *de la corde* OC *perpendiculaire en* O *à* Δ.

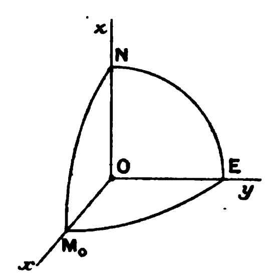
Digitized by Google

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1904. COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

PREMIÈRE QUESTION.

On donne une sphère de rayon r, *de centre* O *origine de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz. *Un point de cette sphère, primitivement situé en* M_0 *sur* Ox, *se déplace uniformément sur le grand cercle* M_0N, *de* M_0



vers N, *avec une vitesse angulaire* ω. *En même temps le plan primitivement situé en* OM_0N *tourne uniformément autour de* ON, *de* OM_0N *vers* OEN, *avec la même vitesse angulaire. Par suite de ce double mouvement, le point mobile considéré, au bout du temps* t, *occupera une certaine position* M.

I. *Déterminer en fonction de* t *les coordonnées du point* M, *les composantes de sa vitesse* v, *et celles de son accélération* w *suivant les directions des axes. Déter-*

Digitized by Google

miner aussi la grandeur de la vitesse, celle de l'accélération tangentielle w_t, *et de l'accélération normale.* w_n.

II. *Construire les projections sur les trois plans coordonnés de la trajectoire de* M.

III. 1° *L'accélération totale de* M *étant représentée par une droite* MW, *et cette droite venant percer le plan des* xy *en* P, *déterminer dans ce plan le mouvement du point* P.

2° *Démontrer que la droite* MW *rencontre une droite fixe.*

I. Au bout du temps t, le point M se trouve à la cote

$$z = r \sin \omega t,$$

par suite, sur un petit cercle, parallèle au plan Oxy, de rayon $r \cos \omega t$. D'ailleurs le plan zOM fait aussi avec zOx un angle égal à ωt. Les deux autres coordonnées sont, dès lors,

$$x = r \cos^2 \omega t, \qquad y = r \cos \omega t \sin \omega t.$$

On peut donc écrire

$$(1) \qquad \begin{cases} x = r \cos^2 \omega t, \\ y = r \sin \omega t \cos \omega t, \\ z = r \sin \omega t, \end{cases}$$

ou encore

$$(1\ bis) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{r(1 + \cos 2\omega t)}{2}, \\ y = \dfrac{r \sin 2\omega t}{2}, \\ z = r \sin \omega t. \end{cases}$$

Digitized by Google

Il vient maintenant, par dérivation,

$$(2)\qquad \begin{cases} x' = -\,r\omega \sin 2\omega t, \\ y' = \quad r\omega \cos 2\omega t, \\ z' = \quad r\omega \cos \omega t; \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} x'' = -\,2r\omega^2 \cos 2\omega t, \\ y'' = -\,2r\omega^2 \sin 2\omega t, \\ z'' = -\quad r\omega^2 \sin \omega t; \end{cases}$$

d'où, pour la vitesse,

$$(4)\qquad v = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = r\omega\sqrt{1 + \cos^2 \omega t},$$

et pour l'accélération totale

$$(5)\qquad w = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2} = r w^2 \sqrt{4 + \sin^2 \omega t}.$$

On a ensuite, pour l'accélération tangentielle,

$$(6)\qquad w_t = \frac{dv}{dt} = \frac{-\,r\omega^2 \sin \omega t \cos \omega t}{\sqrt{1 + \cos^2 \omega t}},$$

et pour l'accélération normale,

$$(7)\qquad \begin{cases} w_n = \sqrt{w^2 - w_t^2} \\ \quad = r\omega^2 \sqrt{4 + \sin^2 \omega t - \dfrac{\sin^2 \omega t \cos^2 \omega t}{1 + \cos^2 \omega t}} \\ \quad = r\omega^2 \sqrt{\dfrac{5 + 3\cos^2 \omega t}{1 + \cos^2 \omega t}}. \end{cases}$$

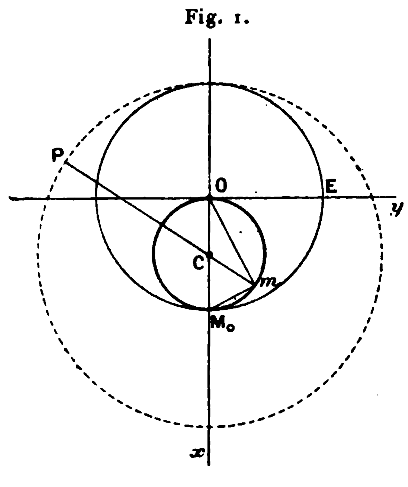
II. L'élimination de ωt, entre les équations (1) ou (1 *bis*), prises deux à deux, donne immédiatement, pour les projections de la trajectoire sur les plans coordonnés,

$$(8)\qquad x^2 + y^2 = rx,$$

Digitized by Google

cercle décrit sur OM_0 comme diamètre (*fig.* 1),

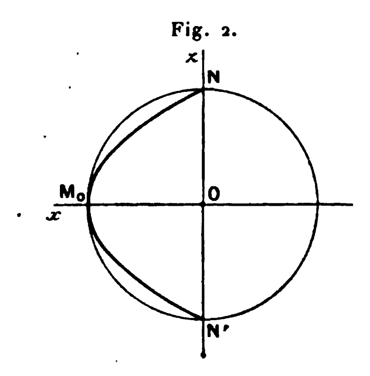
Fig. 1.



(9) $$z^2 + rx = r^2,$$

parabole de sommet M_0 et d'axe OM_0 (*fig.* 2), passant

Fig. 2.



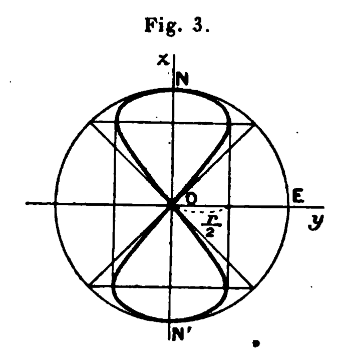
par les extrémités du diamètre de la sphère dirigé suivant Oz, ayant un paramètre égal à $\frac{r}{2}$, et dont la partie utile est limitée à Oz,

(10) $$z^4 + r^2y^2 = r^2z^2,$$

Digitized by Google

quartique en forme de huit (*fig.* 3) (dite parfois *lemniscate de Gerono*), symétrique par rapport à Oy et Oz, ayant pour tangentes en son point double O les

Fig. 3.



bissectrices des axes, et coupant Oz aux mêmes points que la parabole.

Remarques géométriques. — 1° Si m est la projection de M sur le plan Oxy (*fig.* 1), les triangles OMm et OM_0m, qui ont en commun le côté Om, sont égaux, puisque $OM = OM_0$, et que les angles MOm et M_0Om sont tous deux égaux à ωt.

Il en résulte que l'angle OmM_0 est droit et, par suite, que le lieu de m est le cercle décrit sur OM_0 comme diamètre.

En outre, si C est le centre de ce cercle, milieu de OM_0, l'angle au centre M_0CM étant double de M_0Om, est égal à $2\omega t$, ce qui montre que le point m décrit uniformément le cercle OM_0, dans le sens direct, avec la vitesse angulaire 2ω.

2° Si M' est la projection de M sur le plan Oxz, m' celle de M' sur Ox, on a

$$M'm' = Mm = M_0m.$$

Digitized by Google

Or, dans le cercle OmM_0,

$$\overline{M_0 m}^2 = r.M_0 m'.$$

Donc,

$$\overline{M'm'}^2 = r.M_0 m',$$

ce qui démontre que le lieu de M' est la parabole trouvée ci-dessus analytiquement.

III. Les équations de la droite MP suivant laquelle est dirigée l'accélération sont

$$\frac{X-x}{x''} = \frac{Y-y}{y''} = \frac{Z-z}{z''}.$$

Cette droite coupe donc le plan Oxy au point P de coordonnées

$$X = x - \frac{zx''}{z''}, \qquad Y = y - \frac{zy''}{z''},$$

ou, d'après (1 *bis*),

$$X = \frac{r(1-3\cos 2\omega t)}{2}, \qquad Y = -\frac{3r\sin 2\omega t}{2},$$

qu'on peut écrire

$$X = 2r - 3x, \qquad Y = -3y.$$

Portons l'origine au point C milieu de OM_0, en changeant x en $x_1 + \frac{r}{2}$.

Nous avons

$$X_1 = -3x_1, \qquad Y = -3y.$$

Donc, le point P se trouve sur la droite Cm (*fig.* 1) à une distance, au delà de C, triple de Cm. Par suite, *le point* P *décrit un cercle concentrique à celui que décrit m et de rayon triple;* et, comme nous venons de voir que la droite Cm (ou CP) tourne autour de C dans

Digitized by Google

le sens direct avec une vitesse angulaire 2ω, *le point* P *décrit ce cercle uniformément, et dans le sens direct.*

On peut remarquer que les cercles (m) et (P) sont les cercles de centre C tangents au cercle d'équateur de la sphère.

Puisque la droite mP passe par C, *la droite* MP, dont elle est la projection, *rencontre constamment la parallèle à* Oz *menée par* C.

D'une manière générale, il est d'ailleurs évident que si le mouvement d'un point M se projette sur un plan suivant un mouvement circulaire uniforme de centre C, l'accélération du point M rencontre la perpendiculaire au plan, menée par C. En effet, la projection de l'accélération sur ce plan, qui est l'accélération du mouvement projeté, passe par C.

SECONDE QUESTION.

Déterminer à 0,001 *près la racine positive de l'équation* $x^3 + x^2 - 27,48 = 0$, *en appliquant la méthode d'approximation de Newton.*

On a

$$f(x) = x^3 + x^2 - 27,48,$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2x,$$
$$f''(x) = 6x + 2.$$

Comme on a $f(2,7) < 0$, $f(2,8) > 0$, on voit que

$$2,7 < x < 2,8.$$

En outre $f(2,8)$ étant positif comme $f''(2,8)$, on appliquera la méthode à partir de 2,8.

Enfin le maximum M de $f''(x)$ dans l'intervalle considéré est

$$M = f''(2,8) = 18,8,$$

Digitized by Google

et l'on a

$$\frac{M}{2f'(2,8)} = \frac{18,8}{2 \times 29,12},$$

qui est < 1. Il en résulte, puisque l'intervalle

$$2,8 - 2,7 = 0,1,$$

qu'il suffira de deux applications de la méthode à partir de 2,8 pour avoir l'approximation de 0,001. D'où le calcul :

Première approximation : $x_0 = 2,8$.

$$f(x_0) = 2,312, \quad f'(x_0) = 29,12, \quad f''(x_0) = 18,8, \qquad \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0,0794, \qquad x_1 = 2,8 - 0,0794 = 2,7206.$$

Seconde approximation : $x_1 = 2,7206$.

$$f(x_1) = 0,0585, \quad f'(x_1) = 27,646, \quad f''(x_1) = 18,3236, \qquad \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,0021, \qquad x_2 = 2,7206 - 0,0021 = 2,7185.$$

Donc, à 0,001 près, $x = 2,718$ (nombre e avec 3 décimales).

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE.

Besançon.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Exposition des principales inégalités du mouvement de la Lune dues à l'action du Soleil.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Passer des longitude et latitude géocentriques d'un astre à son ascension droite et à sa déclinaison.* (Juillet 1901.)

Digitized by Google

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Exposer la méthode suivie dans la* Connaissance des Temps *pour le calcul d'une éclipse de Soleil vue d'un lieu particulier.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer la distance lunaire du Soleil, le* 16 *juin* 1885, *à midi moyen temps de Paris.*

(Juillet 1902.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Théorie et calcul des éclipses de Lune.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *En un lieu dont la latitude* λ *est connue, on mesure, à un intervalle de temps* t, *deux hauteurs* h, h' *d'une même étoile : trouver la déclinaison* ⅅ *de cette étoile et son angle horaire* α *lors de la première observation.*

Données numériques :

$$\lambda = 29^\circ,$$
$$h = 37^\circ 56' 59'',6,$$
$$h' = 50^\circ 40' 55'',3,$$
$$t = 2^h 18^m 28^s,66.$$

(Novembre 1901.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Éléments d'une planète.*

Détermination des éléments d'une planète dont on possède une longue suite d'observations.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Ayant mesuré l'azimut* A_0 *d'une étoile par rapport à une mire* M *placée au sud dans le voisinage du méridien, on demande de calculer l'azimut* A *de la mire. On connaît l'heure sidérale* H_s *de l'observation, la latitude* λ *du lieu et les coordonnées équatoriales* Æ *et* ⅅ *de l'étoile.*

Calculer l'influence qu'aurait, sur la détermination de A, *une erreur de* ± 1 *seconde sur l'heure sidérale* H_s.

Chercher à quelle heure sidérale l'observation aurait dû être faite pour rendre insensible l'influence de l'erreur de l'heure. Quel eût été à ce moment l'azimut réel de l'étoile ?

Digitized by Google

Données numériques :

$$A_0 = 208^\circ 25',$$
$$\text{Æ} = 12^h 23^m 7^s,5,$$
$$\text{Ⓓ} = 68^\circ 13' 20'',5,$$
$$H_s = 7^h 8^m 34^s,4,$$
$$\lambda = 45^\circ 11' 23''.$$

(Novembre 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Les éléments du mouvement relatif du Soleil par rapport à la Terre étant donnés, développer l'anomalie excentrique, le rayon vecteur, l'anomalie vraie, la longitude et l'équation du centre en séries ordonnées suivant les sinus et cosinus des multiples de l'anomalie moyenne. Développer aussi l'ascension droite du Soleil, et calculer l'équation du temps.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *La longitude du Soleil étant*

$$l = 116^\circ 34' 9'',11$$

au moment où son centre atteint, au couchant, l'horizon d'un lieu de latitude $\lambda = 45^\circ 45' 11''$, *en déduire l'heure vraie correspondante, l'obliquité de l'écliptique étant*

$$\omega = 23^\circ 27' 6'',60.$$

Déterminer aussi l'heure du coucher, le lendemain, la longitude du Soleil s'étant accrue, dans l'intervalle, de 57′ 17″,13.

Calculer enfin le temps qui s'est écoulé, le premier jour, entre le moment où le Soleil a atteint l'horizon et celui où il a disparu, le diamètre apparent du Soleil étant égal à 31′ 35″.

On ne tiendra pas compte de la réfraction.

(Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Définir, en grandeur et en signe, les erreurs instrumentales de la lunette méridienne.*

Correction de l'heure apparente du passage d'une étoile au méridien.

Influence de l'aberration diurne.

Digitized by Google

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Résolution d'un triangle géodésique. Calcul préalable des erreurs probables d'observation.*

Données numériques :

$$\text{Angles mesurés...}\left\{\begin{array}{l} A_1 = 42°\ 5'\ 36'',68, \\ B_1 = 59.50.54,01, \\ C_1 = 78.\ 4.10,14. \end{array}\right.$$

En outre,

$$a = 56\,559,04 \text{ toises,}$$

$$R = 3\,266\,330 \text{ toises.}$$

(Novembre 1903.)

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Exposer comment la position d'un astre qui décrit une ellipse suivant les lois de Képler dépend de six éléments et indiquer le calcul des coordonnées héliocentriques de l'astre à un instant donné en fonction de ces éléments.*

Établir la relation, connue sous le nom de théorème de Lambert, *qui existe entre deux rayons vecteurs à deux instants donnés, le moyen mouvement et la corde joignant deux positions de l'astre.*

II. *Déduire de cette dernière relation le théorème d'Euler, en supposant que l'ellipse se déforme et tende vers une parabole.* (Juillet 1902.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Exposer sommairement comment on détermine la longueur d'un arc de méridien à la surface du géoïde.*

Montrer comment on résout les triangles géodésiques qui interviennent dans cette détermination et comment on en déduit la longueur du quart du méridien.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Le* 2 *juillet* 1903, *les coordonnées astronomiques de l'étoile* A *sont*

$$\alpha = 19^h\,12^m\,36^s,9, \qquad \delta = 7°\,29'\,37'',7.$$

Calculer : 1° *l'ascension droite de l'étoile équatoriale* B

Digitized by Google

qui se lève à Lille en même temps que A; 2° *la différence des azimuts des astres* A *et* B *au moment de leur lever.*

La latitude de Lille est 50° 38′ 44″. (Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Définir d'une façon précise ce qu'on appelle l'*ÉQUATION DU TEMPS. *Montrer comment elle peut se calculer lorsqu'on a construit une Table des ascensions droites du Soleil vrai et une Table des ascensions droites du Soleil moyen.*

Discuter sommairement la variation annuelle de l'équation du temps, en négligeant les termes de l'ordre de e^2 *et de* $\text{tang}^4 \frac{\omega}{2}$ (*e*, *excentricité de l'orbite terrestre;* ω, *inclinaison de l'orbite terrestre sur l'équateur*).

Montrer quelle influence a cette variation sur la durée de la demi-journée civile.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une étoile* A *a une ascension droite de* 1^h *et une déclinaison de* + 60°; *une étoile* B *a pour coordonnées analogues* 2^h *et* + 45°. *A quelle heure les deux étoiles sont-elles à la même hauteur au-dessus de l'horizon de Lille et quelle est cette hauteur?*

La latitude de Lille est 50° 38′ 44″.

(Novembre 1903.)

Marseille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Théorie de la réfraction atmosphérique.*

Formule approchée pour le cas des distances zénithales très faibles.

Formule de Laplace pour le cas où la distance zénithale n'excède pas 80°. (Juillet 1903.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Un point matériel se meut, sous l'action du Soleil, sur une orbite parabolique.*

Quelles sont les conditions initiales du mouvement?

Comment peut-on obtenir à l'instant t : 1° *sa position héliocentrique;* 2° *sa position géocentrique en coordonnées équatoriales?*

Digitized by Google

II. *Latitude terrestre. Sa détermination par l'observation de la polaire.*

Épreuve pratique. — *On donne, pour l'époque* T, *les coordonnées géocentriques équatoriales* APPARENTES *des planètes Jupiter et Saturne avec les variations* $\delta Æ$, $\delta Ⓓ$ *de ces coordonnées pendant* UNE HEURE *de temps moyen :*

Jupiter ... $\begin{cases} Æ = 21^h 15^m 12^s,68, & \delta Æ = -0^s,809, \\ Ⓓ = -16°46'13'',0, & \delta Ⓓ = -4'',24, \end{cases}$

Saturne... $\begin{cases} Æ = 19^h 50^m 7^s,68, & \delta Æ = -0^s,734, \\ Ⓓ = -21°5'53'',6, & \delta Ⓓ = -2'',15. \end{cases}$

Au même moment, les coordonnées héliocentriques écliptiques VRAIES *des planètes sont :*

Jupiter.... $\begin{cases} V_1 = 307°25'\ 9'',5, \\ S = -0°39'14'',7, \\ \log r = 0,705791, \end{cases}$

Saturne... $\begin{cases} V_1 = 294°\ 2'41'',6, \\ S = -0°\ 3'\ 9'',5, \\ \log r = 1,001104 \end{cases}$

et les coordonnées géocentriques écliptiques VRAIES *du Soleil :*

Soleil ..... $\begin{cases} \mathcal{L} = 100°35'51'',0, \\ \lambda = 0°\ 0'\ 0'',0, \\ \log R = 0,007221. \end{cases}$

Sachant, d'autre part, que la lumière franchit la distance du Soleil à la Terre en 498^s,5, *on demande quelles sont à l'instant* T :

1° *Les coordonnées géocentriques équatoriales* VRAIES *de Jupiter et de Saturne;*

2° *La distance angulaire géocentrique* VRAIE *des deux planètes.*

Vérifier les résultats obtenus. (Juillet 1902.)

Épreuve écrite. — I. *Phénomènes de la précession et de la nutation. Leur influence sur la position des étoiles.*

Digitized by Google

Formules usuelles de la précession en coordonnées équatoriales.

II. *Développer en fonction de l'excentricité è et de l'anomalie moyenne* ζ, *l'expression du rayon vecteur r, dans le mouvement elliptique autour du Soleil.*

Épreuve pratique. — *On donne les positions, en ascension droite, de la Lune pour les dates suivantes :*

Temps moyen de Paris.	Ascension droite.
	h ′ ″
Mars 7. 0^h	5.38.17,12
» 6^h	5.53.14,26
» 12^h	6. 8.13,88
» 18^h	6.23.15,08
» 24^h	6.38 16,97

En conclure les valeurs de l'ascension droite :
1° *D'heure en heure à partir de la date initiale;*
2° *A* $6^h 48^m 0^s$. (Novembre 1902.)

Épreuve écrite. — *Mouvement en longitude du Soleil dans le plan de l'écliptique. Premières observations montrant la non-uniformité du mouvement. Équation du centre pour les anciens. Expliquer sommairement comment on établit pour le Soleil les deux premières lois de Képler. Éléments de l'orbite. Ces éléments étant supposés connus, comment détermine-t-on un lieu du Soleil au temps t? (On pourra supposer que le passage au périgée a lieu à l'instant* $t = 0$.)

Établir l'équation de Képler donnant l'anomalie excentrique u en fonction du temps. Rayon vecteur et anomalie vraie ou longitude exprimés en fonction de u. (On exposera le calcul détaillé des dernières formules demandées, mais il ne sera pas question des développements en série appuyés sur la formule de Lagrange.)

Épreuve pratique. — *On observe au théodolite l'étoile α Bélier dont les coordonnées uranographiques sont :*

$$Æ = 2^h 1^m 42^s \quad \text{et} \quad \mathcal{D} = 23° 0' 14'',$$

Digitized by Google

et l'observation en question donne pour les coordonnées zénithales :

Distance zénithale.... $z = 32°17'10''$
Azimut.............. $A = 56°56'\ 2''$

On demande :

1° *L'heure sidérale du lieu d'observation et sa longitude géographique sachant que l'on possède un chronomètre réglé sur l'heure sidérale de Paris et marquant* $3^h 47^m 52^s,3$ *au moment de l'observation;*

2° *La latitude du lieu d'observation.*

(Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Précession des équinoxes. Explication mécanique élémentaire du phénomène. Ses effets. Avec les coordonnées uranographiques dépendant du pôle et de l'équateur actuels* ($t = 0$) *déterminer les coordonnées du point de la sphère céleste où se trouvera le pôle dans un temps t à venir.*

Parmi les importantes inégalités lunaires, quelle est celle dont la cause peut particulièrement s'assimiler à celle de la rétrogradation du point équinoxial? Pourquoi?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *A l'Observatoire de Paris (colatitude* $\lambda = 41°9'49''$*), on observe l'étoile* β *de Persée (distance polaire* $\delta = 49°25'4''$*) à laquelle on attribue une distance zénithale* $z = 15°7'11''$.

Montrer qu'il existe au sud de Paris, sur le même méridien, un lieu où une observation faite au même instant que la précédente conduirait à attribuer à la même étoile la même distance zénithale qu'à Paris dans un azimut supplémentaire du premier.

Déterminer ce second lieu. (Novembre 1903.)

Poitiers.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *La Lune. Plan de l'orbite. Éléments. Longitude. Rotation de la Lune.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On a trouvé pour la hauteur du centre du Soleil* $47°34'17''$*, avant midi; la latitude du lieu*

Digitized by Google

est 46° 35′ 5″, *on demande l'heure et l'azimut :*

Déclinaison du Soleil........	23° 27′
Temps moyen à midi vrai....	$12^h 1^m 35^s$

(Juillet 1901.)

Épreuve écrite. — *Théorie de la réfraction astronomique.*

Épreuve pratique. — *De l'azimut d'un astre déduire la hauteur et l'heure sidérale.*

Données :

Ascension droite..........	$6^h 46^m$
Déclinaison...............	+23° 1′ 5″
Azimut....................	77° 9′ 13″
Latitude du lieu..........	46° 34′ 55″

(Juillet 1902.)

Épreuve écrite. — I. *Définir la collimation dans le cas de la lunette méridienne. Correction correspondante.*

II. *Précession et nutation en tenant compte des déplacements de l'écliptique et de l'équateur.*

Épreuve pratique. — *Calcul des phases d'une éclipse de Lune.* (Juillet 1903.)

Épreuve écrite. — *On suppose connues les colatitudes extrêmes* λ *et* λ' *d'un arc de méridien dont la longueur est* s; *former l'équation qui relie ces données aux inconnues* a *et* e^2.

Ayant une valeur approchée de e^2, *calculer la longueur du quart de l'ellipse.*

Ayant plusieurs arcs mesurés, quelle est la méthode à suivre pour déduire a *et* e^2?

Épreuve pratique. — *L'inclinaison de l'orbite d'une planète est* 1° 18′ 41″, *la longitude du nœud* 98° 56′ 17″, *trouver la longitude et la latitude héliocentriques quand la longitude vraie dans l'orbite est* 276° 39′ 40″.

(Novembre 1903.)

Digitized by Google

Toulouse.

Épreuve écrite. — I. *Calculer la déviation totale que la réfraction atmosphérique fait subir à un rayon lumineux émané d'une étoile.*

(*Les candidats se borneront au calcul de la déviation, sans faire, sur l'intégrale obtenue, les simplifications résultant d'hypothèses sur la constitution de l'atmosphère.*)

II. *En deux stations* S *et* S_1 *situées sur le même méridien terrestre, l'une dans l'hémisphère nord de latitude géocentrique* φ, *l'autre dans l'hémisphère sud de latitude géocentrique* φ_1, *on observe une même petite planète au moment de son passage au méridien.*

Soient δ *et* δ_1 *les déclinaisons observées en* S *et en* S_1.

Déduire des nombres φ, φ_1, δ, δ_1 *la parallaxe équatoriale horizontale de la petite planète.*

On donne, en outre, le rayon équatorial a *et le rayon polaire* b *de l'ellipsoïde terrestre. On négligera le cube de la parallaxe.* (Novembre 1902.)

Épreuve écrite. — 1° *Établir les formules classiques suivantes du mouvement elliptique :*

$$r = a(1 - e\cos u),$$

$$\sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{v}{2} = \sqrt{1-e}\cos\frac{u}{2},$$

$$\sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{v}{2} = \sqrt{1+e}\sin\frac{u}{2},$$

$$u - e\sin u = M,$$

$$\tang\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tang\frac{u}{2} = \tang\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)\cdot\tang\frac{u}{2},$$

dans lesquelles a, r, $e = \sin\varphi$, u, v, M *désignent respectivement le demi-grand axe, le rayon vecteur, l'excentricité, les anomalies excentrique, vraie et moyenne.*

2° *Étudier la marche de la fonction* $v - u$ *quand* u *varie de* 0° *à* 360°. *Trouver, en particulier, la valeur de* u *pour*

Digitized by Google

laquelle cette différence atteint son maximum, la valeur de ce maximum et le rayon vecteur correspondant.

Construire géométriquement le point de l'orbite correspondant à ce maximum.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *En un lieu de latitude* λ, *on observe une étoile au moment de son passage dans le premier vertical après le méridien. Soient* H *l'heure sidérale de l'observation et* z *la distance zénithale de l'étoile. Déduire de cette observation l'ascension droite et la déclinaison de l'étoile.*

Données numériques :

$$\lambda = 43^\circ 36' 45'',$$
$$H = 7^h 21^m 26^s,3,$$
$$z = 51^\circ 21' 50''.$$

(Novembre 1903.)

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Soient*

$$\psi = at + bt^2 + \Psi,$$
$$\omega = \omega_0 + ct^2 + \Omega$$

les formules qui définissent l'équateur de l'époque $1850 + t$ *relativement à l'écliptique de* 1850, t *étant exprimé en année julienne. On y néglige les petits termes* bt^2, ct^2 *et l'on adopte les valeurs*

$$a = 50'',37, \qquad \omega_0 = 23^\circ 27' 32'';$$

d'autre part, on réduit la nutation en longitude Ψ *et la nutation en obliquité* Ω *à leurs termes les plus importants*

$$\Psi = -17'',25 \sin\beta, \qquad \Omega = +9'',22 \cos\beta,$$

β *étant la longitude du nœud ascendant de la Lune.*

Représenter géométriquement le mouvement de l'équateur moyen par rapport à l'écliptique de 1850, *puis le mouvement de l'équateur vrai par rapport à l'équateur moyen. Ellipse de nutation.*

II. *Une masse* M *homogène de densité* ε *remplit le volume*

Digitized by Google

engendré par un triangle ABC *rectangle en* A *tournant autour d'une parallèle* Cz *à* AB *menée par le sommet* C.

Soit CF *l'attraction exercée par la masse* M *sur un point matériel de masse donnée* μ *coïncidant avec le point* C, *et soit* CF_1 *l'attraction exercée sur le même point matériel par une sphère homogène de même densité* ε *que* M, *ayant pour diamètre un segment* CD *de* Cz *égal à* AB.

On donne $AC = 1^m$; *calculer à* 5^{cm} *près la longueur de* AB *et de* CD *pour que les deux attractions soient les mêmes.*

(Juillet 1903.)

Épreuve écrite. — I. *Trouver la latitude des lieux terrestres pour lesquels, le jour où la déclinaison du Soleil est* $\mathfrak{D}$, *le crépuscule astronomique cesse à* 6 *heures de temps vrai. Quelles sont les valeurs de* $\mathfrak{D}$ *pour lesquelles il existe une latitude répondant à la question et comment varie-t-elle avec* $\mathfrak{D}$? *Calculer la durée du crépuscule à une telle latitude pour le jour indiqué.*

II. *Exposer les différentes méthodes qui permettent d'obtenir dans une première approximation la densité moyenne de la Terre.* (Novembre 1903.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1633.

(1892, p. 29*.)

On considère la quartique, podaire du centre O *d'une conique. Si d'un point quelconque* M *du plan on mène les tangentes à cette quartique dont les points de contact sont* $T_1, T_2, \ldots$ *et si l'on abaisse sur cette même quartique les normales dont les pieds sont* $N_1, N_2, N_3, \ldots$, *on a, quel que soit le point* M,

$$\overline{ON}_1^2 + \overline{ON}_2^2 + \overline{ON}_3^2 + \ldots = \text{const.}$$

Si la conique est une hyperbole équilatère, la quartique

Digitized by Google

devient la lemniscate de Bernoulli, et l'on a, en plus, la relation

$$ON_1 \times ON_2 \times ON_3 \times \ldots = OT_1 \times OT_2 \times OT_3 \times \ldots .$$

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. A.-H. Couvert.

Soit $ax^2 + cy^2 - 1 = 0$ l'équation de la conique rapportée à ses axes; la podaire du centre O a pour équation

$$(1) \qquad f(x, y) \equiv ac(x^2 + y^2)^2 - ay^2 - cx^2 = 0.$$

Le coefficient angulaire de la normale au point (x, y) de cette courbe est

$$\frac{f'_y}{f'_x} = \frac{2ac(x^2 + y^2) - a}{2ac(x^2 + y^2) - c} \cdot \frac{y}{x}.$$

Si α, β sont les coordonnées du point M, les pieds des normales issues de ce point seront déterminées par l'équation (1) et celle obtenue en exprimant que la normale à la quartique au point x, y passe en M; cette dernière équation est

$$(2) \qquad \begin{cases} (\beta - y)[2a(x^2 + y^2) - 1]cx \\ \quad - (\alpha - x)[2c(x^2 + y^2) - 1]ay = 0. \end{cases}$$

D'autre part, N étant le pied d'une quelconque des normales considérées $\overline{ON}^2 = x^2 + y^2$, posons

$$(3) \qquad x^2 + y^2 = r.$$

L'élimination de x, y entre (1), (2), (3) nous donnera une équation en r que nous allons former; pour démontrer la première partie de la question, il nous suffira de chercher la somme des racines de l'équation en r.

De (1) et (3) on tire

$$x = \sqrt{\frac{ar(1 - cr)}{a - c}}, \qquad y = \sqrt{\frac{cr(ar - 1)}{a - c}}.$$

D'autre part, on peut écrire (2)

$$2ac(x^2 + y^2)(\beta x - \alpha y) + a\alpha y - c\beta x + (c - a)xy = 0.$$

Digitized by Google

Portons les valeurs de x et y dans cette équation; il vient

$$2acr\left(\beta\sqrt{\frac{ar(1-cr)}{a-c}}-\alpha\sqrt{\frac{cr(ar-1)}{a-c}}\right)$$
$$+a\alpha\sqrt{\frac{cr(ar-1)}{a-c}}-c\beta\sqrt{\frac{ar(1-cr)}{a-c}}$$
$$+r\sqrt{ac(1-cr)(ar-1)}=0$$

ou

$$c\beta(2ar-1)\sqrt{ar(1-cr)}+a\alpha(1-2cr)\sqrt{cr(ar-1)}$$
$$=-r\sqrt{ac(1-cr)(ar-1)(a-c)}.$$

Élevons au carré, cela donne

$$ac^2\beta^2(2ar-1)^2(1-cr)+a^2c\alpha^2(1-2cr)^2(ar-1)$$
$$-(a-c)acr(1-cr)(ar-1)$$
$$=-2ac\alpha\beta(2ar-1)(1-2cr)\sqrt{ac(ar-1)(1-cr)}.$$

Élevons une seconde fois au carré, nous aurons

$$0=[c\beta^2(2ar-1)^2(1-cr)-a\alpha^2(1-2cr)^2(ar-1)]^2$$
$$+(a-c)^2r^2(1-cr)^2(ar-1)^2-2(a-c)r(1-cr)(ar-1)$$
$$\times[c\beta^2(2ar-1)^2(1-cr)+a\alpha^2(1-2cr)^2(ar-1)].$$

Les seuls termes utiles sont ceux en r^6 et r^5; en ne laissant dans les parenthèses que les termes qui les fournissent, il vient

$$0=[-4a^2c^2(\alpha^2+\beta^2)r^3+4ac(a+c)(\alpha^2+\beta^2)r^2+\ldots]^2$$
$$+(a-c)^2r^2(1-cr)^2(ar-1)^2-2(a-c)r(1-cr)(ar-1)$$
$$\times[4a^2c^2(\alpha^2-\beta^2)r^3+4ac(a+c)(\beta^2-\alpha^2)r^2\ldots],$$

$$a^2c^2[16a^2c^2(\alpha^2+\beta^2)^2+(a-c)^2$$
$$+8ac(a-c)(\alpha^2-\beta^2)]r^6$$
$$+[-32a^2c^2(\alpha^2+\beta^2)^2+2(a-c)^2$$
$$-16ac(a-c)(\beta^2-\alpha^2)]ac(a+c)r^5+\ldots=0.$$

La somme des racines de cette équation est

$$-\frac{2ac(a+c)\begin{bmatrix}-16a^2c^2(\alpha^2+\beta^2)^2+(a-c)^2\\ -8ac(a-c)(\beta^2-\alpha^2)\end{bmatrix}}{a^2c^2\begin{bmatrix}16a^2c^2(\alpha^2+\beta^2)^2+(a-c)^2\\ +8ac(a-c)(\alpha^2-\beta^2)\end{bmatrix}}=2\frac{a+c}{ac}=\text{const.}$$

C. Q. F. D.

Digitized by Google

La seconde partie de l'énoncé du problème fait double emploi avec la question proposée dans les *Nouvelles Annales* sous le n° 1635 (1892, p. 30*) et résolue en 1896, p. 97.

1634.

(1892, p. 92*.)

On considère l'hyperbole équilatère (H) *et le folium* (F) *dont les équations sont*

$$(\mathrm{H}) \qquad x^2 - y^2 = a^2,$$

$$(\mathrm{F}) \qquad (x^2 + y^2)^3 = a^2(x^2 - y^2)^2.$$

1° *Si d'un point quelconque de* (H) *on mène les tangentes à la courbe* (F), *le produit et la somme des rayons vecteurs unissant le centre de* (H) *aux divers points de contact des tangentes sont des quantités constantes. Si du même point on abaisse les normales sur la courbe* (F), *le produit et la somme des rayons vecteurs unissant le centre de* (H) *aux pieds des normales sont aussi des quantités constantes.*

2° *Si d'un point quelconque du plan on mène les tangentes et les normales à la courbe* (F), *le produit des rayons vecteurs des tangentes est égal à* 16 *fois le produit des rayons vecteurs des normales, et la somme des rayons vecteurs des tangentes est égal à* 4 *fois la somme des rayons vecteurs des normales.* (*Ces divers rayons vecteurs sont déterminés comme dans le paragraphe* 1°.)

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. A.-H. Couvert.

1° Soient α, β les coordonnées d'un point quelconque du plan; le coefficient angulaire de la tangente à (F) en un point (x, y) de cette courbe est

$$\frac{2a^2(x^2 - y^2) - 3(x^2 + y^2)^2}{2a^2(x^2 - y^2) + 3(x^2 + y^2)^2}\,\frac{x}{y}.$$

Exprimons que cette tangente passe au point (α, β); cela donne

$$(1) \qquad \beta - y = \frac{2a^2(x^2 - y^2) - 3(x^2 + y^2)^2}{2a^2(x^2 - y^2) + 3(x^2 + y^2)^2}\,\frac{x}{y}(\alpha - x).$$

Digitized by Google

Posant

$$(2)\qquad x^2 + y^2 = \rho^2,$$

nous aurons l'équation aux rayons vecteurs des points de contact des tangentes issues de α, β, en éliminant x et y entre (1), (2) et l'équation de (F). Pour simplifier les calculs, passons aux coordonnées polaires.

L'équation de (F) devient

$$\rho^2 = a^2 \cos^2 2\theta \qquad \text{ou} \qquad \rho = \pm a \cos 2\theta;$$

il suffit de prendre l'une des valeurs de ρ pour avoir toute la courbe; choisissons, par exemple,

$$(3)\qquad \rho = a \cos 2\theta.$$

Je remplace x et y par leurs valeurs $\rho\cos\theta$, $\rho\sin\theta$ dans (1) mais en partie seulement; cela donne

$$\beta - y = \frac{2a - 3\rho}{2a + 3\rho}\,\frac{x}{y}(\alpha - x);$$

d'où

$$\beta y(2a + 3\rho) - \alpha x(2a - 3\rho) + 2a(x^2 - y^2) - 3\rho(x^2 + y^2) = 0$$

ou

$$\beta y(2a + 3\rho) - \alpha x(2a - 3\rho) - \rho^3 = 0.$$

Mais

$$x = \rho\sqrt{\frac{a+\rho}{2a}}, \qquad y = \rho\sqrt{\frac{a-\rho}{2a}}.$$

On a alors

$$\beta(2a + 3\rho)\sqrt{a-\rho} - \alpha(2a - 3\rho)\sqrt{a+\rho} - \rho^2\sqrt{2a} = 0;$$

d'où, après élévation au carré,

$$\beta^2(2a + 3\rho)^2(a - \rho) + \alpha^2(2a - 3\rho)^2(a + \rho) - 2a\rho^4 = 2\alpha\beta(4a^2 - 9\rho^2)\sqrt{a^2 - \rho^2}.$$

Élevons encore au carré; il vient, après avoir simplifié,

$$[\beta^2(2a + 3\rho)^2(a - \rho) - \alpha^2(2a - 3\rho)^2(a + \rho)]^2 + 4a^2\rho^8 - 4a\rho^4[\beta^2(2a + 3\rho)^2(a - \rho) + \alpha^2(2a - 3\rho)^2(a + \rho)] = 0.$$

Digitized by Google

Telle est l'équation aux rayons vecteurs des points de contact. Elle est du huitième degré; les seuls termes qui nous intéressent sont ceux en ρ^8, ρ^7 et le terme indépendant de ρ; on trouve leur valeur facilement et l'équation est

$$4a^2\rho^8 - 36a(\alpha^2-\beta^2)\rho^7 + \ldots + 16a^6(\beta^2-\alpha^2)^2 = 0.$$

D'après les relations entre les coefficients et les racines d'une équation algébrique, nous avons

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \Sigma\rho &= -\frac{-36a(\alpha^2-\beta^2)}{4a^2} = \frac{9(\alpha^2-\beta^2)}{a},\\ \rho_1\rho_2\ldots\rho_8 &= \frac{16a^6(\beta^2-\alpha^2)^2}{4a^2} = 4a^4(\beta^2-\alpha^2)^2. \end{aligned}\right.$$

On voit que, pour un point de (H), $\alpha^2-\beta^2=a^2$; en sorte que ces deux expressions sont constantes.

Occupons-nous maintenant des normales issues de (α, β). La condition pour qu'une normale à (F) au point (x, y) ou (ρ, θ) passe en (α, β) sera, en tenant compte des calculs précédents,

$$\beta - y = -\frac{2a+3\rho}{2a-3\rho}\,\frac{y}{x}(\alpha - x)$$

ou

$$\beta x(2a-3\rho) + \alpha y(2a+3\rho) - 4axy = 0.$$

Je remplace x et y par leurs valeurs en fonction de ρ, ce qui donne

$$\beta(2a-3\rho)\sqrt{a+\rho} + \alpha(2a+3\rho)\sqrt{a-\rho} = 2\rho\sqrt{2a(a^2-\rho^2)}.$$

Élevons au carré, cela donne

$$\beta^2(2a-3\rho)^2(a+\rho) + \alpha^2(2a+3\rho)^2(a-\rho) - 8a\rho^2(a^2-\rho^2)$$
$$= -2\alpha\beta(4a^2-9\rho^2)\sqrt{a^2-\rho^2}.$$

Élevons une seconde fois au carré :

$$\begin{aligned}&[\beta^2(2a-3\rho)^2(a+\rho) - \alpha^2(2a+3\rho)^2(a-\rho)]^2\\ &\quad + 64a^2\rho^4(a^2-\rho^2)^2 - 16a\rho^2(a^2-\rho^2)\\ &\qquad \times [\beta^2(2a-3\rho)^2(a+\rho) + \alpha^2(2a+3\rho)^2(a-\rho)] = 0,\end{aligned}$$

équation du huitième degré dont les seuls termes utiles sont ceux en ρ^8, ρ^7 et le terme indépendant. En mettant seulement

Digitized by Google

ces termes en évidence, il vient

$$64a^2\rho^8 + 16\times 9a(\beta^2-\alpha^2)\rho^7 + \ldots + 16a^6(\beta^2-\alpha^2)^2 = 0.$$

Les relations entre les coefficients et les racines nous donnent alors

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \Sigma\rho &= -\frac{16\times 9.a(\beta^2-\alpha^2)}{64a^2} = \frac{9(\alpha^2-\beta^2)}{4a},\\ \rho_1\rho_2\ldots\rho_8 &= \frac{16a^6(\beta^2-\alpha^2)^2}{64a^2} = \frac{a^4(\beta^2-\alpha^2)^2}{4}.\end{aligned}\right.$$

Nous voyons que ces expressions sont constantes pour un point quelconque de (H).

2° Nous voyons que le produit des rayons vecteurs des tangentes est, d'après (4),

$$4a^4(\beta^2-\alpha^2)^2 = 16\frac{a^4(\beta^2-\alpha^2)^2}{4}.$$

Ce produit est donc égal à 16 fois le produit des rayons vecteurs des normales, fourni par (5).

De même, la somme des rayons vecteurs des tangentes est égale à 4 fois la somme de ceux des normales, ainsi que le montrent immédiatement les relations (4) et (5). Il est d'ailleurs évident que ces deux propriétés sont indépendantes de la position du point (α, β).

1835.

(1900, p. 96.)

Au bout de quel temps t, un capital C placé à intérêts simples à un taux r constitue-t-il une somme égale à celle que constituerait le même capital placé à intérêts composés au taux r' $(r' < r)$ pendant le même temps?

Exprimer t en fonction de r et r'. On admet que les deux sommes sont calculées d'après les formules respectives

$$C(1+rt),\quad C(1+r')^t.$$

(E.-M. Lémeray.)

SOLUTION

Par M. C.-A. L.

L'équation à résoudre est

$$(1+r')^t = 1+rt.$$

Appliquons la méthode donnée dans les *Nouvelles Annales* (décembre 1897). Posons

$$1 + r' = \alpha \qquad \text{et} \qquad 1 + rt = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r}} x};$$

après réduction, l'équation devient

$$x^x = \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{r}}}\right)^{\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{r}}}\right)}.$$

Désignons par b le second membre, on aura

$$x = \sqrt[?]{b}$$

et

$$t = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r}} \sqrt[?]{b}} - 1\right).$$

Cette équation a deux racines réelles correspondant aux deux valeurs de la surracine, l'une est $t = 0$ qui correspond à $x = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r}}}$ la seconde est l'époque cherchée. Pour que les deux racines soient réelles, il faut et il suffit que b soit compris entre $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ et 1; cela aura toujours lieu; les taux r et r' étant positifs et plus petits que 1,

$$\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r}}} = \left(\frac{1}{1 + r'}\right)^{\frac{1}{r}}$$

est toujours compris entre 1 et 0 et l'on sait que si p est compris entre 0 et 1 on a

$$1 > p^p > \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}.$$

En prenant $r = 4\,\%$, $r' = 3\tfrac{1}{2}\,\%$ on trouve

$$t = 8 \text{ ans } 203 \text{ jours}.$$

Digitized by Google

1836.

(1900, p. 96.)

A quelle distance du centre d'une hyperbole équilatère doit-on mener une perpendiculaire à son axe réel pour que l'aire comprise entre les asymptotes, la courbe et la droite cherchée, ait une valeur donnée k.

(E.-M. LÉMERAY.)

SOLUTION
Par M. C.-A. L.

Prenons les asymptotes pour axes et soient x et $\frac{1}{x}$ les abscisses des points d'intersection de l'hyperbole et de la droite cherchée. En prenant pour unité l'abscisse du sommet, l'équation à résoudre est

$$1 + 2 \mathrm{L} x + \frac{1}{x^2} = k.$$

Posons $x^2 = \frac{1}{e^y}$, $k - 1 = a$, l'équation devient

$$e^y = a + y.$$

Posons encore $y + a = \frac{1}{e^a} \frac{1}{z}$; l'équation devient

$$e^{\left(\frac{1}{e}\right)^a \frac{1}{z}} = \frac{1}{z}$$

et peut s'écrire

$$z^z = \left(\frac{1}{e}\right)^{\left(\frac{1}{e}\right)^a},$$

d'où (¹)

$$z = \sqrt[z]{\left(\frac{1}{e}\right)^{\left(\frac{1}{e}\right)^a}};$$

on aura ensuite y, puis x, en fonction de z et la distance demandée sera

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

(¹) Voir *Nouvelles Annales*, décembre 1897.

Digitized by Google

1917.

(1901, p. 336.)

On joint un point M *quelconque d'une hyperbole équilatère à ses deux sommets* AA' *et l'on considère le cercle circonscrit au triangle* MAA' *et son cercle des neuf points :*

1° *Le lieu des centres de similitude de ces deux cercles se compose de deux hyperboles équilatères ;*

2° *La droite des centres est normale à une hyperbole fixe ;*

3° *L'axe radical de ces deux cercles enveloppe une hyperbole ;*

4° *Le lieu des centres des cercles tritangents au triangle* MAA' *se compose de deux hyperboles équilatères.*

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION
Par M. J. Lez.

Soit le point M pris sur l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 - a^2 = 0$; si son abscisse est $x = m$, son ordonnée sera $y = \sqrt{m^2 - a^2}$ et les droites AM et A'M auront pour équations

$$y = (x - a)\sqrt{\frac{m+a}{m-a}},$$

$$y = (x + a)\sqrt{\frac{m-a}{m+a}}.$$

La perpendiculaire à AM et passant par son milieu, ou

$$y - \frac{\sqrt{m^2 - a^2}}{2} = -\sqrt{\frac{m-a}{m+a}}\left(x - \frac{m+a}{2}\right)$$

rencontre l'axe conjugué en $y = \sqrt{m^2 - a^2}$; c'est le centre C du centre circonscrit dont l'équation est

$$x^2 + \left(y - \sqrt{m^2 - a^2}\right)^2 = m^2. \tag{1}$$

Les hauteurs du triangle AMA' se rencontrant en un point M' symétrique de M, le centre du cercle des neuf points, qui se

Digitized by Google

trouve au milieu de CM′, sera sur l'axe transverse en un point dont l'abscisse est $x = \frac{m}{2}$; son équation est alors

$$\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{m^2}{4}$$

ou

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - mx = 0.$$

1° Or, quand deux cercles de rayon r et r' ont pour coordonnées des centres (α, β), (α', β'), les coordonnées de leurs centres de similitude sont

$$(3) \qquad x = \frac{\alpha' r - \alpha r'}{r - r'}, \qquad y = \frac{\beta' r - \beta r'}{r - r'}$$

et

$$(4) \qquad x = \frac{\alpha' r + \alpha r'}{r + r'}, \qquad y = \frac{\beta' r + \beta r'}{r + r'}.$$

Par suite, pour les cercles (1) et (2) on a

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \sqrt{m^2 - a^2}, \qquad r = m,$$
$$\alpha' = \frac{m}{2}, \qquad \beta' = 0, \qquad r' = \frac{m}{2},$$

et, à l'aide des formules (3) et (4), on trouve

$$(5) \qquad x = m, \qquad y = -\sqrt{m^2 - a^2},$$
$$(6) \qquad 3x = m, \qquad 3y = \sqrt{m^2 - a^2}.$$

Éliminant la variable m entre les deux premières, puis entre les deux dernières égalités ci-dessus, on obtient deux hyperboles équilatères

$$y^2 = x^2 - a^2, \qquad 9y^2 = 9x^2 - a^2.$$

2° La ligne des centres CM′ ayant pour équation

$$(7) \qquad my - (m - 2x)\sqrt{m^2 - a^2} = 0,$$

la dérivée par rapport à m est

$$(8) \qquad y\sqrt{m^2 - a^2} + 2mx + a^2 - 2m^2 = 0.$$

Digitized by Google

Éliminant la variable m entre les équations (7) et (8), on aura l'enveloppe de la ligne des centres; on trouve ainsi la courbe

$$(9)\quad \begin{cases} 64x^6 - 48x^4y^2 + 12x^2y^4 - y^6 - 48\alpha^2x^4 - 3\alpha^2y^4 \\ \qquad - 84\alpha^2x^2y^2 + 12\alpha^4x^2 - 3\alpha^4y^2 - \alpha^6 = 0; \end{cases}$$

c'est, comme on va le voir, la développée d'une hyperbole.

En effet, la développée d'une hyperbole

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

a pour équation

$$4\theta^3 + 27\Delta\Delta' = 0,$$

soit

$$(a^2x^2 - b^2y^2 - c^4)^3 - 27a^2b^2c^4x^2y^2 = 0$$

ou

$$(10)\quad \begin{cases} a^6x^6 - 3a^4b^2x^4y^2 + 3a^2b^4x^2y^4 \\ \qquad - b^6y^6 - 3a^4c^4x^4 - 3b^4c^4y^4 \\ \qquad - 21a^2b^2c^4x^2y^2 + 3a^2c^8x^2 - 3b^2c^8y^2 - c^{12} = 0. \end{cases}$$

Identifiant les équations (9) et (10), on a une suite de rapports

$$\frac{a^6}{64} = \frac{a^4b^2}{16} = \ldots = \frac{(a^2+b^2)^6}{\alpha^6},$$

desquels on tire

$$a^2 = 4b^2, \qquad a = 2b, \qquad \frac{a}{2} = \frac{a^2+b^2}{\alpha},$$

soit

$$b = \frac{\alpha}{5}, \qquad a = \frac{2\alpha}{5}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

on trouve

$$x^2 - 4y^2 - \frac{4\alpha^2}{25} = 0$$

pour l'équation de l'hyperbole à laquelle la ligne des centres est normale puisque la développée de cette hyperbole se confond avec l'enveloppe de cette ligne.

Digitized by Google

3° L'équation de l'axe radical des cercles (1) et (2) ou

(11) $$mx - 2y\sqrt{m^2 - a^2} - a^2 = 0,$$

contenant une variable m au deuxième degré, enveloppe une conique.

Élevant au carré, on a

$$m^2(x^2 - 4y^2) - 2a^2xm + a^2(a^2 + 4y^2) = 0,$$

et l'enveloppe est

$$(a^2 + 4y^2)(x^2 - 4y^2) = a^2x^2;$$

réduisant, on trouve l'hyperbole

$$x^2 - 4y^2 - a^2 = 0.$$

4° Enfin, les droites AM et A'M peuvent être représentées par des équations de la forme

(12) $$\begin{cases} y = (x - a)\operatorname{tang} 2\beta, \\ y = (x + a)\operatorname{tang} 2\alpha; \end{cases}$$

elles se rencontrent en un point ayant pour coordonnées

$$x = \frac{-a(\operatorname{tang} 2\alpha + \operatorname{tang} 2\beta)}{\operatorname{tang} 2\alpha - \operatorname{tang} 2\beta},$$

$$y = \frac{-2a(\operatorname{tang} 2\alpha \operatorname{tang} 2\beta)}{\operatorname{tang} 2\alpha - \operatorname{tang} 2\beta}.$$

Pour que leur intersection soit sur l'hyperbole

$$x^2 - y^2 - a^2 = 0,$$

il faut que leurs coordonnées satisfassent l'équation de cette hyperbole; on trouve ainsi la relation

(13) $$1 = \operatorname{tang} 2\alpha \operatorname{tang} 2\beta.$$

Mais les bissectrices des angles que les côtés AM, A'M font avec l'axe transverse ont pour équations

(14) $$\begin{cases} y = (x - a)\operatorname{tang} \beta, \\ y = (x - a)\operatorname{tang} \alpha; \end{cases}$$

Digitized by Google

elles se rencontrent aussi en un point ayant pour coordonnées

$$x = -\frac{a(\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta)}{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta},$$

$$y = -\frac{2a \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta}.$$

De ces égalités on tire d'abord

$$(x + a)\operatorname{tang}\alpha = (x - a)\operatorname{tang}\beta,$$
$$y \operatorname{tang}\beta = (y + 2a \operatorname{tang}\beta)\operatorname{tang}\alpha,$$

puis

$$\frac{x-a}{x+a} = \frac{y}{y + 2a\operatorname{tang}\beta},$$

d'où

(15) $$\operatorname{tang}\beta = \frac{y}{x-a}, \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{y}{x+a}.$$

Mais la relation (13) peut s'écrire

$$(1 - \operatorname{tang}^2\alpha)(1 - \operatorname{tang}^2\beta) = 4 \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta,$$

et, eu égard aux égalités (15), elle devient

$$\left[1 - \left(\frac{y}{x+a}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{y}{x-a}\right)^2\right] = \frac{4y^2}{(x-a)(x+a)}.$$

Développant et réduisant, on trouve

$$x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 2a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$$

pour l'équation du lieu décrit par les points de rencontre des bissectrices (14). Or, cette équation se décompose en deux facteurs

$$x^2 - y^2 + 2xy - a^2 = 0, \qquad x^2 - y^2 - 2xy - a^2 = 0$$

qui représentent deux hyperboles équilatères dont les axes de l'une sont les asymptotes de l'autre. Tel est l'ensemble du lieu décrit par les centres des cercles tritangents au triangle AMA' circonscrit à l'hyperbole équilatère.

Digitized by Google

L'ENSEIGNEMENT
MATHÉMATIQUE

MÉTHODOLOGIE ET ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT. — PHILOSOPHIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES. — CHRONIQUE SCIENTIFIQUE. — MÉLANGES. — BIBLIOGRAPHIE.

REVUE INTERNATIONALE PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS.

DIRIGÉE PAR

C.-A. LAISANT,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique de Paris.

H. FEHR,
Professeur à l'Université de Genève et au Gymnase.

AVEC LA COLLABORATION DE

A. BUHL,
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Prix de l'abonnement annuel : Union postale .... **15 fr.**

On s'abonne par l'envoi d'un mandat postal à l'un des libraires-éditeurs

GAUTHIER-VILLARS,
55, quai des Grands-Augustins, Paris.

GEORG et Cie,
10, rue Corraterie, Genève.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

JORDAN (Camille), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. — **Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique.** 2e édition, entièrement refondue. 3 volumes in-8, avec figures, se vendant séparément :

TOME I : *Calcul différentiel*; 1893 .... 17 fr.
TOME II : *Calcul intégral (Intégrales définies et indéfinies)*; 1894 .... 17 fr.
TOME III : *Calcul intégral (Équations différentielles)*; 1896 ... 15 fr.

ROUCHÉ (Eugène), Membre de l'Institut, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, Examinateur de sortie à l'École Polytechnique, et **LEVY (Lucien)**, Répétiteur d'Analyse et Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — **Analyse infinitésimale** *à l'usage des Ingénieurs.* 2 volumes grand in-8 se vendant séparément :

TOME I : **Calcul différentiel.** *Dérivées et différentielles. Changements de variables. Séries. Formules de Taylor. Courbes planes et gauches. Surfaces. Congruences. Complexes. Lignes tracées sur les surfaces.* Volume grand in-8 de VIII-557 pages, avec 45 figures; 1900 ... 15 fr.

TOME II : **Calcul intégral.** *Intégrales indéfinies et définies. Séries de Fourier. Fonctions elliptiques. Équations différentielles, ordinaires et aux dérivées partielles. Calcul des variations.* Volume grand in-8 de XII-618 pages; 1903 .... 15 fr.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Juin 1904.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6ᵉ).

GOURSAT (E.), Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours d'Analyse mathématique** (*cours de la Faculté des Sciences de Paris*). 2 volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément.

Tome I : *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en séries. Applications géométriques.* Avec 52 figures; 1902.... 20 fr.

Tome II : *Fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des variations.* (Un premier fascicule a paru.) Prix du volume complet pour les souscripteurs........ 20 fr.

HUMBERT (G.), Membre de l'Institut, Professeur de l'École Polytechnique. **Cours d'Analyse professé à l'École Polytechnique.** 2 volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément :

Tome I : *Calcul différentiel. Principes du calcul intégral. Applications géométriques.* Avec 111 figures; 1903........ 16 fr.

Tome II : *Complément du calcul intégral. Fonctions analytiques et elliptiques. Équations différentielles.* Avec 91 figures; 1904. 16 fr.

34577 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

Digitized by Google

NOUVELLES ANNALES

CAMBRIDGE

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME IV.

JUILLET 1904.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris,
à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,
ou à M. BOURLET, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,
ou à M. BRICARD, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.
(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Digitized by Google

Rédacteur de service : M. C. Bourlet.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences.

Besançon : M. Ét. Delassus. — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Duport. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. — Montpellier : M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers : M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

DARBOUX (G.), Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences. — **Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal.** 4 volumes grand in-8, avec figures, se vendant séparément :

Ire Partie : *Généralités. — Coordonnées curvilignes. Surfaces minima;* 1887 .... 15 fr.

IIe Partie : *Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. Des lignes tracées sur les surfaces;* 1889 .... 15 fr.

IIIe Partie : *Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres différentiels. Déformation des surfaces;* 1894 .... 15 fr.

IVe Partie : *Déformation infiniment petite et représentation sphérique;* 1896 .... 15 fr.

PICARD (**Émile**), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Traité d'Analyse** (Cours de la Faculté des Sciences). Quatre volumes grand in-8 avec figures, se vendant séparément.

Tome I : *Intégrales simples et multiples. — L'équation de Laplace et ses applications. Développement en séries. — Applications géométriques du Calcul infinitésimal.* 2e édition, revue et corrigée; 1901 .... 16 fr.

Tome II : *Fonctions harmoniques et fonctions analytiques. — Introduction à la théorie des équations différentielles. Intégrales abéliennes et surfaces de Riemann.* 2e édition. Un fascicule est paru. Prix du volume complet pour les souscripteurs .... 16 fr.

Tome III : *Des singularités des intégrales et des équations différentielles. Étude du cas où la variable reste réelle et des courbes définies par des équations différentielles. Équations linéaires; analogie entre les équations algébriques et les équations linéaires;* 1896 .... 18 fr.

Tome IV : *Équations aux dérivées partielles* .. (*En préparation.*)

Digitized by Google

SEP 10 1904

[M³5, L²]

TÉTRAÈDRES, OCTAÈDRES, ICOSAÈDRES INSCRITS A UNE CUBIQUE GAUCHE ET CIRCONSCRITS A UNE QUADRIQUE;

Par M. G. FONTENÉ.

I. — Première méthode.

1. Théorème. — *Sous des conditions, en nombre* 3, 4 *ou* 5, *il existe, en nombre doublement infini, des tétraèdres, des octaèdres ou des icosaèdres inscrits à une cubique gauche* Γ *et circonscrits à une quadrique* Q.

La cubique étant donnée, la quadrique dépend donc de paramètres en nombres 6, 5 *ou* 4 :

(*a*). *Pour des tétraèdres, on prend à volonté* 3 *couples de points sur la cubique, ce qui donne* 3 *cordes* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, *et la quadrique* Q *est celle qui admet pour génératrices les* 3 *droites qui portent ces cordes;*

(*b*). *Pour des octaèdres, on prend à volonté* 4 *points* I, J, K, L *sur la cubique, dans un certain ordre, ce qui donne un quadrilatère gauche, et la quadrique* Q *est l'une quelconque des quadriques en nombre simplement infini qui passent par les côtés de ce quadrilatère;*

(*c*). *Pour des icosaèdres, on prend à volonté sur la cubique un système de* 4 *points*

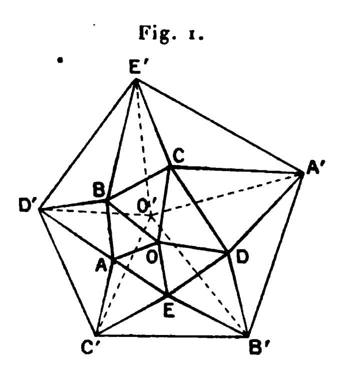
M, M′,
N, N′,

et la quadrique Q *est celle qui passe par les* 3 *côtés du*

contour ouvert MNN'M', *en touchant la cubique aux points extrêmes* M *et* M'.

2. Étant données une cubique gauche Γ et une quadrique Q, si O est un point de la cubique, on peut chercher un angle polyèdre à p arêtes, de sommet O, dont les arêtes s'appuient sur la cubique et dont les plans des faces touchent la quadrique; comme le cône Σ' de sommet O qui a pour directrice la cubique, et le cône Σ de sommet O qui est circonscrit à la quadrique, sont 2 cônes du second degré, le problème n'est possible en général que pour certaines positions du point O. S'il arrive que, pour $p = 3, 4, 5$, la condition de fermeture de l'angle polyèdre soit satisfaite en tout point de la cubique, il existera une double infinité de tétraèdres, d'octaèdres et d'icosaèdres inscrits à la cubique et circonscrits à la quadrique. En effet, pour $p = 5$ par exemple, O et A étant 2 points de la cubique (*fig.* 1), il existe alors un angle pentaèdre de sommet O

Fig. 1.



dont les arêtes rencontrent la cubique aux points A, B, C, D, E et qui est circonscrit à la quadrique; le point A donne de même un angle pentaèdre de cette nature avec les points BOEC'D', les points B, C, D en donnent

Digitized by Google

d'autres avec les points COAD'E', DOBE'A', EOCA'B', le point E en donne un avec les points AODB'C'; enfin le point A' en donne un avec les points B'DCE'O' et celui du point B' est alors fourni par les points C'EDA'O', etc.

3. On sait d'ailleurs que l'existence d'*un* angle polyèdre à p arêtes, de sommet O, inscrit au cône Σ' et circonscrit au cône Σ, entraîne l'indétermination pour un tel angle polyèdre.

Si l'on prend d'abord le cas de l'octaèdre ($p = 4$), la quadrique Q étant liée à la cubique Γ par les conditions (b), l'angle tétraèdre (O, IJKL) satisfait aux conditions requises; donc....

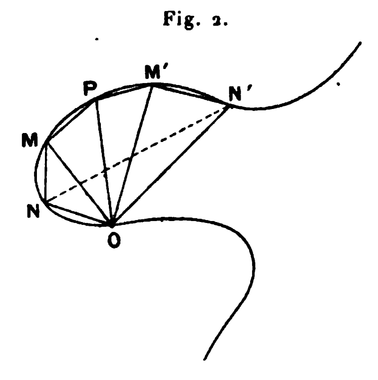
Pour le tétraèdre ($p = 3$), avec les conditions (a), si l'on mène par exemple les droites OA_1, OA_2, le plan OA_1A_2 est tangent à la quadrique; si l'on mène par OA_1 et OA_2 les 2 plans tangents à la quadrique autres que le plan OA_1A_2, ces deux plans tangents doivent encore couper la cubique en un même point P. Or, soient en général P_1 et P_2 les deux points où ces plans tangents coupent encore la cubique. Il y a involution entre les points O et P_1, le plan (A_1, OP_1) devant être tangent à la quadrique sans être un plan passant par A_1A_2; et, avec les conditions (a), les points B_1 et B_2 se correspondent dans cette involution, ainsi que les points C_1 et C_2. L'involution entre O et P_2 étant déterminée par les deux mêmes couples de points, on voit que P_1 et P_2 sont un même point P.

Pour l'icosaèdre ($p = 5$), avec les conditions (c), si l'on mène les droites OM, ON, ON', OM', les plans OMN, ONN', ON'M' sont tangents à la quadrique; si l'on mène par OM et OM' les deux plans tangents à la quadrique autres que OMN et OM'N', ces 2 plans tan-

Digitized by Google

gents doivent encore couper la cubique en un même point P (*fig.* 2) : c'est ce qui arrive par le fait que la quadrique est tangente à la cubique aux points M et M'. En effet, soient en général P_1 et P_2 les 2 points où ces plans tangents coupent encore la cubique. Il y a involution entre O et P_1, le plan (M, OP_1) devant être tangent à la quadrique sans être généralement un plan passant par MN ; or, si l'on met P_1 en M', O est en N' indépendamment du fait rappelé ci-dessus ; d'autre part, la tangente MT à la cubique au point M étant

Fig. 2.



supposée toucher la quadrique, si l'on met P_1 en M, O est en N, puisque le seul plan tangent que l'on puisse mener à la quadrique par la tangente MT est le plan TMN ; l'involution entre O et P_1 est donc déterminée par les deux couples de points M', N' et M, N. L'involution entre O et P_2 étant déterminée par les deux mêmes couples de points, on voit que P_1 et P_2 sont un même point P.

II. — Autre méthode (faits nouveaux).

Une autre méthode consiste à définir par une cubique Γ des tétraèdres, des octaèdres, des icosaèdres inscrits, dé-

Digitized by Google

pendant de deux paramètres, tels que l'enveloppe des plans de leurs faces soit dans chaque cas une quadrique.

II (a). — Tétraèdre.

4. J'ai obtenu précédemment (*Nouvelles Annales*, 1901, p. 13) le cas du tétraèdre par le calcul suivant. Représentons les points de la cubique par les formules

$$x = \lambda^3, \qquad y = \lambda^2, \qquad z = \lambda, \qquad t = 1,$$

en mettant pour simplifier x et y au lieu de ax et by : le tétraèdre de référence étant $\mathcal{ABCD}$, la cubique passe aux points $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$, les tangentes étant $\mathcal{AB}$ et $\mathcal{DC}$, les plans osculateurs étant $\mathcal{ABC}$ et $\mathcal{DCB}$. Considérons les tétraèdres ABCD en nombre doublement infini, qui sont inscrits à la cubique et dont les sommets ont pour paramètres α, β, γ, δ les racines des équations du quatrième degré

$$f(\lambda) + h\,\varphi(\lambda) + k\,\psi(\lambda) = 0, \tag{1}$$

h et k variant. Si l'on se donne les sommets A et B, le tétraèdre est unique; dès lors la surface qui est l'enveloppe des plans des faces des tétraèdres est une quadrique Q, attendu que, par une corde AB de la cubique, il passe seulement deux de ces plans, à savoir les plans des faces ABC, ABD du tétraèdre dont cette corde est une arête.

La cubique Γ étant donnée, la quadrique Q dépend de 6 paramètres. L'équation (1) dépend en effet de paramètres apparents en nombre $5 \times 3 - 1$; mais on peut effectuer sur h et k les substitutions

$$\frac{h}{Ah' + Bk' + C} = \frac{k}{Dh' + \ldots} = \frac{1}{Gh' + \ldots},$$

de sorte que le nombre des paramètres fictifs est

$3 \times 3 - 1$; il reste donc 6 paramètres. Cela résulte encore de ce que les racines de l'équation (1), h et k variant, sont simplement assujetties à vérifier deux relations de la forme

$$A + Bs_1 + Cs_2 + Ds_3 \qquad = 0,$$
$$B's_1 + C's_2 + D's_3 + E's_4 = 0,$$

s_1 étant $\Sigma\alpha$, etc.

5. Il suit de là que l'existence d'un tétraèdre de l'espèce indiquée n'entraîne pas celle d'une double infinité de tels tétraèdres, puisque, s'il en était ainsi, la donnée de Γ laisserait $(4 - 2) + 5$ ou 7 paramètres pour la quadrique.

La cubique étant donnée, pour obtenir la quadrique avec 6 paramètres, on peut se donner 2 tétraèdres ABCD et A'B'C'D' inscrits à la cubique; les sommets des 2 tétraèdres forment un système (singulier) de 8 points de Lamé, les 2 tétraèdres sont conjugués à une même quadrique, et les plans de leurs faces forment un système de 8 plans de Lamé; il existe donc une double infinité de quadriques Q inscrites aux 2 tétraèdres. Une quadrique ainsi obtenue forme avec la cubique Γ un système de l'espèce considérée ici; elle dépend de 6 paramètres, chaque tétraèdre donnant seulement 2 paramètres (puisqu'il existe une double infinité de tels tétraèdres).

6. Le sommet D étant choisi, il existe une infinité de trièdres inscrits au cône Σ' et circonscrits au cône Σ du n° 2; A, B, C étant les points où les arêtes de l'un de ces trièdres rencontrent la cubique, le plan ABC est tangent à la quadrique. *Pour une même position du point* D *les plans* ABC *passent par une même généra-*

Digitized by Google

trice Δ *de la quadrique,* génératrice du système de celles qui rencontrent $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, et à chacune de ces génératrices correspond un seul point D. En effet, si l'on se donne le point D, les paramètres h et k de la relation (1) sont liés par une équation linéaire, et les paramètres α, β, γ des points A, B, C sont donnés par une équation du troisième degré de la forme

$$F(\lambda) + m\Phi(\lambda) = 0;$$

dans ces conditions, le plan ABC passe par une droite fixe, puisque, si l'on se donne le point A, le plan ABC est unique. Ce fait, quand on regarde la cubique comme l'intersection incomplète de deux quadriques, est lié à celui-ci (*Nouvelles Annales*, 1899, p. 69, lignes 16 et suiv.) : *Si l'on considère les tétraèdres* ABCD *inscrits à une quadrique et circonscrits à une autre, le sommet* D *étant donné, les plans* ABC *passent par un point fixe;* chacun de ces plans donne d'ailleurs une infinité de triangles ABC.

La cubique Γ étant donnée, si, pour obtenir la quadrique Q avec 6 paramètres, on se donne les 2 tétraèdres DABC et DA'B'C' inscrits à la cubique, avec même sommet D, comme les 6 arêtes des 2 trièdres D sont à un même cône du second ordre, les 6 plans tangents DBC, DCA, DAB, DB'C', ... donnent seulement 5 conditions pour la quadrique Q, et c'est alors ainsi que les 8 plans tangents donnent seulement 7 conditions. En outre, d'après ce qui précède, les quadriques Q qui vérifient ces 7 conditions passent par la droite d'intersection Δ des 2 plans ABC, A'B'C'; ou encore, si une quadrique Q vérifie les 5 premières conditions, la condition pour elle de passer par la droite Δ est une condition double et non une condition triple. [En tenant compte de ce que les 2 trièdres (D, ABC) et (D, A'B'C')

Digitized by Google

ont leurs arêtes sur un même cône du second ordre, et de ce que la condition triple dont on vient de parler se réduit à une condition double, on exprime complètement que D est sur la cubique gauche des 6 points A, B, C, A′, B′, C′.]

7. Si l'on se donne les points A et B par leurs paramètres α et β, les deux équations

$$f(\alpha)+h\,\varphi(\alpha)+k\,\psi(\alpha)=0,$$
$$f(\beta)+h\,\varphi(\beta)+k\,\psi(\beta)=0$$

déterminent h et k, et l'on a ensuite les paramètres γ et δ des points C et D. Si l'on prend comme points A et B les points A_1 et A_2 par exemple [n° 1 (a)], l'un des points C et D est quelconque; on aura donc les paramètres des couples de points (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2) en résolvant les deux équations

$$\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}=\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)}=\frac{\psi(\alpha)}{\psi(\beta)}.$$

8. Les paramètres des 3 sommets d'une face ABC du tétraèdre sont liés par la relation

$$\begin{vmatrix} f(\alpha) & \varphi(\alpha) & \psi(\alpha) \\ f(\beta) & \varphi(\beta) & \psi(\beta) \\ f(\gamma) & \varphi(\gamma) & \psi(\gamma) \end{vmatrix}=0,$$

qui se transformerait en une relation triplement quadratique et symétrique.

L'équation du plan ABC est

$$x-y\Sigma\alpha+y\Sigma\alpha\beta-\alpha\beta\gamma=0,$$

comme on le voit en cherchant les points de la cubique situés dans ce plan ($x=\lambda^3, \ldots$); les coordonnées de ce

Digitized by Google

plan sont

$$u = 1, \qquad v = -\Sigma\alpha, \qquad w = \Sigma\alpha\beta, \qquad r = -\alpha\beta\gamma,$$

et la relation entre α, β, γ donnerait l'équation tangentielle de la quadrique.

Cette même relation, où l'on regarde α et β comme donnés, est une équation du second degré en γ, faisant connaître γ et δ.

II (*b*). — Octaèdre.

9. *Pour l'octaèdre, 2 sommets opposés quelconques se correspondent dans une involution sur la cubique, ou encore les 3 diagonales sont des génératrices d'un hyperboloïde* H *passant par la cubique; ces 3 génératrices sont liées sur l'hyperboloïde par une relation triplement linéaire et symétrique.*

Étant donnée une cubique gauche Γ, courbe unicursale, considérons sur cette cubique une involution de points qui donne lieu aux cordes AA′, BB′, CC′, ...; les sécantes doubles AA′, ... sont les génératrices d'un système d'un hyperboloïde H passant par la cubique. Établissons entre trois de ces génératrices, au moyen d'un paramètre qui leur correspond uniformément, une correspondance triplement linéaire et symétrique : l'enveloppe des plans ABC est une quadrique Q, puisque, par une corde AB de la cubique, il passe seulement deux de ces plans, à savoir les plans ABC et ABC′; ou mieux, l'octaèdre à faces triangulaires qui a pour diagonales AA′, BB′, CC′ est circonscrit à une quadrique fixe Q. La cubique étant donnée, l'involution, ou l'hyperboloïde H qui la traduit, dépend de 2 paramètres, la correspondance triplement linéaire et symétrique entre les 3 génératrices dépend encore de 3 paramètres, de sorte que

Digitized by Google

la quadrique Q dépend finalement de 5 paramètres; le système de la cubique et de la quadrique vérifie donc 4 conditions.

II (c). — Icosaèdre.

Il s'agit plutôt ici de propriétés relatives à la figure qui résulte des conditions (c) que d'une méthode pour obtenir cette figure.

10. Les points M et M′ étant pris comme sommets $\mathcal{O}$ et $\mathcal{A}$ du tétraèdre de référence, pour les formules

$$x = \lambda^3, \qquad y = \lambda^2, \qquad z = \lambda, \qquad t = 1,$$

les paramètres de ces points sont o et ∞; soient A et $\frac{1}{D}$ ceux des points N et N′. On verra au n° **23** que, des deux relations auxquelles satisfont les 2 couples de points (E, B) et (O, A) de la figure 1, la plus simple est

$$(\mathrm{R}) \qquad \varepsilon \times \beta = \frac{\omega - A}{D\omega - 1}\,\frac{\alpha - A}{D\alpha - 1}.$$

Si l'on acceptait de prendre cette relation comme point de départ pour le traitement du problème de l'icosaèdre, on aurait à montrer d'abord que les 5 relations analogues à la précédente, autour du point O, définissent autour de ce point un angle pentaèdre *variable* circonscrit à un cône du second degré, et ensuite que les cônes ainsi obtenus sont circonscrits à une même quadrique, ou encore que l'enveloppe du plan OAB dépendant de 2 paramètres est une quadrique (les 3 points O, A, B jouant le même rôle).

Je me contente de signaler ce fait; mais j'indiquerai une conséquence des 2 relations du n° **23**, une interpré-

Digitized by Google

tation géométrique remarquable de celle qui est écrite ci-dessus, ...

11. Le paramètre du point A′ de la figure 1 est donné par la relation

$$\omega\alpha' = \frac{\gamma - A}{D\gamma - 1}\,\frac{\delta - A}{D\delta - 1};$$

comme on a

$$\gamma\alpha = \frac{\omega - A}{D\omega - 1}\,\frac{\beta - A}{D\beta - 1}, \qquad \delta\alpha = \frac{\omega - A}{D\omega - 1}\,\frac{\varepsilon - A}{D\varepsilon - 1},$$

on peut avoir α' en fonction des quantités α, ω, $\beta + \varepsilon$, $\beta\varepsilon$; au moyen des deux formules du n° 23, on trouve finalement

$$\alpha\alpha' = \frac{A}{D}.$$

Donc :

Deux sommets opposés (O, O′), (A, A′), (B, B′), ... *de l'icosaèdre se correspondent dans l'involution définie sur la cubique par les* 2 *couples de points* (M, M′), (N, N′); *les diagonales de l'icosaèdre sont les génératrices d'une quadrique passant par la cubique, deux de ces génératrices étant* MM′ *et* NN′.

12. Si, dans la relation R, on introduit les points B′ et A′ au lieu des points B et A, on obtient

$$\frac{\varepsilon}{\beta'} = \frac{\omega - A}{\omega - \frac{1}{D}} : \frac{\alpha' - A}{\alpha' - \frac{1}{D}};$$

on a donc, *avec des rapports anharmoniques*,

$$[R] \quad \left\{ \begin{matrix} (E, B', M, M') \\ \text{ou} \\ (B, E', M, M') \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} (O, A', N, N') \\ \text{ou} \\ (A, O', N, N') \end{matrix} \right\}.$$

Digitized by Google

13. Pour la définition directe des icosaèdres en partant de la cubique, on pourrait, se donnant M et M', N et N', choisir les 10 conditions suivantes : d'une part les 6 faits d'involutions relatifs aux diagonales, d'autre part les 4 conditions effectives fournies par les 5 relations [R] autour du point O.

14. L'icosaèdre de la figure 1 donne lieu à un icosaèdre ayant les mêmes sommets et dont les 30 arêtes sont les segments tels que OA'; au point O, par exemple, les 5 faces de cet icosaèdre sont OA'C', OC'E', ... *Cet icosaèdre dérivé est circonscrit à une nouvelle quadrique* Q', ou encore l'enveloppe des plans OC'A' est une quadrique; en effet, par une corde OC' de la cubique, il passe seulement deux de ces plans, à savoir les plans OC'A' et OC'E', fournis par l'icosaèdre primitif dont O et C' sont 2 sommets (cet icosaèdre est unique, car le point C' détermine complètement le point C, et les points O et C donnent un seul icosaèdre).

La quadrique Q' *est celle qui passe par les trois côtés du contour ouvert* N'MM'N *en touchant la cubique aux points extrêmes* N' *et* N.

En effet, les 2 couples de points (O, A') et (C, D) de la figure 1 donnent

$$(O, A, M, M') = (C, D', N, N');$$

on a donc

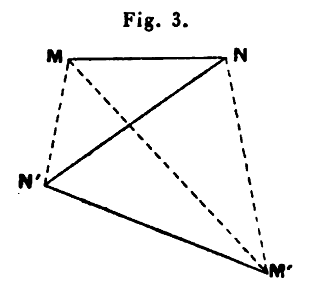
$$(D', C, N, N') = (O, A, M', M);$$

or, pour le nouvel icosaèdre, les arêtes consécutives de l'angle pentaèdre en O étant OD', OA', OC', ..., la relation précédente est celle que l'on doit avoir pour les 2 couples de points (D', C') et (O, A'), si la quadrique Q' se déduit de la quadrique Q en remplaçant M et M' par N et N', tandis que l'on remplace N et N' par M'

Digitized by Google

et M : on obtient ainsi le résultat indiqué. Il est à peine besoin de faire observer que les icosaèdres primitifs et ceux que l'on considère ici sont réciproques, de sorte que les 2 quadriques (*fig.* 3) le sont aussi ([1]).

Fig. 3.



15. Si les sommets de référence 𝒟 et 𝒜 étaient 2 points quelconques de la cubique, en désignant par m, m', n, n' les paramètres des points M, M', N, N', on aurait, au lieu de la relation (R) :

$$\left(\frac{\varepsilon - m}{\varepsilon - m'}\,\frac{\beta - m}{\beta - m'}\right) \times \left(\frac{\omega - n'}{\omega - n}\,\frac{\alpha - n}{\alpha - n'}\right) = \left(\frac{m - n'}{m' - n}\right)^2.$$

16. A chaque point O de la cubique correspond un point P, ou mieux O_1, par la construction de la figure 2 ; il y a involution entre O et O_1, les 2 couples de points N, M et N', M' faisant partie de cette involution, et l'on a

$$\omega_1 = \frac{\omega - A}{D\omega - 1} \qquad \text{ou} \qquad D\omega\omega_1 - (\omega + \omega_1) + A = 0;$$

on aurait encore ce résultat en faisant $\alpha = A$ dans les

([1]) En prolongeant chaque face de l'icosaèdre primitif jusqu'à la rencontre des plans des 3 triangles qui entourent la face opposée à celle que l'on considère, on formerait un nouvel icosaèdre circonscrit à la quadrique Q; il est probable que cet icosaèdre serait inscrit à une cubique fixe Γ'.

Digitized by Google

relations

$$\varepsilon \times \beta = k\frac{\alpha - A}{D\alpha - 1},$$

$$\alpha \times \gamma = k\frac{\beta - A}{D\beta - 1},$$

$$\beta \times \delta = k\frac{\gamma - A}{D\gamma - 1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

ce qui donne

$$\alpha = A, \quad \beta = 0, \quad \gamma = k = \frac{\omega - A}{D\omega - 1}, \quad \delta = \infty, \quad \varepsilon = \frac{1}{D}.$$

La relation (R) prend ainsi la forme

$$\varepsilon\beta = \omega_1\alpha_1,$$

de sorte que *les* 3 *couples de points*

$$(E, B), \quad (O_1, A_1), \quad (M, M')$$

appartiennent à une même involution sur la cubique.

Une projection conique, avec le point O comme point de vue, donne ce théorème :

Soit $nmo_1m'n'$ *un pentagone inscrit à une conique* S' *et circonscrit à une conique* S; *soit* i *le point d'intersection des droites* mn *et* $m'n'$. *Si* aa_1 *est une corde de la conique* S' *passant en* i, *et si du point* a *on mène à la conique* S *deux tangentes qui coupent encore la conique* S' *en* e *et en* b, *la corde* eb *et la corde* o_1a_1 *se coupent sur* mm'.

La même figure donne ceci par la relation [R] :

Les droites qui passent par le point d'intersection des droites mm' *et* nn' *déterminent sur la conique* S' *des couples involutifs* (o, o'), (a, a'), ...; *on a alors.*

$$[r] \qquad \left\{ \begin{matrix} (e, b', m, m') \\ \text{ou} \\ (b, e', m, m') \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} (o, a', n, n') \\ \text{ou} \\ (a, o', n, n') \end{matrix} \right\},$$

Digitized by Google

o étant le point où la droite io_1 rencontre encore la conique S'.

III. — Analyse du problème.

C'est l'étude des conditions de fermeture indiquées au n° **2** qui m'a conduit aux conditions (a), (b), (c) du n° **1**. Je donnerai une idée de ce calcul, en m'attachant surtout au cas de l'icosaèdre (double contact de la cubique et de la quadrique).

17. L'équation du cône Σ' est, en appelant ω le paramètre du point O,

$$(y-\omega z)^2-(x-\omega y)(z-\omega t)=0$$

ou

$$(\Sigma') \qquad 2Y^2-2XZ=0,$$

en posant

$$X=x-\omega y, \qquad Y=y-\omega z, \qquad Z=z-\omega t;$$

on a d'ailleurs ainsi

$$X+\omega Y=x-\omega^2 z, \qquad Y+\omega Z=y-\omega^2 t,$$
$$X+\omega Y+\omega^2 Z=x-\omega^3 t.$$

D'autre part, les coordonnées du point O étant x' y', z', t' ou ω^3, ω^2, ω, 1, l'équation du cône Σ est une relation du second degré entre les quantités

$$\begin{aligned} r &= xy'-yx'=\omega^2 X,\\ -q &= xz'-zx'=\omega X+\omega^2 Y,\\ s &= xt'-tx'=X+\omega Y+\omega^2 Z,\\ p &= yz'-zy'=\omega Y,\\ t &= yt'-ty'=Y+\omega Z,\\ u &= zt'-tz'=Z. \end{aligned}$$

Si l'on désigne par A, B, C, 2F, 2G, 2H les coeffi-

cients de X^2, ... dans l'équation du cône Σ, comme on a pour le cône Σ'

$$A' = 0, \quad B' = 2, \quad C' = 0, \quad F' = 0, \quad G' = -1, \quad H' = 0,$$

les invariants du système sont

$$\begin{aligned}
\delta &= ABC + \ldots, \\
\theta &= 2(CA - G^2) - 2(HF - BG), \\
\theta' &= -B + 4G, \\
\delta' &= -2;
\end{aligned}$$

les degrés de ces invariants par rapport à ω sont respectivement 12, 8, 4, 0.

Observons maintenant que, si le point O est sur la quadrique, c'est-à-dire si l'on a

$$f(\omega^3, \omega^2, \omega, 1) = 0,$$

$f = 0$ étant l'équation de la quadrique, le cône Σ se réduit à un *plan double :* δ et θ renfermant donc f en facteur; comme le cône Σ ne peut d'ailleurs devenir évanouissant que de cette façon, si la quadrique Q n'est pas un cône, on voit que δ est, à un facteur constant près, f^2. On a donc

$$\begin{aligned}
\delta &= kf^2, \\
\theta &= 2f \times \varphi,
\end{aligned}$$

φ étant un polynome du second degré en ω.

18. Cela posé, si l'on fait

$$\gamma = \theta^2 - 4\delta\theta',$$

les conditions de fermeture pour le trièdre, l'angle tétraèdre, l'angle pentaèdre, sont respectivement

$$\begin{gathered}
\gamma = 0, \\
\theta\gamma + 8\delta^2\delta' = 0, \\
\gamma^2 - 32\delta^2\delta'(\theta\gamma + 8\delta^2\delta') = 0;
\end{gathered}$$

Digitized by Google

ces conditions deviennent, après suppression des facteurs f^2, f^3, f^6,

$$\varphi^2 - k\theta' = 0,$$

$$\varphi(\varphi^2 - k\theta') - 2k^2 f = 0,$$

$$(\varphi^2 - k\theta')^3 + 8k^2 f[\varphi(\varphi^2 - k\theta') - 2k^2 f] = 0,$$

et elles sont des degrés 4, 6, 12 en ω. (Ce sont les nombres de sommets du tétraèdre, de l'octaèdre, de l'icosaèdre.)

Écrivons que la dernière est une identité (cas de l'icosaèdre). Les valeurs de ω qui annulent f doivent annuler le polynome $\varphi^2 - k\theta'$ qui est seulement du quatrième degré; donc f doit avoir deux racines doubles, et l'on doit avoir

$$f \equiv P^2 Q, \quad \varphi^2 - k\theta' \equiv k' PQ,$$

P et Q étant des polynomes du second degré en ω. Ces conditions remplies, le polynome du second degré

$$k'^3 Q + 8k^2(k'\varphi - 2k^2 P)$$

devra être identiquement nul. On a ainsi 9 conditions apparentes.

L'identité $f = P^2 Q$ exige que f ait deux racines doubles, c'est-à-dire *que la cubique* Γ *soit bitangente à la quadrique* Q. On peut supposer que les deux points de contact correspondent aux valeurs $\omega = 0$ et $\omega = \infty$, de sorte que l'on aura

$$P \equiv \omega.$$

Ces deux points de contact étant les sommets $\mathcal{D}$ et $\mathcal{A}$ du tétraèdre de référence, et les tangentes à la cubique en ces deux points étant les arêtes $\mathcal{DC}$ et $\mathcal{AB}$, l'équation de la quadrique se réduit à

$$(E) \quad by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2lxt + 2myt = 0,$$

Digitized by Google

g et m étant analogues de même que b et c; on a ainsi

$$f(\omega) = \omega^2[(b+2g)\omega^2 + 2(f+l)\omega + (c+2m)].$$

On doit avoir par suite les identités

$$(I) \begin{cases} \varphi^2 - k\theta' \equiv k'\omega[(b+2g)\omega^2 + 2(f+l)\omega + (c+2m)], \\ k'^2[(b+2g)\omega^2 + \ldots] + 8k^2(k'\varphi - 2k^2\omega) \equiv 0. \end{cases}$$

19. Il faut alors former l'équation du cône Σ. Or la condition pour qu'une droite touche la quadrique (E) devient, en tenant compte de l'identité $ps + qt + ru = 0$,

$$-bc.p^2 + (fl - gq + mt + ls)^2 - 4(gm - fl)ru$$
$$+ 2bg.pr + 2cm.pu - 2cl.qu + 2bl.rt = 0;$$

on a donc, pour l'équation du cône Σ,

$$-bc\,\omega^2 Y^2 + \{(g\omega + l)X + [g\omega^2 + (f+l)\omega + m]Y$$
$$+ \omega(l\omega + m)Z\}^2$$
$$+ 2b\,\omega^2(g\omega + l)XY + 2c\,\omega(l\omega + m)YZ$$
$$+ 2[l\omega(b\omega^2 + c) - 2(gm - fl)\omega^2]XZ = 0.$$

En posant

$$R = g\omega^2 + (f+l)\omega + m,$$
$$S = bl\omega^3 - 2(gm - fl)\omega^2 + cl\omega,$$

on a ainsi, dans l'équation du cône Σ,

$$A = (g\omega + l)^2,$$
$$B = R^2 - bc\omega^2,$$
$$C = \omega^2(l\omega + m)^2,$$
$$F = \omega R(l\omega + m) + c\omega(l\omega + m),$$
$$H = R(g\omega + l) + b\omega^2(g\omega + l),$$
$$G = \omega(g\omega + l)(l\omega + m) + S,$$

Digitized by Google

20. On forme $-\frac{\theta}{2}$, et l'on trouve pour l'identité $-\frac{\theta}{2}=fx-\varphi$,

$$-\varphi=[l^2b+g(gm-fl)]\omega^2+[bcl+(f-l)(gm-fl)]\omega$$
$$+[l^2c+m(gm-fl)].$$

La constante k de l'identité $\delta=kf^2$ est du quatrième degré en a, b, ...; elle ne diffère que par un facteur numérique du discriminant Δ de la quadrique, puisque δ s'annule évidemment avec Δ. L'examen d'un cas simple (soit $b=0$, $c=0$, $f\equiv 2\mathrm{R}\,\omega^2$) donne

$$-k=\Delta=(gm-fl)^2-bcl^2.$$

On forme encore θ'.

21. La première des identités (I) exige d'abord que le polynome $\varphi^2-k\theta'$ n'ait pas de terme en ω^4 ni de terme indépendant; cela donne

$$bl^2[bl^2+2g(gm-fl)+cg^2]=0,$$
$$cl^2[cl^2+2m(gm-fl)+bm^2]=0.$$

Je me suis borné à considérer la solution

$$bl^2+cg^2=-2g(gm-fl),$$
$$bm^2+cl^2=-2m(gm-fl);$$

j'ai écarté pour cette solution l'hypothèse

$$l^2=mg,\qquad bm+cg=-2(gm-fl),$$

et j'ai pris seulement

$$\text{(A)}\qquad \frac{b}{g}=\frac{c}{m}=\frac{-2(gm-fl)}{gm+l^2},$$

b et c étant ainsi proportionnels à g et m.

Digitized by Google

22. Cela introduit partout le binome $(g\omega^2+m)$, et la première des identités (I) est satisfaite, avec

$$k' = -2lk.$$

La seconde exige simplement

$$\text{(B)} \qquad l^2(gm+l^2) = gm(gm-fl);$$

on a alors

$$\text{(A}'\text{)} \qquad \frac{b}{g} = \frac{c}{m} = \frac{-2l^2}{gm}.$$

En faisant $l=1$, et en remplaçant m et g par $-A$, $-D$, l'équation (E) devient

$$\text{(E}'\text{)} \quad AD(x-Ay)(t-Dz)-(y-Az)(z-Dy)=0.$$

Telle est l'équation définitive de la quadrique.

Les génératrices sont en évidence, et l'on vérifie aisément que les conditions (c) du n° 1 sont satisfaites; les paramètres des 4 points qui figurent dans ces conditions sont donnés par ce Tableau :

M ou $\mathfrak{O}$,	M′ ou $\mathfrak{A}$,	o,	∞,
N,	N′,	A,	$\frac{1}{D}$.

Je ferai observer que la relation (B) peut prendre la forme

$$-\frac{fl}{gm} = \left(\frac{l^2}{gm} - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{l^2}{gm} - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

23. L'équation tangentielle de la quadrique est

$$AD[(Au+v)+D(Dr+w)][A(Au+v)+(Dr+w)] \\ -(1-AD)^2ur = 0.$$

La relation triplement quadratique et symétrique entre les paramètres des points O, A, B, le plan OAB

Digitized by Google

étant tangent à Q, s'obtient en faisant dans l'équation précédente

$$u = 1, \quad v = -(\omega + \alpha + \beta), \quad \ldots, \quad r = -\omega\alpha\beta.$$

Si l'on suppose ω et α donnés, cette relation est une équation du second degré en β, ayant pour racines β et ε; on a ainsi

$$\beta \times \varepsilon = \frac{\omega - A}{D\omega - 1}\,\frac{\alpha - A}{D\alpha - 1},$$

$$\beta + \varepsilon = \frac{(\omega - A)(\alpha - A)(D\omega - 1)(D\alpha - 1) + (\omega, \alpha)^2 - \dfrac{(1 - AD)^2}{AD}\,\omega\alpha}{(\omega, \alpha)(D\omega - 1)(D\alpha - 1)},$$

en posant

$$(\omega, \alpha) = D\omega\alpha - (\omega + \alpha) + A.$$

[O5h]

SUR UN THÉORÈME DE LA THÉORIE DES SURFACES;

Par M. LELIEUVRE.

Le théorème démontré par M. Bricard dans le numéro d'août 1903 de ce Journal s'établit aisément par la méthode cinématique; pour faire la démonstration, j'emploierai les procédés du *Calcul géométrique* de Grassmann : ce sera un nouvel exemple des avantages qu'ils présentent.

Soit une surface rapportée à ses lignes de courbure

$$u = \text{const.} \quad \text{et} \quad v = \text{const.}$$

Je considère au point M de la surface le trièdre trirectangle formé par une arête normale à la surface en ce point, et deux autres arêtes tangentes aux lignes de

Digitized by Google

courbure qui se coupent en M. J'appellerai I un vecteur unité porté sur l'arête normale, J un autre sur l'arête tangente à $v = \text{const.}$, K un troisième sur l'arête tangente à $u = \text{const.}$; puique les arêtes qui portent J et K sont tangentes aux lignes coordonnées, on doit avoir pour les dérivées géométriques $\frac{\partial M}{\partial u}$, $\frac{\partial M}{\partial v}$:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial M}{\partial u} = \xi J, \qquad \frac{\partial M}{\partial v} = \xi_1 K.$$

D'autre part, si l'on rapporte les dérivées géométriques des vecteurs I, J, K au trièdre que forment ces vecteurs, on voit immédiatement par un calcul très simple qu'en vertu des relations fondamentales

$$I^2 = J^2 = K^2 = 1 \quad (^1), \qquad J \mid K = K \mid I = I \mid J = 0,$$

ces dérivées géométriques ont des valeurs de la forme suivante :

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial u} &= rJ - qK, & \frac{\partial I}{\partial v} &= r_1 J - q_1 K, \\ \frac{\partial J}{\partial u} &= pK - rI, & \frac{\partial J}{\partial v} &= p_1 K - r_1 I, \\ \frac{\partial K}{\partial u} &= qI - pJ, & \frac{\partial K}{\partial v} &= q_1 I - p_1 J. \end{aligned} \right.$$

On trouve d'ailleurs la signification cinématique habituelle des coefficients ξ, ξ_1, p, q, r, p_1, q_1, r_1, en formant à l'aide des équations précédentes l'expression de la vitesse d'un point P quelconque de l'espace, de coordonnées x, y, z par rapport au trièdre considéré, soit

$$P = M + xI + yJ + zK;$$

---

(1) Je désigne par I^2, suivant l'usage, le produit $I \mid I$ (*voir* Burali-Forti, *Introduction à la Géométrie différentielle*, Gauthier-Villars, 1897).

Digitized by Google

on aura successivement

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial M}{\partial u} + \Sigma x \frac{\partial I}{\partial u} + \Sigma I \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u} + qz - ry\right) I + (\xi + rx - pz) J + (py - qx) K,$$

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial M}{\partial v} + \Sigma x \frac{\partial I}{\partial v} + \Sigma I \frac{\partial x}{\partial v}$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial v} + q_1 z - r_1 y\right) I + (r_1 x - p_1 z) J + (\xi_1 + p_1 y - q_1 x) K.$$

Par conséquent p, q, r sont les composantes suivant les arêtes du trièdre de la rotation instantanée de ce trièdre quand u seul varie, et o, ξ, o sont les composantes correspondantes de translation; ξ_1, p_1, q_1, r_1 sont les quantités analogues quand v seul varie.

Ceci posé, j'exprime que la ligne $u =$ const. est une ligne de courbure : il faut et il suffit que la vitesse d'un point $M + \rho I$ de la normale, quand u seul varie, soit suivant cette normale; or cette vitesse est

$$\frac{\partial(M + \rho I)}{\partial u} = \xi J + \rho(rJ - qK) + I\frac{\partial \rho}{\partial u},$$

d'où

$$\xi + \rho r = 0 \quad \text{et} \quad q = 0;$$

la première de ces relations détermine ρ.

On aurait de même, avec la ligne de courbure $v =$ const.,

$$\xi_1 - \rho_1 q_1 = 0 \quad \text{et} \quad r_1 = 0,$$

et la première de ces relations fait connaître l'autre rayon de courbure principal ρ_1.

Enfin, en exprimant la compatibilité des systèmes (I) et (II) par l'égalité des dérivées partielles secondes prises successivement par rapport à u et v, on retrouve, sous les conditions $q = r_1 = 0$, les équations connues

Digitized by Google

(*voir* Darboux, *Théorie générale des surfaces*)

$$(a)\quad \begin{cases} p_1\xi = \dfrac{\partial\xi_1}{\partial u}, \qquad -p\xi_1 = \dfrac{\partial\xi}{\partial u}, \\ pq_1 = \dfrac{\partial r}{\partial v}, \qquad -rp_1 = \dfrac{\partial q_1}{\partial u}, \qquad \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} + rq_1 = 0. \end{cases}$$

Remarquons qu'on passe d'une ligne de courbure à l'autre en échangeant u et v, J et K, ξ et ξ_1, r et $-q_1$, p et $-p_1$.

Vérifions maintenant la proposition de M. Bricard : je forme le plan Π osculateur en M à la ligne $v =$ const.; pour cela je calcule le produit progressif

$$M\frac{\partial M}{\partial u}\frac{\partial^2 M}{\partial u^2} = \xi MJ\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}J + \xi\frac{\partial J}{\partial u}\right) = \xi^2 MJ\frac{\partial J}{\partial u}.$$

On prendra alors

$$\Pi = MJ\frac{\partial J}{\partial u} = MJ(pK - rI) = M(pJK + rIJ);$$

par suite le vecteur $N = pI + rK$ est normal au plan Π : *c'est le vecteur représentatif de la rotation instantanée* p, o, r; alors, la caractéristique du plan Π quand v seul varie sera perpendiculaire aux vecteurs N et $\dfrac{\partial N}{\partial v}$; or, on a

$$\frac{\partial N}{\partial v} = I\frac{\partial p}{\partial v} + K\frac{\partial r}{\partial v} - pq_1K + r(q_1I - p_1J),$$

c'est-à-dire en vertu des équations (a)

$$\frac{\partial N}{\partial v} = \frac{\partial p_1}{\partial u}I - rp_1J.$$

On a alors

$$N\frac{\partial N}{\partial v} = r\left(p_1 rJK + \frac{\partial p_1}{\partial u}KI - pp_1 IJ\right);$$

Digitized by Google

par suite la *caractéristique du plan sera parallèle au vecteur* $\left| N \frac{\partial N}{\partial v} \right.$, c'est-à-dire à

$$U = p_1 r I + \frac{\partial p_1}{\partial u} J - p p_1 K.$$

Les permutations de lettres indiquées ci-dessus donnent aussitôt la direction de l'autre caractéristique à considérer, v variant seul : elle est parallèle au vecteur

$$V = p q_1 I - p p_1 J - \frac{\partial p}{\partial v} K.$$

La perpendicularité des vecteurs U et V s'exprime alors par la condition

$$p p_1 r q_1 - p p_1 \frac{\partial p_1}{\partial u} + p p_1 \frac{\partial p}{\partial v} = 0,$$

qui se réduit à l'une des équations (a)

$$\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p_1}{\partial u} + r q_1 = 0.$$

La proposition est donc vérifiée.

On aurait pu opérer autrement en calculant la caractéristique même du plan Π, c'est-à-dire son intersection avec le plan $\frac{\partial \Pi}{\partial v}$: le produit *régressif* $\Pi \frac{\partial \Pi}{\partial v}$ conduit ainsi à la droite menée par le point $M + \frac{\xi_1}{p_1} J$ parallèlement à la direction (p, o, r) trouvée ci-dessus; de même, l'autre caractéristique coupe la tangente à la ligne $u =$ const. au point $M - \frac{\xi}{p} I$.

Digitized by Google

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE. COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

I. *On donne deux axes de coordonnées rectangulaires* OX, OY *et, sur la partie positive de l'axe des* x, *un point* A, *d'abscisse* c.

Appelons en général parabole (P) *une parabole qui passe par le point* A *et dont la directrice coïncide avec l'axe des* y, F *le foyer de cette parabole,* α, β *les coordonnées de ce foyer.*

1° *Soit* B *un point d'une parabole* (P), *soit* K *la projection de ce point sur la directrice, soit* S *l'aire du triangle* OFK; *montrer que l'on a*

$$\frac{\overline{OF}^2.OK}{OA} = \frac{\overline{KF}^2.OK}{KB} = 4S.$$

2° *Au point* B *de la parabole* (P) *on fait correspondre le point* M *dont les coordonnées* u, v *sont données par les formules*

$$(1) \qquad u = \frac{KF}{OK}, \qquad v = \frac{OF}{OK};$$

les seconds membres sont pris en valeur absolue, en sorte que les nombres u, v *sont positifs. Quand on se donne la parabole* (P) *et le point* B *sur cette parabole, le point* M *est déterminé sans ambiguïté. Si l'on se donne un point* B *du plan, il passe en général deux paraboles* (P) *par ce point. On appellera* PREMIÈRE PARABOLE *relative au point* B *celle des deux dont le foyer est le plus éloigné de la directrice. Soit* F_1 *ce*

Digitized by Google

foyer; soit F_2 *le foyer de la seconde parabole. Au point* B *correspondent alors deux points* M_1, M_2, *par les relations* (1), *où l'on remplacera successivement* F *par* F_1 *et par* F_2.

Connaissant les coordonnées x, y *du point* B, *on demande de calculer les coordonnées des points* M_1, M_2. *Quelles sont les positions limites de ces points lorsque le point* B *s'approche du point* B_0 *situé sur la partie positive de l'axe des* x? *Quels sont les lieux décrits par ces points limites quand l'abscisse de* B_0 *varie?*

3° *Inversement, le point* M *étant donné par ses coordonnées* u, v, *on demande de déterminer les coordonnées* x, y *du point* B *auquel il correspond en vertu des relations* (1), *ainsi que les coordonnées* α, β *du foyer* F, *qui figure dans ces relations, de la parabole* (P) *sur laquelle le point* B *doit être situé.*

Construire géométriquement le point F *et le point* B, *connaissant le point* M *et l'unité de longueur.*

4° *Le problème précédent admet deux solutions. Dans quelle région du plan le point* M *doit-il être situé pour que ces solutions soient réelles? Dans quelle région doit-il être situé pour que la parabole* (P), *dont on a déterminé le foyer, soit la première parabole relative au point* B?

II. 1° *Considérant une parabole* (P), *de foyer* α, β, *on suppose qu'un arc quelconque de cette parabole est pesant : la densité en chaque point est égale à la racine carrée de l'abscisse* x *de ce point, en sorte que le poids de l'élément d'arc* ds *soit* $\sqrt{x}\,ds$. *Montrer que, dans ces conditions, le poids d'un arc* AB *de la parabole est égal au produit par* $\sqrt{\frac{2}{\alpha}}$ *de l'aire comprise entre la courbe, la directrice et les deux*

Digitized by Google

droites OA, KB. (K *est, comme plus haut, la projection de* B *sur la directrice.*)

2° *On suppose que les deux droites* OA, KB *soient aussi pesantes; la densité en chacun de leurs points est encore égale à la racine carrée de l'abscisse de ce point. Étudier, quand le point* B *décrit la parabole* (P), *comment varie la différence entre le poids de l'arc* AB *et la somme des poids des droites* OA, KB. *Montrer que, sur chacun des arcs indéfinis de la parabole qui partent du point* A, *il y a un point* B, *et un seul, pour lequel cette différence est nulle.*

3° *Le point* B *étant ainsi déterminé sur la parabole* (P), *soit* M *le point qui lui correspond par les relations* (1); *montrer que, lorsque la parabole* (P) *varie, le point* M *reste sur une conique, qui fait partie de la courbe du troisième degré définie par l'équation*

$$2u^3 + 2v^3 - 3u^2 - 3v^2 + 1 = 0.$$

N. B. — *Les poids dont il est question plus haut sont* POSITIFS.

I. Pour démontrer la première Partie, il suffit de prouver que l'on a pour un point quelconque B de la parabole

$$(1) \qquad \frac{\overline{KF}^2}{\overline{KB}} = 2FH,$$

H étant le pied de la perpendiculaire abaissée (*fig.* 1) de F sur Oy.

Or, l'équation de la parabole étant

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = x^2,$$

on en tire

$$\frac{\alpha^2 + (y-\beta)^2}{x} = 2\alpha,$$

ce qui exprime la propriété précédente.

Digitized by Google

Remarquons de suite que α et x seront toujours positifs, seuls y et β pourront être négatifs.

De la relation (1) on tire

$$KF = \sqrt{2\alpha x},$$

et, en plaçant B en A, on en conclut

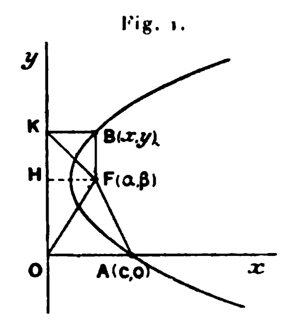
$$OF = \sqrt{2\alpha c};$$

on a, par suite,

(2) $$u = \frac{\sqrt{2\alpha x}}{|y|}, \qquad v = \frac{\sqrt{2\alpha c}}{|y|}.$$

Pour avoir les coordonnées des points M_1 et M_2 il

Fig. 1.



suffit de calculer les valeurs de α pour F_1 et F_2. Or, on a, en exprimant que A et B sont sur la parabole,

$$\alpha^2 + (y-\beta)^2 = 2\alpha x,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = 2c\alpha.$$

En retranchant, on a une équation de premier degré en β qui donne

(3) $$\beta = \frac{y^2 - 2\alpha(x-c)}{2y}.$$

Cette valeur de β, portée dans l'une des deux relations précédentes, donne l'équation

(4) $$4\alpha^2[y^2 + (x-c)^2] - 4\alpha y^2(x+c) + y^4 = 0,$$

Digitized by Google

qui donne les valeurs de α :

$$(5)\qquad \alpha = y^2 \frac{x + c \pm \sqrt{4cx - y^2}}{2[y^2 + (x-c)^2]}.$$

En prenant le signe + on a le point F_1 et, en prenant le signe — devant le radical, on a F_2. Il suffit de porter ces valeurs de α dans les formules (2) pour avoir les coordonnées de M_1 et M_2.

Lorsque B tend vers un point B_0 de Ox, α et y tendent tous deux vers zéro et, pour avoir les limites de u et v, il faut chercher la limite du rapport $\frac{\sqrt{2\alpha}}{|y|}$. Or, d'après la formule (5), on a

$$\frac{\sqrt{2\alpha}}{|y|} = \sqrt{\frac{x + c \pm \sqrt{4cx - y^2}}{y^2 + (x-c)^2}}.$$

Lorsque y tend vers zéro et x vers une valeur positive x_0, on a

$$\lim \frac{\sqrt{2\alpha}}{|y|} = \sqrt{\frac{x_0 + c \pm 2\sqrt{cx_0}}{(x_0 - c)^2}} = \sqrt{\frac{\left(x_0^{\frac{1}{2}} \pm c^{\frac{1}{2}}\right)^2}{(x_0 - c)^2}};$$

on en conclut

$$\lim \frac{\sqrt{2\alpha}}{|y|} = \frac{1}{\left|x_0^{\frac{1}{2}} \mp c^{\frac{1}{2}}\right|}.$$

On aura donc, pour les coordonnées de M_1,

$$u_1 = \frac{x_0^{\frac{1}{2}}}{\left|x_0^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}\right|},\qquad v_1 = \frac{c^{\frac{1}{2}}}{\left|x_0^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}\right|}$$

et, pour celles de M_2,

$$u_2 = \frac{x_0^{\frac{1}{2}}}{x_0^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}},\qquad v_2 = \frac{c^{\frac{1}{2}}}{x_0^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}}.$$

Digitized by Google

Les lieux des points M_1 et M_2 sont manifestement des segments de droites.

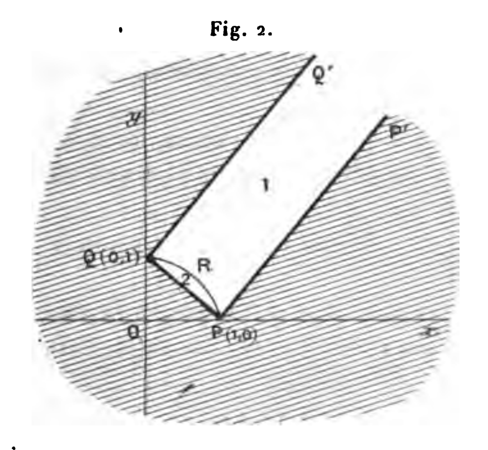
Quand x_0 varie de o à c, on a

$$u_1 = \frac{x_0^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}} - x_0^{\frac{1}{2}}}, \qquad v_1 = \frac{c^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{2}} - x_0^{\frac{1}{2}}},$$

et le point M_1 décrit la demi-droite PP′ (*fig.* 2) d'équation

$$u - v - 1 = 0.$$

Fig. 2.



Lorsque x_0 varie de c à $+\infty$, on a

$$u_1 = \frac{x_0^{\frac{1}{2}}}{x_0^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}}, \qquad v_1 = \frac{c^{\frac{1}{2}}}{x_0^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}},$$

et le point M_1 décrit la demi-droite QQ′ d'équation

$$u - v + 1 = 0.$$

Enfin, lorsque x_0 varie de o à $+\infty$, le point M_2 décrit le segment de droite PQ d'équation

$$u + v - 1 = 0.$$

Digitized by Google

Pour avoir les coordonnées de B connaissant u, v, on tire des équations (2)

$$2\alpha x = u^2 y^2, \qquad 2c\alpha = v^2 y^2,$$

ce qui donne, en divisant,

$$x = \frac{u^2 c}{v^2}.$$

En multipliant et ajoutant on a

$$4\alpha^2 cx = u^2 v^2 y^4, \qquad 2\alpha(x+c) = (u^2+v^2) y^4,$$

et, en portant ces valeurs de α^2, α et x dans l'équation (4), on obtient une équation du second degré en y.

Mais on peut obtenir ces valeurs de x et y beaucoup plus élégamment au moyen des formules démontrées. Les égalités

$$\frac{\text{KF}}{u} = \frac{\text{OF}}{v} = \frac{\text{OK}}{1} = |y|$$

prouvent que le triangle OFK est semblable au triangle de côtés u, v, 1 dans le rapport de similitude $|y|$. La surface S de ce triangle est donc égale à celle du triangle u, v, 1 multipliée par y^2; on a donc

$$4\text{S} = y^2 \sqrt{(u+v+1)(u+v-1)(u-v+1)(v-u+1)}.$$

Les égalités

$$\frac{\overline{\text{OF}}^2.\text{OK}}{\text{OA}} = \frac{\overline{\text{KF}}^2.\text{OK}}{\text{KB}} = 4\text{S}$$

s'écrivent alors, puisque

$$\text{OF} = v.\text{OK} = v\,|y|,$$
$$\text{KF} = u.\text{OK} = u\,|y|,$$

$$\frac{v^2\,|y|^3}{c} = \frac{u^2\,|y|^3}{x}$$
$$= y^2 \sqrt{(u+v+1)(u+v-1)(u-v+1)(v-u+1)}.$$

Digitized by Google

On en tire

$$(6)\quad \begin{cases} x = \dfrac{u^2 c}{v^2}, \\ y = \pm \dfrac{c}{v^2}\sqrt{(u+v+1)(u+v-1)(u-v+1)(v-u+1)}. \end{cases}$$

Connaissant x et y on a

$$(7)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{v^2 y^2}{2c}, \\ \beta = \dfrac{y}{2}(1+v^2-u^2); \end{cases}$$

à chaque point M correspondent donc deux paraboles symétriques par rapport à Ox.

Pour que le point B soit réel il faut et il suffit que la quantité sous le radical de y soit positive. Ceci exprime que, avec les trois longueurs u, v, 1, on peut construire un triangle. Comme u et v sont positifs, il suffit que l'on ait

$$(u+v-1)(u-v+1)(v-u+1) > 0,$$

d'où il résulte que le point de coordonnées u, v (positives) se trouve à l'intérieur du rectangle indéfini P′PQQ′ (*fig.* 2) (c'est-à-dire dans la région non ombrée).

Étant donné un point M dans cette région, pour construire géométriquement le point B, nous porterons sur Oy (*fig.* 3) une longueur Ok égale à l'unité de longueur et nous construirons le triangle Ofk de côtés

$$Ok = 1, \qquad Of = v, \qquad kf = u.$$

Ce triangle est semblable au triangle OFK. On obtient F en abaissant de A la perpendiculaire AS sur Of et prenant

$$OF = 2\,OS.$$

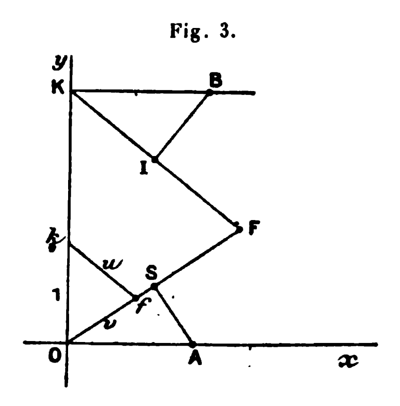
En menant par F la parallèle FK à fk on a le

Digitized by Google

point K, et enfin B est à l'intersection de la parallèle KB à Ox et de la perpendiculaire au milieu I de KF.

Pour distinguer les paraboles remarquons que les deux paraboles sont confondues lorsque les valeurs de α

Fig. 3.



fournies par la formule (5) sont égales, c'est-à-dire lorsque

$$y^2 = 4cx.$$

Ceci donne

$$(u^2 + v^2 - 1)^2 = 0.$$

La courbe de séparation est donc le cercle

$$u^2 + v^2 = 1,$$

dont il ne faut évidemment prendre que l'arc PRQ (*fig.* 2) situé dans l'angle xOy. Cet arc PRQ partage le rectangle P′PQQ′ en deux régions, et c'est évidemment la région 1 (P′PRQQ′), attenante aux côtés PP′ et QQ′ positions limites de M_1, qui correspond à la première parabole.

II. L'équation de la parabole étant

$$(y - \beta)^2 + \alpha^2 = 2\alpha x,$$

Digitized by Google

on a, en différentiant,

$$(y-\beta)\,dy = \alpha\,dx$$

et, par suite,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{(y-\beta)^2+\alpha^2}{\alpha^2}\,dy^2,$$

$$ds^2 = \frac{2x}{\alpha}\,dy^2,$$

$$\sqrt{x}\,ds = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\,x\,dy,$$

égalité qui prouve que le poids $\int_0^y \sqrt{x}\,ds$ de l'arc AB est égal à l'aire $\int_0^y x\,dy$ multipliée par $\sqrt{\frac{2}{\alpha}}$.

Remarquons de suite que, lorsque y sera négatif, cette expression donnera une valeur négative pour le poids.

Les poids de OA et KB sont respectivement

$$\frac{2}{3}c^{\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}.$$

La différence entre le poids de l'arc AB et la somme des poids des droites OA et BK est donc : si $y > 0$,

$$(8) \qquad z = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\int_0^y x\,dy - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}c^{\frac{3}{2}}$$

et, si $y < 0$,

$$(9) \qquad z = -\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\int_0^y x\,dy - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}c^{\frac{3}{2}}.$$

Pour étudier la variation de z prenons-en la dérivée

$$\frac{dz}{dy} = \pm\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\,x - x^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{dy},$$

or

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y-\beta}{\alpha} = \pm\frac{\sqrt{2\alpha x - x^2}}{\alpha};$$

Digitized by Google

on a donc

$$\frac{dz}{dy} = \pm\sqrt{\frac{2}{\alpha}x} \mp \sqrt{\frac{x(2x-\alpha)}{\alpha}}$$

ou

$$\frac{dz}{dy} = \pm\sqrt{\frac{2}{\alpha}x}\left(1 \pm \sqrt{\frac{x-\frac{\alpha}{2}}{x}}\right).$$

Sous cette forme on voit que, dans tous les cas, $\frac{dz}{dy}$ est du signe de y. La fonction z est donc *croissante en valeur absolue* lorsque y croît à partir de zéro.

Lorsque y est positif, on a

$$z = \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\left(\frac{\alpha}{2}(y-\beta) + \frac{(y-\beta)^3}{6\alpha} + \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\beta^3}{6\alpha}\right) - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}c^{\frac{3}{2}}.$$

Posons $y - \beta = y'$ et il vient, en développant

$$x^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{y'^2+\alpha^2}{2\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}$$

suivant les puissances décroissantes de y',

$$z = \frac{1}{(2\alpha)^{\frac{3}{2}}}(\alpha^2 y' + \ldots).$$

Ceci prouve que quand y croît indéfiniment z croît indéfiniment.

Donc, quand y croît de 0 à $+\infty$, z croît de $-\frac{4}{3}c^{\frac{3}{2}}$ à $+\infty$ et, par suite, z s'annule une fois et une seule fois sur la branche de la parabole située au-dessus de Ox.

Pour la branche située au-dessous de Ox on a

$$z = -\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\left(\frac{\alpha}{2}(y-\beta) + \frac{(y-\beta)^3}{6\alpha} + \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\beta^3}{6\alpha}\right) - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}c^{\frac{3}{2}}.$$

En posant $y - \beta = -y'$ et faisant croître y' par

Digitized by Google

valeurs positives, on verrait de même que, quand y décroît de o à $-\infty$, z croît de $-\frac{4}{3}c^{\frac{3}{2}}$ à $+\infty$ et, par suite, s'annule encore une fois et une seule.

Si, dans l'expression de z développée, on remplace α, β, x par leurs valeurs fournies par les formules (6) et (7), on trouve, *dans les deux cas*,

$$z = \frac{-c^{\frac{3}{2}}}{3v^3}(2u^3 + 2v^3 - 3u^2 - 3v^2 + 1)$$

ou

$$z = \frac{c^{\frac{3}{2}}}{3v^3}(1 - u - v)(2u^2 + 2v^2 - 2uv - u - v - 1).$$

Les valeurs de u et v, pour lesquelles on a $z = 0$, satisfont donc soit à

$$(10) \qquad 1 - u - v = 0,$$

soit à

$$(11) \qquad 2u^2 + 2v^2 - 2uv - u - v - 1 = 0.$$

La droite (10) n'est autre chose que le segment PQ (*fig.* 2) qui correspond au cas où le point B est sur Ox. Dans ce cas, en effet, la parabole est une droite double, l'arc de parabole se confond avec les deux segments OA et KB, et l'on a évidemment $z = 0$.

Si l'on écarte ce cas singulier il reste la conique représentée par l'équation (11). C'est une ellipse qui passe aux points P et Q (*fig.* 2). Il ne faudra évidemment prendre que l'arc PQ de cette ellipse.

Cet arc d'ellipse est tout entier dans la région 1 (*fig.* 2). Si donc on prend un point M sur cet arc, c'est la première parabole pour laquelle z est nul.

Digitized by Google

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES.

ÉLÉMENTS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES.

Bordeaux.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Ox, Oy, Oz *étant trois axes rectangulaires, calculer le volume limité par le plan des* xy, *par la surface de l'ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

et par la surface du cylindre

$$\frac{2x^2}{a^2}+\frac{2y^2}{b^2}=1.$$

II. *On considère les sphères ayant pour centres les différents points d'une courbe* C *et dont les rayons sont fonction du paramètre qui fixe la position des points de* C.

Soient M *l'enveloppe des caractéristiques de cette famille de sphères à un paramètre et* μ *le point de* M *qui est situé sur la sphère de la famille ayant pour centre le point* γ *de* C.

Montrer que la droite polaire de la courbe M *relative au point* μ *passe par le point* γ.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$\frac{d^2x}{dt^2}+9x=\cos 3t.$$

(Novembre 1903.)

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Étant donnés deux axes rectangulaires* OX, OY *et un point* A *sur* OY, *déterminer une courbe* C *telle que, si la tangente en un de ses points* M

Digitized by Google

rencontre OX *en* T, *on ait* MT = TA. *Trouver les trajectoires orthogonales* C′ *des courbes* C.

Ayant constaté que les lignes C *et* C′ *sont des courbes à centre, on prend, de toutes les manières possibles, une courbe* C *et une courbe* C′ *telles que la droite qui joint leurs centres soit parallèle à la bissectrice de* XOY : *déterminer le lieu de leurs points communs et l'aire comprise entre ce lieu et la demi-droite* OY.

SOLUTION.

$$(c) \qquad x^2 + y^2 - 2cy + a^2 = 0,$$
$$(c') \qquad x^2 + y^2 - 2c'x - a^2 = 0.$$

Le dernier lieu a pour équation

$$r^2 = a^2 \operatorname{tang}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right),$$

et l'aire demandée est

$$\frac{1}{4} a^2 \operatorname{Log} 2.$$

2° *Calculer la latitude d'un lieu sachant qu'on y voit se coucher au même instant deux étoiles d'ascensions droites* α, α' *et de déclinaisons* $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}'$. (Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On donne un cylindre dont l'équation par rapport à trois axes rectangulaires est*

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0,$$

et un cône dont le sommet est à l'origine et dont les génératrices forment avec OZ *un angle de* 45°.

1° *Déterminer les projections sur* Oxz *et* Oyz *de l'intersection* C *des deux surfaces.*

2° *Calculer le volume* V *compris à l'intérieur du cylindre, entre le cône et le plan des* xy, *du côté des* z *positifs.*

3° *Évaluer les aires* A, A′ *des portions de surfaces, cylindrique et conique, qui limitent le volume précédent.*

4° *Trouver et construire le lieu des traces des tangentes à* C *sur le plan* Oxz.

Digitized by Google

II. *Un point m est attiré vers le point fixe O par une force* $\frac{2}{5}\frac{ma^6}{r^5}$; r_0 *est égal à a*; v_0, *aussi égale à a, fait avec le prolongement de* r_0 *un angle aigu dont le sinus est* $\frac{2}{\sqrt{5}}$. *Trajectoire du point m; loi de son mouvement.*

SOLUTION.

I. $$V = \frac{32}{9}a^3, \qquad A = 8a^2, \qquad A' = \pi a^2\sqrt{2}.$$

4° $$z^2 = \frac{x^3}{2(x-a)}, \qquad \text{asymptotes } z = \pm\frac{2x+a}{2\sqrt{2}},$$

points parasites de $x = a$ à $x = 2a$.

II. $$v^2 = \frac{1}{5}\left(\frac{a^6}{r^4} - a^2\right) + a^2 = \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{4a^4}{5r^2},$$

$$dt = \frac{\sqrt{5}}{a^2}\frac{r^2\,dr}{2r^2 - a^2}, \qquad d\theta = \frac{2a\,dr}{2r^2 - a^2}$$

(cercle et droite asymptotiques).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On observe deux étoiles, de déclinaisons* $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, *aux instants où leurs azimuts passent par un minimum; ces azimuts minima, rapportés à une origine quelconque, sont* α, α'. *Calculer l'azimut de la méridienne et la latitude du lieu de l'observation.*

(Novembre 1903.)

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère la courbe plane décrite par un point mobile* M *dont les coordonnées rectangulaires sont exprimées en fonction du temps par les deux équations*

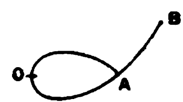
(1) $$x = kt^2, \qquad y = kt^3 - at.$$

1° *Construire cette courbe; déterminer ses points à l'infini, ses points singuliers, ses points d'inflexion.*

Digitized by Google

2° *Donner l'expression du rayon de courbure en fonction de t, puis de x. Quelle relation faut-il supposer entre les constantes a et k pour que le rayon de courbure soit une fonction rationnelle de l'abscisse ?*

3° *La cubique* (1) *présente une boucle* OA. *On demande*



l'aire de cette boucle, le volume qu'elle engendre en tournant autour de Ox.

4° *Rectifier la courbe* (1). *On trouve que l'arc s'exprime par une intégrale elliptique ; quelle relation faut-il supposer entre a et k pour que l'arc soit une fonction rationnelle de t ?*

5° *Cette condition étant supposée remplie, trouver les coordonnées du point* B *de la courbe telle que l'arc* AB *soit égal à la demi-longueur de la boucle.*

6° *Trouver toutes les courbes planes dont le rayon de courbure* R *est une fonction linéaire $mx + n$ de l'abscisse. Peut-on déterminer m, n de manière à retrouver parmi les solutions la cubique particulière définie au 2° ?*

Mécanique. — *Théorie du pendule composé. Application au cas d'un parallélépipède rectangle homogène, oscillant autour d'une de ses arêtes.* (Juillet 1903.)

Épreuve écrite. — *Étant donné un système d'axes rectangulaires* Ox, Oy, *on considère les courbes* C *telles que l'ordonnée à l'origine de la tangente au point d'abscisse x soit égale à kx^n, k désignant une constante et n un nombre positif.*

1° *Trouver l'équation générale des courbes satisfaisant à la condition énoncée.*

2° *Construire celles de ces courbes qui correspondent aux valeurs* 3 *et* 4 *du nombre n.*

3° *On considère l'arc déterminé sur l'une des courbes* C *par l'origine et par un point quelconque* A ; *calculer l'aire limitée par cet arc et par la corde* OA, *ainsi que le*

Digitized by Google

volume engendré par cette aire quand elle tourne autour de l'un des axes de coordonnées.

4° *Le nombre n étant supposé plus grand que* 1, *on considère la courbe* γ *de la famille* C *tangente à* Ox *en* O : *trouver l'équation générale des courbes telles que la tangente en un point quelconque* P *à l'une de ces courbes soit perpendiculaire sur la tangente à* γ *au point d'intersection de cette dernière courbe et de la parallèle à* Oy *menée par* P; *montrer que, pour une valeur particulière de n, ces courbes sont des hyperboles équilatères.*

5° *Le nombre n étant supposé entier, d'un point quelconque* R *du plan on peut mener, à une courbe* C *quelconque, n tangentes dont les points de contact sont* $T_1, T_2, \ldots, T_n$; *montrer que, si n est supérieur à* 2, *la somme des aires des cercles engendrés par les points* $T_1, \ldots, T_n$, *quand ils tournent autour de* Ox, *est égale à* n^2 *fois l'aire du cercle engendré par le centre de gravité du polygone* $T_1 T_2 \ldots T_n$.

MÉCANIQUE. — 1° *Expression analytique du travail élémentaire d'une force.*

2° *Expression analytique du travail total dans le cas d'un champ où la force dérive d'un potentiel.*

3° *Propriétés des surfaces équipotentielles.*

(Novembre 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est*

$$\rho^2 = a^2 \frac{\omega}{\pi - \omega}, \tag{1}$$

a désignant une longueur quelconque.

1° *Construire cette courbe.*

2° *Calculer l'aire limitée par un arc de cette courbe et par les deux rayons vecteurs qui joignent le pôle aux extrémités de l'arc.*

3° *L'aire précédente est supposée recouverte d'une couche infiniment mince de matière pesante dont la densité est, en chaque point, inversement proportionnelle à la distance de ce point au pôle; calculer la masse totale de la matière qui recouvre l'aire donnée.*

Digitized by Google

4° Lorsque a varie, l'équation (1) *représente une famille de courbes; déterminer les trajectoires orthogonales des courbes de cette famille.*

Mécanique. — 1° *Définir l'accélération d'un point dans le cas général, et déterminer ses composantes suivant les axes de coordonnées.*

2° *Montrer que l'accélération est située dans le plan osculateur à la trajectoire, et déterminer ses composantes tangentielle et normale.*

(Candidats au diplôme d'ingénieur-électricien, 1903.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1831.

(1899, p. 579.)

On donne un cercle O *et un point* A *dans l'espace; soit* M *un point du cercle, démontrer que le plan mené par* M *perpendiculairement à* AM *passe par un point fixe* A' *quand* M *décrit le cercle.*

Trouver le lieu que décrit A', *lorsque* A *décrit un plan* P. *Ce lieu est une quadrique; mettre en évidence les plans de section circulaire et reconnaître la nature de la surface.*

Trouver le lieu que décrit A', *lorsque* A *décrit une sphère. Ce lieu est, en général, une surface de quatrième degré. Montrer que toute sphère passant par le cercle* O *coupe cette surface à distance finie, suivant un second cercle.*

(Ch. Bioche.)

SOLUTION

Par M. H. D.

Soit (S) la sphère passant par le cercle O et le point A. Il est évident que le plan mené par M perpendiculairement à AM passe par le point A' diamétralement opposé à A sur la sphère (S).

Digitized by Google

Lieu du point A′, *lorsque* A *décrit un plan* P. — Soit Δ la perpendiculaire au plan du cercle O, menée par son centre, un plan Π passant par Δ coupe P suivant une droite L, et le cercle O en deux points M, M′.

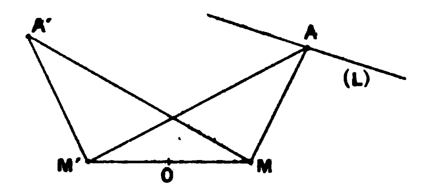
A chaque point (A) de la droite L correspond le point A′ obtenu par l'intersection de MA′ et M′A′ respectivement perpendiculaires à MA et M′A.

Si A décrit la droite L, MA′ et M′A′ engendrent deux faisceaux homographiques.

Le lieu du point A′ est donc une conique passant par M et M′.

Cette courbe est la section du lieu cherché par le plan Π.

Le lieu est donc une quadrique (Σ) qui passe par le



cercle O, et qui admet évidemment pour plan de symétrie le plan mené par Δ perpendiculairement à P.

Soit ω un point de Δ.

La sphère de centre ω et passant par le cercle O est coupée par P suivant un cercle. Si A décrit ce cercle, A′ décrit le cercle symétrique par rapport à ω. Le second plan cyclique de (Σ) est donc parallèle à P.

Revenons à la section de (Σ) par le plan Π. Si A s'éloigne à l'infini sur L, A′ est rejeté à l'infini dans la direction perpendiculaire à L.

Soit L′ la parallèle à cette direction menée par le point O. Si p désigne le point de rencontre de P et Δ, le point commun à L et L′ appartient à la sphère de diamètre Op. Cette sphère coupe le plan P suivant un cercle par lequel passe le cône asymptotique de sommet O.

Déterminons les génératrices de (Σ), parallèles à la génératrice Op de ce cône.

Si A est sur le cercle O, les plans qui définissent le point A′ passent par une même droite, parallèle à Δ et qui rencontre le cercle O au point diamétralement opposé de A.

Digitized by Google

Donc :

Si le plan P coupe le cercle O en deux points, (Σ) est un hyperboloïde à une nappe.

Si le plan P est tangent au cercle O, (Σ) est un cône.

Si le plan P est parallèle au plan du cercle O, (Σ) est un paraboloïde de révolution autour de Δ.

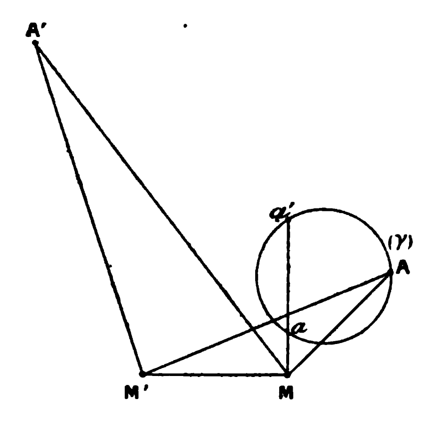
Si le plan P coïncide avec le plan du cercle O, (Σ) est un cylindre de révolution autour de Δ.

Si le plan P est parallèle à Δ, (Σ) se décompose en deux plans : le plan du cercle C et le symétrique de P par rapport à Δ.

Lieu du point A, *lorsque* A *décrit une sphère* Γ. — Déterminons la section du lieu par un plan Π, mené par Δ.

Le point A se déplace sur un cercle γ.

Cherchons le degré de la section. Pour que A′ soit sur une



droite L, il faut que A soit sur une conique Λ (première partie). Cette conique rencontre γ en quatre points auxquels correspondent les points du lieu situés sur L.

Si A vient en (a) ou en (a'), le point A′ vient en M′.

Le lieu est donc une surface du quatrième degré qui passe deux fois par le cercle O.

Le point A′ est rejeté à l'infini si les droites MA, M′A sont parallèles. Il en résulte que le lieu passe par le cercle de l'infini.

Il admet évidemment pour plan de symétrie le plan mené par Δ et le centre de Γ.

Digitized by Google

Si A parcourt la section de Γ par le plan du cercle O, le point A′ est rejeté à l'infini dans la direction Δ. Aux points de rencontre de Γ et du cercle O correspondent deux génératrices du lieu, parallèles à Δ.

Une sphère passant par le cercle O coupe la surface lieu suivant une courbe du huitième degré comprenant le cercle double O, et le cercle de l'infini. Il reste donc un cercle à distance finie.

Remarque. — Soit ω un point de Δ. La sphère de centre ω et passant par le cercle O coupe Γ suivant un cercle C. Si A décrit le cercle C, A′ décrit le cercle C′, symétrique de C par rapport au point ω. D'où une infinité de cercles situés sur le lieu.

Le plan d'un de ces cercles coupe la surface du quatrième ordre suivant le cercle C′ et suivant une ellipse; on voit facilement que cette ellipse est la transformée d'un cercle de Γ situé dans un plan horizontal.

Le cercle et l'ellipse se coupent en deux points situés sur le cercle O et en deux autres α et β où le plan est tangent à la surface lieu.

Ce plan est d'ailleurs perpendiculaire au plan de symétrie de la surface; il enveloppe un cylindre parabolique.

1901 à 1907

Proposées par M. Léauté.

[1901, p. 47 (1).]

SOLUTION

Par M. G. Fontené.

Ces théorèmes résultent de la représentation elliptique d'une biquadratique gauche par les formules

$$\frac{x_1}{p''u} = \frac{x_2}{p'u} = \frac{x^3}{pu} = \frac{x^4}{1},$$

(1) Les solutions des questions 1901, 1902, 1904, 1906 et 1907 ont déjà été données en octobre 1902. La question 1903 a été résolue en octobre 1903.

Digitized by Google

que l'on trouve par exemple dans l'Ouvrage d'Halphen ; la courbe est l'intersection des quadriques

$$x_1 x_4 = 6x_3^2 - \frac{1}{2} g_2 x_3 x_4,$$

$$x_2^2 \quad = \frac{2}{3} x_3 (x_1 - g_2 x_4) - g_3 x_4^2,$$

dont la première est un cône de sommet B. *Quatre points dans un même plan sont caractérisés sur la biquadratique, par ce fait que la somme de leurs arguments est une période;* deux points, dont la somme des arguments est zéro ou une demi-période, sont dans un même plan bitangent à la courbe, c'est-à-dire que la corde qui les joint est la génératrice d'un cône du second ordre passant par la courbe; le plan osculateur, en un point d'argument u, rencontre de nouveau la courbe en un point dont l'argument est $-3u$.

Les questions 1902, 1904, 1906 sont des conséquences immédiates de ces faits connus; pour la question 1906, on peut considérer les points d'inflexion de la cubique plane qui est la perspective de la courbe, quand le point de vue est pris sur la courbe.

Si l'on considère les droites rencontrant la courbe en deux points dont la somme des arguments est k, et celles qui correspondent à $-k$, on a les deux systèmes de génératrices d'une quadrique passant par la courbe. Une droite rencontrant la courbe en deux points dont la différence des arguments est constante engendre une quadricuspidale.

Ces faits donnent la solution des questions 1905 et 1907.

Pour la question 1903, considérons sur une quadrique fixe une biquadratique et des courbes appartenant à un faisceau tel qu'elles ne coupent la biquadratique qu'en deux points variables, La somme des arguments de ces deux points est alors constante, et l'on peut les obtenir en menant un plan sécant variable par une corde EF de la courbe.

Il existe dans le faisceau quatre courbes tangentes à la biquadratique, et l'on a les points de contact en menant par EF les plans tangents à la courbe; or le rapport anharmonique de ces plans tangents est égal à l'invariant absolu des fonctions elliptiques correspondant à la courbe. Comme il y a correspondance homographique entre le coefficient angulaire du plan sécant

Digitized by Google

mené par EF et un paramètre λ qui correspond uniformément aux courbes du faisceau, la question posée et résolue.

L'existence des seize points à plans surosculateurs est bien connue. Si l'on donne à l'argument u les valeurs o, ω_1, ω_2, ω_3, les quatre points obtenus sont dans le plan $x_2 = 0$, plan polaire du point B par rapport aux quadriques qui contiennent la courbe; cela résout la question 1901.

Halphen remarque que tout plan contenant trois des seize points en contient un quatrième; la propriété du tétraèdre conjugué commun par rapport à ces seize points est remarquable.

Relativement à la question 1905, M. G. Kohn a obtenu *géométriquement* (*Monatshefte*, 1900) un système de deux quadriques telles qu'il existe une infinité de contours quadrangulaires ayant un côté sur l'une des quadriques et trois côtés sur l'autre, les quatre sommets étant sur la biquadratique d'intersection.

QUESTIONS.

1999. On considère une ellipse, un foyer F, un point variable M de l'ellipse, le cercle décrit sur FM comme diamètre, et un cercle fixe. Le lieu des centres de similitude de ces deux cercles se compose de deux coniques. Cas où le cercle fixe est le cercle principal de l'ellipse.

(E.-N. Barisien.)

2000. On considère une ellipse E. Les cercles ayant pour diamètre les cordes parallèles au grand axe enveloppent une ellipse E_1; les cercles ayant pour diamètre les cordes parallèles au petit axe de E enveloppent une ellipse E_2. Pour toutes les ellipses E homofocales, le lieu des points de rencontre de E_1 et E_2 se compose de deux cubiques.

(E.-N. Barisien.)

Digitized by Google

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

MÉTHODOLOGIE ET ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT. — PHILOSOPHIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES. — CHRONIQUE SCIENTIFIQUE. — MÉLANGES. — BIBLIOGRAPHIE.

REVUE INTERNATIONALE PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS,

DIRIGÉE PAR

C.-A. LAISANT,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique de Paris.

H. FEHR,
Professeur à l'Université de Genève et au Gymnase.

AVEC LA COLLABORATION DE

A. BUHL,
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Prix de l'abonnement annuel : Union postale........... 15 fr.

INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS (L'), dirigé par *C.-A. Laisant* Docteur ès Sciences, Examinateur à l'École Polytechnique, et *Emile Lemoine*, Ingénieur civil, ancien Élève de l'École Polytechnique, avec la collaboration de *Ed. Maillet*, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique, et de *A. Grévy*, Docteur ès Sciences, ancien Élève de l'École Normale, Professeur au Lycée Saint-Louis. In-8, mensuel. Tome XI; 1904.

L'abonnement est annuel et part de Janvier.

Prix pour un an (12 NUMÉROS) :

Paris, 7 fr. — Départements et Union postale, 8 fr. 50.

Les années précédentes sauf le Tome I (1894) se vendent chacune, 7 fr.

MM. Laisant et Lemoine ont eu l'heureuse idée de mettre en rapport scientifique les mathématiciens, au moyen d'un organe international dont le titre, *Intermédiaire des Mathématiciens*, indique le but. Ce recueil mensuel, qui paraît depuis janvier 1894, n'admet d'autres articles que des questions posées par les mathématiciens à leurs collègues, soit pour en indiquer l'intérêt général, soit pour les besoins de leurs recherches personnelles, et les réponses à ces questions. La Mathématique est si vaste maintenant que nul n'en connaît complètement même une des branches, et qu'une question de détail (science, histoire, bibliographie) peut arrêter longtemps un savant de premier ordre, si ce détail sort du cadre de ses études ordinaires, tandis qu'elle ne serait qu'un jeu pour un autre.

Cette publication répond évidemment à un besoin, car elle a reçu, dès le principe, l'accueil le plus empressé dans le monde scientifique.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Juillet 1904.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

DARBOUX (Gaston), Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences et Professeur de Géométrie supérieure à l'Université de Paris. — **Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes.** Deux volumes grand in-8, se vendant séparément :

Tome I : Volume de IV-338 pages avec figures; 1898.......... 10 fr.

Tome II.. (*En préparation.*)

HALPHEN (G.-H.), Membre de l'Institut. — **Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.** 3 volumes grand in-8, se vendant séparément.

Ire Partie : *Théorie des fonctions elliptiques et de leur développement en séries;* 1886.. 15 fr.

IIe Partie : *Applications à la Mécanique, à la Physique, à la Géodésie, à la Géométrie et au Calcul intégral ;* 1888............ 20 fr.

IIIe Partie : *Fragments.* (*Quelques applications à l'Algèbre et en particulier à l'équation du 5e degré. Quelques applications à la théorie des nombres. Questions diverses.*) Publié par les soins de la Section de Géométrie de l'Académie des Sciences ; 1891.............. 8 fr. 50 c.

34577 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

Digitized by Google

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME IV.

AOUT 1904.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris,
à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, 16e;
ou à M. BOURLET, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,
ou à M. BRICARD, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.
(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Digitized by Google

Rédacteur de service : M. R. Bricard.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences.

Besançon : M. Ét. Delassus. — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Duport. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. — Montpellier : M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers : M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

DARBOUX (G.), Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences. — **Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal.** 4 volumes grand in-8, avec figures, se vendant séparément :

Ire Partie : *Généralités. — Coordonnées curvilignes. Surfaces minima;* 1887 .... 15 fr.

IIe Partie : *Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. Des lignes tracées sur les surfaces;* 1889 .... 15 fr.

IIIe Partie : *Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres différentiels. Déformation des surfaces;* 1894 .... 15 fr.

IVe Partie : *Déformation infiniment petite et représentation sphérique;* 1896 .... 15 fr.

PICARD (Émile), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Traité d'Analyse** (Cours de la Faculté des Sciences). Quatre volumes grand in-8 avec figures, se vendant séparément.

Tome I : *Intégrales simples et multiples. — L'équation de Laplace et ses applications. Développement en séries. — Applications géométriques du Calcul infinitésimal.* 2e édition, revue et corrigée; 1901 .... 16 fr.

Tome II : *Fonctions harmoniques et fonctions analytiques. — Introduction à la théorie des équations différentielles. Intégrales abéliennes et surfaces de Riemann.* 2e édition. Un fascicule est paru. Prix du volume complet pour les souscripteurs .... 16 fr.

Tome III : *Des singularités des intégrales et des équations différentielles. Étude du cas où la variable reste réelle et des courbes définies par des équations différentielles. Équations linéaires; analogie entre les équations algébriques et les équations linéaires;* 1896 .... 18 fr.

Tome IV : *Équations aux dérivées partielles* .. (*En préparation.*)

Digitized by Google

[U1]

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DU MOUVEMENT PLANÉTAIRE;

PAR M. A.-G. GREENHILL.

Dans *Matière et mouvement*, petit Livre sur un grand sujet, J.-C. Maxwell donne (p. 110) une démonstration géométrique de la *première loi* de Képler, sur le mouvement des planètes :

L'orbite d'une planète est une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers.

La démonstration de Maxwell utilise la considération de l'*hodographe* d'Hamilton. Elle diffère en cela de la méthode géométrique donnée par Newton en 1687 dans les *Principia mathematica philosophiae naturalis* (lib. I, sect. III, prop. XI).

Je me propose, dans la Note actuelle, de continuer les deux méthodes. Je montrerai comment on peut étudier géométriquement, d'une manière rigoureuse, le mouvement d'un corps qui reçoit des impulsions radiales égales, à des intervalles angulaires égaux. Je montrerai ensuite, à la manière de Newton, que les effets de l'attraction solaire peuvent être reproduits, quand on suppose que ces impulsions deviennent continues. Tout se passe, ainsi qu'on le verra, comme si le corps était plongé dans un champ de gravitation centrale variant en raison inverse du carré de la distance au point attirant.

Dans la figure de la page suivante, S représente le Soleil, P une planète qui se meut dans la direction PR.

Supposons qu'à l'intérieur de l'angle KSK_2 l'attraction solaire est *concentrée* suivant la droite RS, bissec-

Digitized by Google

trice de cet angle : la planète reçoit ainsi une impulsion qui change la direction de son mouvement de PR en RP_2.

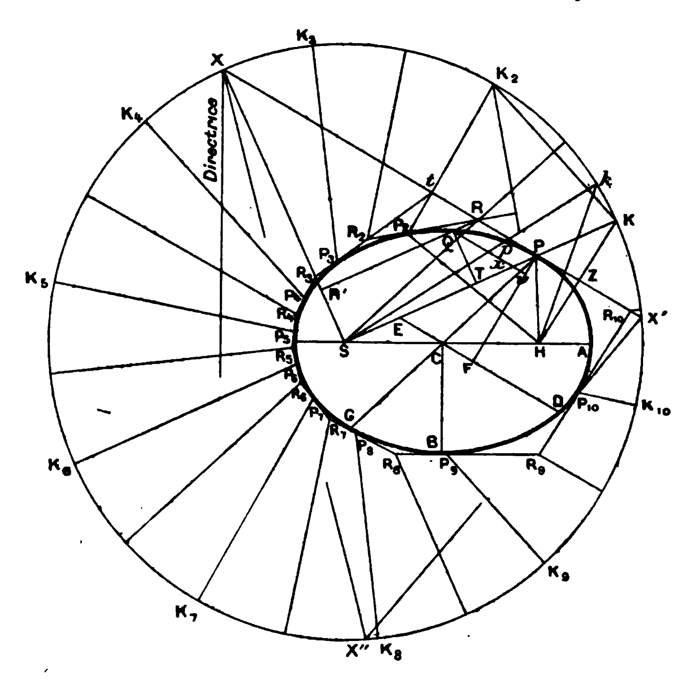
Décrivons le cercle KK_2, ..., de centre S, et menons KH perpendiculaire à PR, le point H étant tel que

$$\widehat{HPR} = \widehat{KPR};$$

on a

$$PH = PK.$$

Construisons la figure à une échelle telle que le vecteur HK ait une longueur égale à la vitesse du point P,



et que KK_2, perpendiculaire à SR, soit égal à la vitesse communiquée par l'impulsion. Alors la longueur HK_2 sera égale à la nouvelle vitesse du mobile P, et de plus

Digitized by Google

la droite RP_2, suivant laquelle est dirigée cette vitesse, doit être perpendiculaire à HK_2. Au point P_2, où la trajectoire rencontre SK_2, on a

$$HP_2 = P_2K_2,$$

à cause de

$$HR = RK = RK_2;$$

par suite

$$HP_2 + P_2S = SK_2 = SK = HP + PS.$$

Il en résulte que $PR_1 RP_2$ sont tangentes, en $P_1 P_2$, à l'ellipse ayant pour foyers S, H, et pour grand axe SK.

Portons sur le cercle, à la suite l'une de l'autre, une série de cordes égales K_2K_3, K_3K_4, ... Une nouvelle impulsion centrale, représentée en grandeur par K_2K_3 et dirigée suivant R_2S, changera la direction du mouvement de P_2R_2 en R_2P_3, cette dernière droite étant perpendiculaire à HK_3. Au point P_3, situé sur SK_3, on a

$$HP_3 = P_3K_3,$$

de telle sorte que R_2P_3 touche au point P_3 l'ellipse précédemment définie.

En continuant de cette manière, on voit que, sous l'effet d'impulsions égales, réparties à des intervalles angulaires égaux, le mobile décrit une trajectoire polygonale $RR_2R_3R_4$, ..., constituant avec les droites SR, SR_2, SR_3, SR_4, ... une sorte de toile d'araignée. Cette trajectoire est circonscrite à une ellipse, les points de contact étant situés sur les droites SK, SK_2, SK_3, ..., qui forment entre elles des angles égaux. Ce résultat est bien d'accord avec un théorème très connu relatif aux sections coniques.

La figure qui accompagne cet article représente un polygone fermé de dix côtés.

Le polygone RR_2R_3, ... est aussi inscrit dans une

Digitized by Google

ellipse, ayant en commun avec l'ellipse précédente le foyer S et la directrice correspondante.

Soit, en effet, X le point où la droite PR prolongée rencontre la perpendiculaire élevée à SP en S; ce point est sur la directrice, qui peut être tracée en abaissant du point X une perpendiculaire sur SH. (Sur la figure le point X se trouve sur le cercle KK_2, ...; c'est un fait accidentel.)

Menons RR' perpendiculaire à SX, et désignons par 2α l'angle KSK_2, c'est-à-dire l'angle constant sous lequel les cordes égales KK_2... sont vues du point S. On a

$$\frac{SR}{RX} = \text{séc}\,\alpha \frac{RR'}{RX} = \text{séc}\,\alpha \frac{SP}{PX}.$$

Si donc e désigne l'excentricité de la première ellipse, R se trouve sur une section conique d'excentricité $e\,\text{séc}\,\alpha$, et ayant en commun avec la première ellipse le foyer S et la directrice correspondante. De même pour R_2, R_3, ...

Jusqu'ici, nous avons supposé dans la construction que le cercle KK_2, ... est donné; nous en avons déduit la position de H et la vitesse de P.

Mais supposons données les vitesses suivant PR et suivant RP_2, le changement de vitesse étant dû à l'impulsion agissant suivant RS, bissectrice de l'angle PSP_2. On obtient alors le point H par l'intersection des droites PH et P_2H, construites en faisant

$$\widehat{ZPH} = \widehat{SPR} \quad \text{et} \quad \widehat{RP_2H} = \widehat{SP_2R_2};$$

K est alors l'intersection de HZ, perpendiculaire à PR, et de la droite SP prolongée; on peut enfin décrire le cercle KK_2, dont le centre est S.

Si H est à l'extérieur du cercle KK_2, ..., l'ellipse de

Digitized by Google

la figure est remplacée par une hyperbole, et la construction est la même que précédemment.

Pourtant, si PH et P_2H sont parallèles, le cercle a un rayon infini; l'ellipse PP_2, ... est remplacée par une parabole, et l'ellipse RR_2, ... par une hyperbole dont l'excentricité a pour valeur séc α. Les triangles PSR, RSP_2 sont maintenant semblables, et le cercle hodographe KK_2, ... doit être remplacé par un cercle contenant le point S.

Pour le mouvement parabolique dans un champ de gravité uniforme : on suppose que la force continue est répartie suivant des impulsions égales, ayant lieu à des intervalles de temps égaux, et dont les lignes d'action constituent une série de parallèles équidistantes. On obtient ainsi une trajectoire polygonale, circonscrite et inscrite à deux paraboles égales et coaxiales.

En résumé, nous supposons que la gravitation du Soleil S agit d'une façon intermittente, par une série d'impulsions égales dont les lignes d'action font entre elles des angles égaux; dans ces conditions, l'orbite d'une planète devient un polygone, circonscrit à une conique et inscrit à une autre conique. Les deux coniques ont même foyer S et même direction correspondante.

Nous allons maintenant établir que ces impulsions intermittentes égales, supposées devenir de plus en plus fréquentes, à des intervalles angulaires de plus en plus petits, sont, à la limite, équivalentes à un champ de force, d'intensité variant en raison inverse du carré de la distance de S, conformément à la loi de Newton sur la gravitation universelle.

Dans les *Principia* (lib. I, sect. II, prop. I), Newton démontre de la manière suivante la deuxième loi de Képler :

L'aire balayée par le rayon vecteur mené du Soleil

Digitized by Google

à une planète est proportionnelle au temps employé à la parcourir.

Il suppose le point R près de P, de telle sorte que l'arc PQ peut être remplacé par sa corde; il suppose en outre que la direction PR du mouvement est changée en PQ, par une impulsion dirigée suivant RQ, parallèlement à SP.

L'égalité des aires SPQ, SPR montre alors que l'aire balayée par le vecteur SQ est la même que si aucune force centrale n'agissait; elle croît donc conformément avec le temps.

On désigne en général par $\frac{1}{2}h$ la vitesse d'accroissement de cette aire; on a donc

$$h = \text{SP}^2 \times \text{vitesse angulaire de SP}.$$

Considérons alors une orbite elliptique PQ, de foyer S, décrite sous l'action d'une force émanée de ce point S, et soit p la position occupée par le point P après un petit intervalle de temps Δt; on a

$$h = \lim \frac{2\,\text{aire SP}p}{\Delta t} = \lim \text{SY} \frac{\text{P}p}{\Delta t} = \text{SY} \times \text{vitesse de P},$$

en appelant SY la perpendiculaire abaissée de S sur la tangente PR.

On a, d'après une propriété bien connue de l'ellipse,

$$\text{SY}.\text{HK} = 2\overline{\text{CB}}^2;$$

par suite

$$\text{vitesse de P} = \frac{h}{\text{SY}} = \frac{\frac{1}{2}h}{\overline{\text{CB}}^2}\,\text{HK}.$$

Le vecteur HK peut donc être supposé mesurer la vitesse de P, si l'échelle est convenablement choisie,

Digitized by Google

et le cercle KK_2, ... peut être pris pour hodographe, ainsi que nous l'avons fait au début.

Pendant que P vient en p, et que SP tourne dans le temps Δt du petit angle $KSk = \Delta\theta$, le vecteur Kk représente la variation de vitesse due à la force centrale dont l'intensité est F, pour l'unité de masse. Cette variation de vitesse étant d'autre part égale à $F\,\Delta t$, on a

$$\frac{F\,\Delta t}{\text{vitesse de P}} = \frac{Kk}{HK},$$

d'où

$$F = \frac{\text{vitesse de K} \times \text{vitesse de P}}{HK};$$

mais

$$\text{vitesse de K} = \text{vitesse angulaire de SP} \times SK = \frac{h.SK}{\overline{SP}^2},$$

$$\frac{\text{vitesse de P}}{HK} = \frac{\frac{1}{2}h}{\overline{BC}^2},$$

donc enfin

$$F = \frac{\frac{1}{2}h^2 SK}{\overline{BC}^2.\overline{SP}^2} = \frac{2h^2}{L}\,\frac{1}{\overline{SP}^2},$$

si L désigne la longueur de *latus rectum*, $4\dfrac{\overline{BC}^2}{SK}$.

Telle est essentiellement la démonstration donnée par Maxwell dans *Matière et mouvement* (§ CXXXIII, p. 111).

Pour employer ses expressions, l'accélération de P est perpendiculaire et proportionnelle au vecteur vitesse de K, dans l'hodographe KK_2.... Puisque cet hodographe est un cercle ayant S pour centre, l'accélération est proportionnelle à la vitesse angulaire de SP, et par suite inversement proportionnelle au carré de SP, en vertu de la deuxième loi de Képler.

Nous allons donner la démonstration même de Newton

Digitized by Google

(*Principia*, lib. I, sect. III, prop. XI), traduite du latin. Nous écrirons SP^2 au lieu de SPq, notation archaïque qui survit encore dans des Ouvrages techniques, où l'on trouve *mq* ou *qm* pour désigner les *mètres carrés*, au lieu de m^2, dans la notation de M. Hospitalier.

Newton établit d'abord (lib. I, sect. II, prop. VI) que si PQ est un petit arc d'une orbite quelconque décrite sous l'action d'une force centrale F émanée du point S, on a

$$F = \frac{2h^2}{\overline{SP}^2} \lim \frac{QR}{\overline{QT}^2},$$

QT étant mené perpendiculairement à SP, et QR parallèle à SP.

En effet, QR peut être considéré comme la distance dont le mobile s'éloigne, pendant un temps très court t, de la direction primitive PR de son mouvement, et cela dans la direction de la force F qui le sollicite suivant PS. On a donc

$$QR = \tfrac{1}{2} F t^2.$$

Or, d'après la deuxième loi de Képler,

$$ht = 2 \text{ aire } SPQ = SP.QT,$$

puisque le triangle SPQ peut être considéré comme rectiligne. On a donc à la limite

$$F = \lim \frac{2QR}{t^2} = \frac{2h^2}{\overline{SP}^2} \lim \frac{QR}{\overline{QT}^2}.$$

L'auteur démontre plus loin (sect. III, prop. XI) que, si PQ est un arc d'une ellipse ayant un foyer en S, on a

$$\lim \frac{QR}{\overline{QT}^2} = \frac{1}{L}.$$

Digitized by Google

En effet, des théorèmes bien connus donnent pour la conique représentée sur la figure

$$(1)\qquad \frac{QR}{Pv} = \frac{Px}{Pv} = \frac{PE}{PC} = \frac{AC}{PC},$$

$$(2)\qquad \frac{Pv.vG}{\overline{Qv}^2} = \frac{\overline{CP}^2}{\overline{CD}^2},$$

$$(3)\qquad \lim \frac{\overline{Qv}^2}{\overline{QT}^2} = \lim \frac{\overline{Qx}^2}{\overline{QT}^2} = \frac{\overline{PE}^2}{\overline{PF}^2} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{CB}^2},$$

d'où, en multipliant membre à membre (1), (2), (3) :

$$\lim \frac{QR}{\overline{QT}^2} = \lim \frac{AC}{PC} \frac{\overline{CP}^2}{vG.\overline{CD}^2} \frac{\overline{CD}^2}{\overline{CB}^2}$$

$$= \frac{AC}{PC} \frac{\overline{CP}^2}{2CP.\overline{CD}^2} \frac{\overline{CD}^2}{\overline{CB}^2} = \frac{AC}{2\overline{CB}^2} = \frac{1}{L}.$$

C. Q. F. D.

Les petites impulsions incessantes, représentées par les cordes Kk et dont l'ensemble constitue l'arc fini KK_2, et qui font décrire au mobile P l'arc d'ellipse PQP_2, ont une résultante dirigée suivant RS, bissectrice de l'angle PSP_2 et représentée en grandeur par la corde KK_2. Si la force attractive incessante est remplacée par cette impulsion unique, le corps suivra la trajectoire brisée composée des lignes droites PR et RP_2, et arrivera finalement au point P_2 et avec une vitesse dirigée suivant RP_2, c'est-à-dire dans les mêmes conditions qu'en suivant sa trajectoire elliptique sous l'influence de l'attraction continue. Mais le temps nécessaire à ce parcours sera augmenté dans le rapport

$$\frac{\text{aire du quadrilatère } SPRP_2}{\text{aire du secteur curviligne } SPQP_2}.$$

Digitized by Google

Si l'on remplaçait les impulsions centripètes par des impulsions centrifuges, on obtiendrait une trajectoire polygonale inscrite et circonscrite à deux hyperboles, ayant un foyer commun en S et même directrice correspondante. La démonstration est la même que précédemment, et s'applique à l'orbite décrite sous l'action d'une force répulsive émanée de S, et variant en raison inverse du carré de la distance (*Principia*, lib. I, sect. III, prop. XII). Dans la construction de la figure, que nous laissons comme exercice au lecteur, le point H devra se trouver en dehors du cercle $KK_2 \ldots$

Nous signalerons la propriété suivante de la conique et du cercle $KK_2 \ldots$ Appelons X et X′ les points où la tangente en P coupe le cercle; les secondes tangentes menées à la conique par les points X et X′ se coupent en X″ sur le cercle, de telle sorte que le triangle XX′X″ est inscrit dans le cercle et circonscrit à la conique. Il existe donc, en vertu du théorème de Poncelet, une infinité de tels triangles. H est leur orthocentre commun, et ils ont tous pour cercle des neuf points le cercle principal de la conique.

L'enveloppe des diverses trajectoires elliptiques décrites par un mobile partant de P avec une vitesse donnée de direction variable est l'ellipse qui a pour foyers S et P et dont un sommet se trouve en K. Le point de contact d'une ellipse avec son enveloppe est à P′ sur le prolongement de PH.

Une impulsion radiale, agissant en P dans la direction SP, n'entraînera pas de modification pour la valeur de h, c'est-à-dire pour le *latus rectum* L de la nouvelle orbite : cette dernière passera donc par un point fixe P″, situé sur le prolongement de PS, puisque L est moyenne harmonique entre PS et SP″.

Si la direction de la vitesse initiale est PK, le mobile

Digitized by Google

arrivera en K avec une vitesse nulle, de telle sorte que le cercle $KK_2 \ldots$ peut être appelé le *cercle de vitesse nulle*. On peut dire aussi que la vitesse en P est celle qu'acquiert un mobile partant sans vitesse du point K situé sur le cercle, et se mouvant suivant KP sous l'attraction du point S.

Supposons que S soit le centre et P un pôle de la Terre. Lançons du point P des projectiles, avec une vitesse initiale v, qui, supposée dirigée verticalement, les amènerait à une hauteur PK comparable au rayon de la Terre PS; alors

$$\tfrac{1}{2} v = g.\mathrm{SP}\left(1 - \frac{\mathrm{SP}}{\mathrm{SK}}\right).$$

Dans ces conditions, et en admettant que le milieu ne présente pas de résistance, la trajectoire d'un de ces projectiles, pour une vitesse initiale faisant l'angle β avec la verticale, est une ellipse ayant un foyer en S et l'autre au point H tel que $\widehat{\mathrm{KPH}} = 2\beta$.

La portée, à la surface de la Terre, est, en milles marins, égale à 120α, où $\mathrm{PSH} = \alpha$ est, exprimé en degrés, l'angle qui satisfait à la relation

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(2\beta - \alpha)} = \frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{SP}} = \frac{\mathrm{PK}}{\mathrm{SP}}.$$

Désignons par $\frac{1}{n}$ ce dernier rapport. La portée est maximum si l'on a

$$\widehat{\mathrm{PHS}} = 2\beta - \alpha = 90^\circ,$$

$$\sin\alpha = -\cos 2\beta = \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \tfrac{1}{2} v^2 = \frac{g.\mathrm{SP}}{n+1}.$$

Si l'on veut par exemple que la portée maximum soit la distance du pôle à l'équateur, il faudra faire

$$\alpha = 45^\circ, \qquad n = \sqrt{2}, \qquad \beta = 67^\circ 30'.$$

Digitized by Google

Le projectile doit être lancé dans une direction faisant avec l'horizon un angle de $22°30'$.

On trouvera que le temps nécessaire au parcours est d'environ 30^m. On verra aussi que la vitesse initiale doit être au moins d'environ 7200 m/s pour qu'un projectile lancé du pôle atteigne l'équateur.

Si l'on fait $n = 1$, on obtient la vitesse d'un satellite qui tournerait autour de la Terre en rasant sa surface. Le temps de la révolution d'un tel satellite serait $\frac{1}{17}$ de jour ([1]).

Un projectile, lancé avec cette vitesse sous un angle de $\beta°$ avec la verticale, aurait une portée de $120\,\beta$ milles marins.

On peut appeler $\sqrt{2g.\mathrm{SP}}$ *la vitesse parabolique;* en effet, pour une vitesse initiale ayant cette valeur, SK est infini, et la trajectoire est une parabole ayant son foyer en S. Si l'on fait

$$g = 9,81\ \mathrm{m/s^2} \qquad \text{et} \qquad \tfrac{1}{2}\pi \mathrm{SP} = 10^7\ \mathrm{m},$$

on trouve que la vitesse parabolique est d'environ

11200 m/s.

On dit que la première et la deuxième lois de Képler ont résulté d'une discussion laborieuse des observations de la planète Mars. On peut cependant les déduire aisément du Tableau des demi-diamètres apparents du Soleil, pris de jour en jour, et de sa marche horaire en longitude, Tableaux qui figurent dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*.

1° On trouve que le diamètre D du Soleil est relié à sa longitude θ, comptée à partir de l'aphélie, par une

---

([1]) *Voir* l'anecdote rapportée par Hérodote (Livre IV, § 36).

Digitized by Google

relation de la forme

$$D = a + b \cos\theta, \qquad a + b = 1956'', \qquad a - b = 1892'',$$

ce qui démontre la première loi.

2° La marche horaire en longitude, c'est-à-dire la vitesse angulaire, est proportionnelle à l'aire apparente, c'est-à-dire à D^2, ce qui prouve la deuxième loi.

La loi de la gravitation universelle de Newton, appliquée au Soleil et à une planète, est exprimée par la formule

$$F = \frac{G.S}{\overline{SP}^2}, \qquad \text{d'où} \qquad G.S = \frac{2h^2}{L},$$

S désignant la masse du Soleil, et G la *constante de la gravitation*. Cette constante, d'après les expériences de M. C.-V. Boys, a pour valeur numérique, en unités C. G. S.,

$$G = 666.10^{-10}$$

(voir *La Constante de la gravitation,* rapport présenté au Congrès international de Physique, réuni à Paris en 1900; chez Gauthier-Villars, à Paris).

Si Δ désigne la densité moyenne de la Terre, E sa masse, r son rayon, g l'accélération de la pesanteur à sa surface (toujours en unités C. G. S.), on a

$$g = \frac{G.E}{r^2} = \tfrac{4}{3}\pi r G\Delta = \tfrac{8}{3}10^9 G\Delta,$$

puisque le quart du méridien terrestre $= \frac{1}{2}\pi r = 10^9$ cm.

Par suite

$$G\Delta = \tfrac{3}{8} g\, 10^{-9},$$

et, puisque

$$g = 981 \text{ cm/s}^2,$$
$$\Delta = 5,53 \text{ g/cm}^3,$$

$$E = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \Delta = \tfrac{4}{3}\pi \left(\frac{10^9}{\frac{1}{2}\pi}\right)^3 \Delta = \frac{32}{3\pi^2} 10^{27}\Delta \approx 6.10^{27} \text{ g}.$$

Digitized by Google

La durée de la révolution terrestre T, exprimée en secondes, est donnée par

$$T = \frac{\text{aire de l'orbite elliptique}}{\frac{1}{2}h} = 2\pi\frac{AC.BC}{h},$$

d'où

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{h^2}{\overline{AC}^2.\overline{BC}^2} = \frac{G.S}{\overline{AC}^3}.$$

Désignons, suivant Laplace et d'autres auteurs, la vitesse angulaire moyenne $\frac{2\pi}{T}$ par n, et par a la distance moyenne AC, on aura

$$n^2a^3 = G.S.$$

C'est la troisième loi de Képler, qui s'énonce ainsi :

Le carré du temps de la révolution d'une planète est proportionnel au cube de sa distance moyenne au Soleil.

Nous avons supposé dans ce calcul que le Soleil était fixe et ne cédait pas à l'attraction de la planète. Cette hypothèse est suffisamment voisine de la vérité, quand il s'agit du mouvement de la Terre par rapport à un astre aussi vaste que le Soleil; mais il faut recourir à des considérations plus rigoureuses, quand on examine le système constitué par une étoile double, pour la Terre et la Lune, ou bien quand on étudie le mouvement d'une grosse planète.

Appelons E la masse de la planète P, la Terre par exemple. Pour calculer le mouvement relatif de P par rapport au Soleil, l'accélération $\frac{G.E}{\overline{SP}^2}$, due à l'attraction de la planète, doit être appliquée au système des deux astres, et cela en sens inverse de l'accélération $\frac{G.S}{\overline{SP}^2}$ due

Digitized by Google

à l'attraction solaire. On doit donc écrire, dans le cas actuel,

$$F = \frac{G(S+E)}{\overline{SP}^2}, \qquad G(S+E) = \frac{2h^2}{L},$$

d'où

$$n^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{G(S+E)}{a^3}.$$

Telle est la forme corrigée de la troisième loi de Képler, telle qu'elle est donnée dans *Matière et mouvement* (§ CXXXVII). Le terme correctif n'est pas négligeable pour les planètes les plus grosses et les plus lointaines du système solaire.

Supposons par exemple qu'on veuille déterminer la masse S du Soleil. Soient

M la masse de la Lune;
a' sa distance moyenne;
n' son moyen mouvement.

On aura

$$\frac{S+E}{E+M} = \frac{n^2a^3}{n'^2a'^3}.$$

Or, on a, comme on sait, en nombres ronds,

$$\frac{n}{n'} = \frac{1}{13}, \qquad \frac{a}{a'} = 400, \qquad \frac{E}{M} = 80.$$

Par conséquent

$$\frac{S}{E} = \frac{81}{80}\,\frac{(400)^3}{13^2} - 1 \approx 350\,000,$$
$$S = 21 \times 10^{32}\ \text{g}.$$

La troisième loi de Képler permet d'appliquer des considérations de similitude mécanique au système solaire, et à un modèle réduit de ce système (on peut appeler un tel modèle un *orrery*, d'après le nom de Lord Orrery, celui qui l'a construit le premier).

Digitized by Google

Si le modèle conserve les densités relatives des diverses parties du système solaire, S + E sera proportionnel à a^3 et au rapport des densités du système et du modèle. Ainsi, d'après la troisième loi de Képler, le rapport des densités sera proportionnel à n^2. Ce résultat, vrai pour le problème des deux corps, le Soleil et une planète, est encore applicable à un modèle de tout le système solaire, même en tenant compte des perturbations planétaires. En résumé, un modèle du système solaire, libre dans l'espace, et soumis à sa propre gravitation, satisfera aux conditions de la similitude géométrique, mais les temps seront altérés dans le rapport inverse des racines carrées des densités de l'original et du modèle. Si le modèle est construit avec conservation des densités, il sera géométriquement semblable à l'original à un moment quelconque.

[N° 1a]

SUR LA CONGRUENCE COMMUNE A DEUX COMPLEXES DU SECOND ORDRE;

PAR M. J. RICHARD,
Professeur à Dijon.

J'indique dans cette Note un moyen simple de déterminer l'ordre et la classe de la surface focale pour la congruence des droites appartenant à la fois à deux complexes du second ordre.

Soit une droite ayant pour équations

$$r_3 y - r_2 z = r_4,$$
$$r_1 z - r_3 x = r_5,$$
$$r_2 x - r_1 y = r_6,$$

Digitized by Google

avec la condition

$$r_1 r_4 + r_2 r_5 + r_3 r_6 = 0.$$

Soient

$$\sum a_{ik} r_i r_k = 0$$

et

$$\sum b_{ik} r_i r_k = 0$$

les équations de deux complexes. Pour avoir le degré de la surface focale de la congruence commune, cherchons en combien de points cette surface est coupée par une droite, que nous pouvons supposer être l'axe des z. Les points de Oz appartenant à la surface focale sont les points pour lesquels les cônes des deux complexes sont tangents.

Soient $x = 0$, $y = 0$, $z = \alpha$ les coordonnées d'un point de l'axe des z. On obtiendra les cônes des complexes, relatifs à ce point, en remplaçant les six quantités r_{ik} par les suivantes :

$$x, \quad y, \quad z - \alpha, \quad -\alpha y, \quad \alpha x \quad \text{et zéro.}$$

Transportant ensuite l'origine au sommet du cône, on mettra z au lieu de $z - \alpha$. On obtient ainsi l'équation

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) = (a_{11} + 2a_{25}\alpha + a_{55}\alpha^2)x^2 \\ + (a_{22} - 2a_{24}\alpha + a_{44}\alpha^2)y^2 + a_{33}z^2 \\ + 2(a_{23} - a_{34}\alpha yz) + 2(a_{13} + a_{35}\alpha)zx \\ + 2(a_{12} - a_{14}\alpha + a_{45}\alpha^2)xy = 0.\end{aligned}$$

On aura pour le cône du second complexe une équation analogue, où la lettre a est remplacée par la lettre b,

$$\Psi(x, y, z) = 0.$$

Digitized by Google

En écrivant que l'équation

$$\Phi + \lambda \Psi = 0$$

représente deux plans, on a une équation du troisième degré en λ et du quatrième degré en α.

Pour qu'une équation du troisième degré ait une racine double, on a une condition qui est du quatrième degré par rapport aux coefficients. Ceux-ci étant du quatrième degré en α, on en conclut que sur l'axe des z il y a 16 points pour lesquels les deux cônes sont tangents. La surface focale de notre congruence est donc du seizième ordre. Elle est aussi de seizième classe par le raisonnement corrélatif.

Nous allons retrouver ce résultat d'une autre façon.

On sait qu'on nomme *rang d'une congruence* le nombre de plans passant par une droite et tels que deux des droites de la congruence situées dans l'un de ces plans se coupent sur la droite. On peut dire aussi que le rang est le nombre de points d'une droite tels que deux droites de la congruence concourant en un de ces points soient dans un même plan avec la droite. Le rang est ainsi corrélatif à lui-même.

Or, cherchons le rang de la congruence précédente.

Reprenons l'équation ci-dessus :

$$\Phi + \lambda \Psi = 0.$$

Nous devons écrire qu'elle se décompose en deux plans dont l'un contient l'axe des z.

Pour qu'il en soit ainsi il faut qu'elle soit satisfaite par $x = 0$, $y = 0$, ce qui donne

$$a_{33} + \lambda b_{33} = 0.$$

Tirons λ de cette équation, et portons dans l'équation

Digitized by Google

en λ du troisième degré exprimant que $F + \lambda\Phi = 0$ se décompose en deux plans.

On a ainsi une relation du quatrième degré en α.

Il y a donc quatre points sur Oz pour lesquels deux droites communes aux deux cônes des deux complexes sont dans un même plan passant par cet axe.

Le rang cherché est donc quatre.

En général, pour une congruence d'ordre m (m droites passant par un point), de classe p (p droites situées dans un plan), de rang r, l'ordre et la classe de la surface focale sont respectivement

$$2m(p-1)-2r,$$
$$2p(m-1)-2r;$$

ici $m=4$, $p=4$, $r=4$; donc l'ordre et la classe de la surface focale sont $24-8$ ou 16.

[R8aα]

SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS PESANT AUTOUR D'UN POINT FIXE DANS LE CAS DE MME KOWALEWSKI;

PAR M. G. DUMAS, à Zurich.

Dans son intéressant Mémoire (¹) inséré au Tome LVI des *Math. Annalen*, M. Kolossof obtient d'une manière élégante la réduction aux quadratures des équations de ce problème.

Il désigne par λ et μ les deux paramètres de Mme Ko-

(¹) *Ueber eine Eigenschaft der Differentialgleichungen der Rotation eines schweren Körpers um einen festen Punkt im Falle von Frau S. Kowalewski.*


Digitized by Google

walewski et montre, après avoir introduit une nouvelle variable τ représentative du temps et liée à t par la relation

$$i\,d\tau = (\lambda + \mu)\,dt,$$

que l'intégration des équations du mouvement, en tenant compte des quatre intégrales que l'on connaît, se ramène à celle des équations du mouvement d'un point dont la force vive est représentée par

$$T = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\left(\frac{\lambda'^2}{\lambda^2 - k^2} + \frac{\mu'^2}{\mu^2 - k^2}\right),$$

et sur lequel agit une force dérivant de la fonction de forces

$$U = \frac{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 1 - k^2}{\lambda + \mu}.$$

M. Kolossof introduit alors l'équation de Jacobi qui correspond à ces deux expressions et par intégration de celle-ci aboutit effectivement à des quadratures.

Pour faire voir que la résolution du problème de Mme Kowalewski conduit à des quadratures, cette dernière intégration n'est pas même nécessaire. En multipliant haut et bas U par $\lambda - \mu$, on obtient en effet

$$U = \frac{[\lambda^3 + (1 - k^2)\lambda] - [\mu^3 + (1 - k^2)\mu]}{\lambda^2 - \mu^2},$$

et l'on se trouve alors, à cause des formes de T et U, dans le cas d'un théorème de Liouville (¹).

Cette simple remarque sera peut-être de quelque utilité, en rattachant la méthode d'intégration de M. Kolossof à une méthode classique.

(¹) *Voir* APPELL, *Traité de Mécanique*, t. II, 2e édition, p. 408.

Digitized by Google

[M[1]5kα]

SUR LES CUBIQUES NODALES CIRCULAIRES;

PAR M. T. LEMOYNE.

Cette Note diffère des deux premières en ce que les propriétés qu'elle renferme ne dépendent pas du théorème de Chasles.

Un cercle passant par le point double O d'une cubique circulaire coupe cette courbe en deux points M, M' à distance finie. Dès lors, si l'on assujettit ce cercle à passer par un second point fixe ω du plan, au point M ne correspondra qu'un point M', à la droite OM, qu'une droite OM' et, comme la correspondance de ces droites est réciproque, elle est involutive.

1. *Étant donnée une cubique circulaire nodale de point double* O *et un faisceau de cercles passant par le point double* O *et un point fixe* ω *du plan, les droites qui joignent* O *aux couples de points où chaque cercle coupe la cubique forment un faisceau en involution.*

2. *Il y a deux cercles qui passent par le point double d'une cubique circulaire, un point fixe* ω *du plan et sont tangents à la courbe.*

La réciproque du théorème 1 est vraie :

3. *Lorsque par le point double d'une cubique nodale on mène des couples de cordes en involution* OM, OM'; ON, ON'; OP, OP'; ... *les cercles* OMM', ONN', ... *ont un second point commun.*

Digitized by Google

Désignons en effet par ω l'intersection des cercles OMM′, ONN′. Les droites OQ, OQ′ qui joignent le point double aux points d'intersection avec la cubique d'un cercle quelconque passant par O et ω engendrent, lorsque ce cercle varie, une involution de droites qui coïncide avec celle que nous avons considérée dans le théorème 3, puisqu'elles ont en commun deux couples de droites homologues OM, OM′; ON, ON′.

On en déduit, quand l'involution est formée de droites rectangulaires, que :

4. *Le cercle qui a pour diamètre une corde d'une cubique circulaire vue du point double sous un angle droit coupe en un point fixe la perpendiculaire abaissée du point double sur l'asymptote.*

Si AB est la corde vue du point double sous un angle droit, OA, OB décrivent lorsque AB varie une involution dont les rayons doubles sont les droites isotropes. Quand OA est parallèle à l'asymptote, A est à l'infini sur la courbe, OB perpendiculaire à l'asymptote et le cercle OAB, qui coupe la droite de l'infini en ses trois points d'intersection avec la courbe, se décompose en cette droite et la droite OB. Le point fixe ω, par lequel passe le cercle ayant pour diamètre une corde vue du point double sous un angle droit, est donc sur la perpendiculaire OB abaissée du point double sur l'asymptote et les milieux des cordes considérées sont sur une parallèle à cette droite.

D'ailleurs, d'après le théorème 2 de notre Note : *Sur quelques applications d'un théorème de Chasles aux cubiques circulaires,* les bissectrices OM, ON des tangentes au point double rencontrent la courbe en des points M et N tels que les tangentes en ces points sont

Digitized by Google

parallèles à l'asymptote; la corde MN est évidemment vue du point double sous un angle droit, son milieu se trouve sur la parallèle à l'asymptote équidistante des tangentes en M et N; par conséquent :

5. *Les milieux des cordes d'une cubique circulaire vues du point double sous un angle droit sont sur la droite équidistante des tangentes à la courbe parallèles à l'asymptote.*

Si l'involution du théorème 3 est formée de couples de droites OM, OM'; ON, ON'; ... également inclinées sur une sécante quelconque OA issue du point double, les cercles OMM', ONN', ... passent, d'après ce théorème, par un second point commun ω, mais les droites isotropes sont homologues dans l'involution; le cercle correspondant à ces droites touche la courbe aux points cycliques, le point d'intersection des tangentes en ces points, qui est le foyer singulier de la cubique, est par suite aussi le centre de ce cercle.

Le foyer singulier de la courbe est donc sur la droite lieu des centres des cercles OMM', ONN', ... Toutes les droites des centres obtenues comme la précédente lorsqu'on substitue à OA des sécantes OA', OA'', ... concourent en ce point.

Cette propriété est peut-être une des plus caractéristiques du foyer singulier d'une cubique nodale circulaire dont elle donne aussi une construction.

6. *Si par le point double d'une cubique circulaire on mène une sécante quelconque* OA *et que l'on trace par* O *des couples de droites* OM, OM'; ON, ON'; ... *également inclinées sur* OA, *les cercles* OMM', ONN', ... *ont leurs centres sur une droite qui passe par le foyer singulier de la courbe.*

Digitized by Google

Lorsque la sécante tourne autour de O le second point de rencontre des cercles OMM′, ONN′, . . . *décrit alors un cercle qui a pour centre le foyer singulier et qui passe par le point double.*

Considérons en particulier l'involution des droites OM, OM′, . . . également inclinées sur la bissectrice de l'angle des tangentes au point double, le couple des tangentes nodales appartient à cette involution, mais le cercle correspondant se réduit au point O, ce qui montre que les cercles OMM′, ONN′, . . . ont leurs centres sur une droite passant par O. On aurait pu le voir en appliquant la réciproque du théorème 7 de notre Note : *Sur quelques applications d'un théorème de Chasles aux cubiques circulaires.* On montre très facilement que cette droite est la symétrique, par rapport à la bissectrice de l'angle des tangentes nodales, de la perpendiculaire à l'asymptote menée par O. Donc :

7. *Le foyer singulier d'une cubique nodale circulaire est sur la droite* OΔ *symétrique de la perpendiculaire à l'asymptote abaissée du point double par rapport à la bissectrice de l'angle des tangentes nodales.*

Nous obtenons ainsi en combinant ce théorème avec le théorème 6 une construction assez simple du foyer singulier de la cubique.

(*Extrait d'un Mémoire couronné par l'Académie des Sciences de Toulouse.*)

Digitized by Google

CORRESPONDANCE.

M. **G. Vacca**, à Gênes. — Je viens de lire avec intérêt l'article de M. Maurice Fréchet : *Sur une généralisation des notions d'aire et de plan,* dans le numéro de juin 1904 des *Nouvelles Annales* (p. 241).

Permettez-moi d'y ajouter quelques notices historiques.

M. Peano avait déjà donné la généralisation exposée par M. Fréchet dans ses *Applicazioni geometriche del calc. inf.* (Turin, 1887), dans lesquelles on trouve plusieurs des résultats donnés dans le second paragraphe de l'article de M. Fréchet.

Mais déjà en 1873, M. R.-B. Hayward : *On an extension of the term « Area » to any closed circuit in space* (*Proceedings of the London Math. Society,* t. IV, p. 289-291), avait donné la même extension du concept d'aire, son interprétation mécanique, etc. Il donnait aussi le théorème contenu dans les dernières lignes de la Note de M. Fréchet :

The projection of the area (of a given closed circuit) on any plane has an area equal to that of the projection of the circuit itself.

J'ajouterai enfin que la même idée se rencontre d'une façon très développée dans l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann, 1844.

M. **L. Troin**, à Grasse. — En compulsant les numéros de l'année 1892 du *Journal de Math. élém.* de M. de Longchamps, j'y ai trouvé, proposé par M. Mannheim, un théorème facile à généraliser.

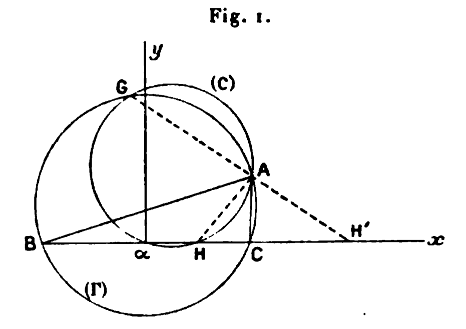
M. Mannheim énonce la propriété comme suit :

Sur la médiane Aα *d'un triangle* ABC *comme diamètre on décrit une circonférence de cercle* (C). *Cette courbe coupe au point* G *la circonférence circonscrite au triangle* ABC. *Démontrer que les droites* AB, AC, AG, AH (*hauteur*) *forment un faisceau harmonique.*

Il est facile de s'assurer analytiquement que *la propriété subsiste si l'on remplace* (C) *par une circonférence quelconque passant par* A *et* α. H devient alors le second point d'intersection de BC avec (C) (*fig.* 1).

Prenons, en effet, pour axes de coordonnées les droites

Fig. 1.



rectangulaires αx, αy. Nous aurons pour équation de (Γ)

$$x^2 + y^2 - 2ay - b = 0;$$

pour (C)

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\mu y = 0.$$

GA aura pour équation

$$2\lambda x + 2(\mu - a)y - b = 0.$$

Le point H' a donc pour abscisse

$$\overline{\alpha H'} = \frac{b}{2\lambda}.$$

H a pour abscisse

$$\overline{\alpha H} = 2\lambda.$$

On a donc

$$\overline{\alpha H}.\overline{\alpha H'} = b = \overline{\alpha C}^2.$$

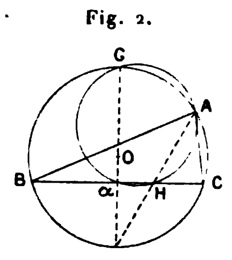
Cela démontre la proposition.

On peut appliquer cette propriété pour démontrer que les bissectrices d'un angle d'un triangle sont conjuguées harmoniques aux côtés de cet angle.

Digitized by Google

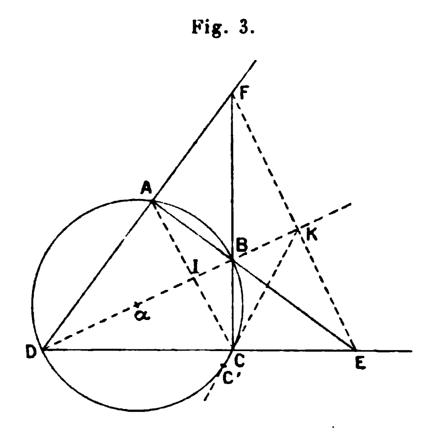
Il est en effet évident que le quadrilatère $AG\alpha H$ est inscriptible (*fig.* 2). On peut s'en servir également pour démontrer

Fig. 2.



sur le quadrilatère inscriptible une propriété d'ailleurs peu intéressante mais qui n'a peut-être pas été observée. A savoir : α étant le milieu de BD (*fig.* 3); I et K étant les points où la

Fig. 3.



diagonale BD rencontre la diagonale AC et la diagonale EF du quadrilatère complet, la droite KC coupe la circonférence circonscrite au quadrilatère en C'. Les quatre points α, I, C, C' sont sur une même circonférence.

Cela résulte de ce que chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres.

Digitized by Google

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie nouvelle des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée de nombre. Œuvres scientifiques de *Gustave Robin*, publiées par M. *Louis Raffy*, professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — 1 vol. in-8° de VI-215 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1903. Prix : 7fr.

M. L. Raffy a entrepris la tâche difficile de publier les œuvres du regretté et éminent savant que fut Gustave Robin.

La rédaction de la *Théorie nouvelle des fonctions* était particulièrement délicate, puisque M. Raffy a dû, en quelque sorte, la construire tout entière, faute de manuscrit, d'après des notes prises au cours de nombreux entretiens avec Robin.

La part de l'éditeur est donc, en l'occurrence, beaucoup plus grande que celle d'un simple rédacteur et M. Raffy a été, en écrivant cet Ouvrage, un véritable collaborateur de Robin, dont il a commenté, développé et ordonné les idées.

Ce qui importe dans cette Œuvre ce n'est pas le détail, fort bien mis au point et rédigé avec ce souci de l'élégance, cette recherche du mot juste, qui caractérisent les livres de M. Raffy. C'est l'idée directrice qu'il faut examiner, celle qui constitue l'originalité de l'Œuvre.

A ce point de vue, la lecture seule de l'*Introduction* pourrait suffire; s'il n'était pas nécessaire, pour la critique, de voir les conséquences et les conclusions.

« Notre objet, dit l'auteur, est de constituer l'Analyse avec la seule idée de nombre, le nombre sera le seul élément avec lequel nous opérerons; c'est-à-dire que toute lettre représentera toujours pour nous un nombre au lieu d'être, comme dans les théories classiques, le signe d'une grandeur. »

Une telle profession de foi ne devient évidemment intelligible que si l'auteur nous apprend ce qu'il entend par le mot *nombre*.

C'est là une notion fondamentale qui a déjà été étudiée,

Digitized by Google

fouillée par beaucoup de savants éminents tels Weierstrass, Kronecker, Dedekind, Grassmann, Méray, Jules Tannery, etc., et la série n'est certes pas close, car le champ reste toujours ouvert dans un domaine où l'abstraction règne en maîtresse et où le concept *a priori* est la base.

Le nombre peut être conçu uniquement comme mesure d'une grandeur concrète tangible. C'est probablement en faisant allusion à ce mode de conception que M. Raffy reproche aux lettres d'être les *signes de grandeurs*.

Mais le nombre peut, au contraire, être conçu uniquement comme un symbole purement abstrait, n'ayant en quelque sorte aucune existence concrète. Dans ce cas, une catégorie de nombres est définie non en elle-même,. comme formée d'une série d'objets définissables chacun isolément et indépendamment les uns des autres, mais par ses propriétés, par les définitions de l'égalité et des opérations fondamentales irréductibles. Sous cet aspect le nombre n'est plus *le signe d'une grandeur*. Cette façon de concevoir le nombre répugne à l'esprit de Robin :

« On a constitué de la sorte un système cohérent, dans lequel on a cherché et réussi à éviter toute contradiction. Mais les fractions ainsi introduites ne peuvent pas être considérées comme des nombres. »

Peut-être eût-ce été l'occasion favorable de dire au lecteur ce que c'est qu'un *nombre*, au sens que Robin attache à ce mot, car tout ici n'est que convention et il suffit, pour s'entendre, de préciser le sens des termes que l'on emploie.

Malheureusement M. Raffy ne nous donne aucune indication sur le sens *général* que Robin attache à l'idée de nombre et il se contente, en supposant acquise la notion *a priori* du nombre entier, de définir les *objets* qui constituent les *nombres fractionnaires* et *négatifs*.

Cette définition ne diffère que par la forme de la définition classique comme mesure d'une grandeur commensurable avec l'unité. Au lieu de partager l'unité en parties égales, l'auteur groupe des objets égaux pour former l'unité; mais plus loin la nécessité de considérer des fractions à *dénominateur indéfiniment croissant* l'oblige cependant à admettre l'axiome d'Archimède, à savoir que : « Chaque objet peut être considéré comme un groupe formé d'un nombre *illimité* d'autres objets

Digitized by Google

équivalents entre eux. » Ce qui revient à admettre la possibilité du partage en n parties égales, si grand que soit n.

Le nombre fractionnaire positif défini, la notion de *sens* conduit aux nombres négatifs.

En résumé, Robin n'admet comme éléments constitutifs de l'Analyse que les nombres rationnels positifs et négatifs, définis comme mesures ou représentations d'objets commensurables avec l'unité.

En dehors de ces objets il ne connaît pas de *nombre* et ainsi sa conception voisine celle de Kronecker, qui cependant bâtit très différemment son Analyse.

Ce premier point acquis, l'Introduction nous dit :

« En constituant l'Analyse tout entière avec la seule idée de nombre, nous en excluons deux idées qu'on est habitué à y voir intervenir, mais qui sont absolument distinctes de l'idée de nombre et qui, transportées de l'étude des grandeurs, dans le domaine de l'Analyse, ont faussé l'esprit de cette science et l'on fait dévier soit vers des développements relatifs à des grandeurs, soit vers des développements purement verbaux : ce sont les idées d'*infiniment petit* et de *limite.* »

Cette déclaration belliqueuse paraît rouvrir la discussion, de savoir si les idées *philosophiques* et *expérimentales* d'infiniment petit et de limite ont quelque lien avec les *définitions* nettes que l'on donne des mêmes termes en Analyse. Il est tout naturel que le physicien que fut Robin se soit posé cette question; pour un mathématicien pur elle n'a que peu d'intérêt.

La question est d'ailleurs de celles qui sont insolubles, comme toutes celles qui mettent aux prises le concept abstrait pur avec le concret.

Les mathématiciens de nos jours, se dégageant de l'expérience, ont bâti une science formelle, solide et inattaquable, fondée sur une terminologie rationnellement définie. C'est ce formalisme qui déplaît à Robin qui ne veut connaître que des objets tangibles, soumis à l'expérience et à ses imperfections.

L'esprit tout entier du Livre se trouve dans cette citation de l'Introduction :

« Nous ne citerons, pour donner une idée de notre méthode,

Digitized by Google

qu'une question, absolument fondamentale dans les applications de l'Analyse :

» *Trouver un nombre x tel que, si on le connaissait et si l'on faisait sur lui une série d'opérations arithmétiques dont $f(x)$ désignera le résultat, $f(x)$ fût égal à zéro.*

» C'est là ce qu'on appelle *résoudre l'équation* $f(x) = 0$. Or, il est très rare que ce problème soit possible : il n'existe généralement pas de nombre ([1]) répondant à la question proposée. Par contre, il arrive très fréquemment qu'on peut résoudre la suivante :

» *Trouver une suite indéfinie de nombres x_1, x_2, x_3, ... différant entre eux de fractions qui finissent par être aussi petites qu'on veut, tels de plus que les nombres $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., forment une suite dont tous les termes soient inférieurs en valeur absolue à des fractions qui finissent par être aussi petites qu'on veut.* »

C'est clair, Robin ne connaît que les nombres rationnels et substitue à ce que nous appelons un nombre irrationnel, ce que nous nommons ses *valeurs approchées*.

Il reste à savoir si l'on peut, tout en conservant la rigueur qu'on a le droit d'exiger du raisonnement mathématique, aller jusqu'au bout.

Étant donné un nombre (rationnel) x, en général, f étant le symbole d'une fonction quelconque, $f(x)$ est irrationnel ; donc, au sens de Robin, $f(x)$ n'a pas *une* valeur, mais une *infinité* de valeurs qui sont ce que nous appelons les valeurs approchées de $f(x)$.

Le texte dit :

« On représente par $f(x)$ un terme *quelconque*, pris à partir d'un rang *suffisamment élevé* dans l'une des suites qui correspondent à x ; réciproquement on dit que chacune de ces diverses suites *définit* la valeur $f(x)$ de la fonction pour la valeur x de la variable. »

Les deux parties de cet énoncé sont-elles bien d'accord ?

Dans la première, la valeur de $f(x)$ est indéterminée,

([1]) Au sens de Robin, c'est-à-dire *rationnel*.

Digitized by Google

puisque c'est l'une *quelconque* des valeurs lointaines de la suite; dans la seconde il semble qu'on revient au concept classique que l'auteur abhorre, puisqu'il y est dit que *les suites* DÉFINISSENT LA VALEUR de $f(x)$. Il semble donc que dans cette seconde Partie *la valeur* de $f(x)$ ne soit qu'un symbole représentatif d'un ensemble de suites équivalentes.

M. Raffy, en rédigeant les idées de Robin, est-il sûr de s'être dégagé de l'influence des notions acquises et de l'ambiance classique?

Au problème inverse du Calcul des fonctions (p. 73), nous trouvons l'énoncé suivant :

Trouver une suite convergente

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots,$$

telle que les nombres

$$f(x_1), \quad f(x_2), \quad \ldots, \quad f(x_n), \quad \ldots$$

forment une suite convergente ayant pour limite A.

Quels sont dans cet énoncé les *nombres* $f(x_1)$, $f(x_2)$, ...? Puisque $f(x_1)$ a plusieurs valeurs, comment choisir celle qui figurera dans cet énoncé?

On voit, par ces quelques citations, l'esprit de l'Ouvrage et les difficultés qu'une telle méthode a à surmonter. Il ne nous est pas possible, dans une aussi brève analyse, d'entrer dans de plus amples détails; mais le Volume est de ceux qu'il est bon de lire et d'examiner, et nous devons remercier M. Raffy du soin consciencieux qu'il a mis à nous présenter les idées de Robin, mais à sa place nous aurions plutôt intitulé ce Volume : *Application de la méthode des valeurs approchées à la détermination des fonctions.*

CARLO BOURLET.

SUR LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES, par M. *Jules Richard,* professeur au lycée de Dijon. — 1 vol. in-12 de 248 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1903. Prix : 3fr 25.

Ce petit Volume, fort intéressant et d'une lecture facile, n'est pas, et n'a pas la prétention d'être, *un Traité* de la phi-

Digitized by Google

losophie des Mathématiques. C'est une série de Notes les unes assez développées, les autres brèves, sans lien apparent entre elles, sur la philosophie de notre science. A côté de faits connus, de vues empruntées à d'éminents mathématiciens modernes, tels Henri Poincaré et Jules Tannery, l'auteur nous donne quelques aperçus qui sont les fruits de ses réflexions personnelles et qui ne manquent ni de profondeur ni de saveur.

Dans la *première Partie,* M. J. Richard traite de la logique mathématique et analyse, avec beaucoup de finesse, les règles et la puissance du raisonnement.

Suivent des études variées sur la Géométrie, le postulat d'Euclide, l'infini, le continu, l'espace, etc.

Beaucoup de Chapitres sont originaux, mais on voit mal le plan d'ensemble, le fil directeur qui a guidé l'auteur. Peut-être, intentionnellement, a-t-il voulu se contenter de rédiger quelques Notes, prises au cours de travaux scientifiques.

Ce Volume plaira surtout à ceux qui, n'ayant pas encore beaucoup lu, voudront avoir des idées justes sur grand nombre des points où la Mathématique confine à la Philosophie.

Nous ne pouvons qu'en recommander la lecture.

C. B.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1904).

Sujets des compositions.

Mathématiques élémentaires.

On donne, dans un plan, deux points A et A′ et une droite D menée par A; un cercle variable Γ, situé dans ce plan, passe constamment par A et A′. Autour du point variable M où ce cercle rencontre D, on fait tourner la tangente en ce point à Γ d'un angle donné α dans le plan orienté; soit Δ la droite ainsi obtenue.

1° La droite Δ rencontre Γ en un point M′ autre que M; le lieu des points M′ est une droite D′ que l'on construira.


Digitized by Google

Trouver le lieu géométrique de la projection orthogonale du point A′ sur Δ.

2° Démontrer que le lieu géométrique du pôle P de Δ par rapport à Γ est une droite d.

3° Soit d_1 une droite donnée dans le plan; chercher si cette droite peut être regardée comme lieu d du point P, en choisissant convenablement la droite D et l'angle α.

4° Trouver l'enveloppe de d lorsque D tourne autour du point A, l'angle α restant constant.

5° Soit T le triangle dont les sommets sont le point P et les points de rencontre de Δ avec Γ : étudier le déplacement du cercle circonscrit à ce triangle.

Mathématiques spéciales.

On donne un cylindre défini en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y^2 - 2px = 0$$

et un plan dont l'équation est

$$z - by + \lambda(x - ay) = 0.$$

1° Calculer les coordonnées du sommet S de la parabole section du cylindre par plan. Trouver la courbe C lieu géométrique de ce sommet quand λ varie, a et b restant fixes. Montrer que cette courbe possède en général deux points doubles et peut être placée sur deux cônes du troisième ordre.

2° On considère la courbe particulière C′ obtenue en posant

$$a = 1, \qquad b = 0.$$

Quelles sont les relations qui existent entre les valeurs de λ qui correspondent aux points de rencontre de C′ avec un plan arbitraire?

Discuter la réalité des points de rencontre de cette courbe avec un plan osculateur quelconque.

3° Démontrer que, par toute droite tangente en un point A à C′, on peut mener trois plans qui lui soient tangents chacun en un point autre que A; réalité de ces plans.

Les plans bitangents à la courbe C′ se partagent en deux familles; démontrer que les plans de l'une des familles sont

Digitized by Google

tangents au cylindre parabolique et ceux de l'autre famille tangents à une surface du second ordre dont on déterminera le genre.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

On donne deux axes rectangulaires ox et oy; un point C de l'axe oy, d'ordonnée positive h, est le centre d'une circonférence de rayon R située dans le plan xoy. Une droite AB, de longueur constante a, se déplace de façon que son extrémité A reste sur l'axe ox et son extrémité B sur la circonférence. On suppose

$$R < h \quad \text{et} \quad a > R + h.$$

Soient ξ l'abscisse variable du point A, et φ, θ les angles que font respectivement les directions AB et CB avec la direction oy. Soient en outre λ et t les valeurs respectives de $\tan \frac{\varphi}{2}$ et de $\tan \frac{\theta}{2}$.

1° Les paramètres ξ, λ et t satisfont à des relations de la forme

$$\frac{d\xi}{\sqrt{P(\xi)}} = \frac{d\lambda}{\sqrt{Q(\lambda)}} = \frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

où $P(\xi)$, $Q(\lambda)$, $R(t)$ sont trois polynomes du quatrième degré respectivement en ξ, en λ et en t, à coefficients constants. Former ces relations et en déduire les expressions de ξ, λ et t en fonctions elliptiques d'un paramètre u, à l'aide des fonctions sn, cn, dn de Jacobi. On fera en sorte que, dans ces expressions, à la valeur $u = 0$ corresponde la plus grande valeur que peut prendre ξ, lorsque les éléments géométriques de la figure sont tous réels. On discutera les formules obtenues.

2° Exprimer en fonction de u la surface du triangle ABC et le rapport des vitesses des points A et B dans le mouvement de AB.

3° Soient Γ la courbe enveloppe de AB et M le point de contact de AB avec cette enveloppe. Démontrer que la différentielle de l'arc $s = M_0M$ de la courbe Γ, compté à partir d'un

Digitized by Google

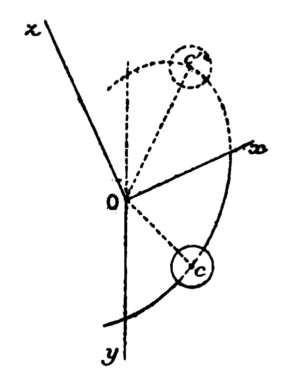
certain point fixe M_0, est donnée par la formule

$$ds^2 = (da_1 - \sin\varphi\, d\xi)^2,$$

où a_1 désigne le segment AM estimé positivement dans le sens AB. Déduire de là l'expression de s en fonction de u.

Mécanique rationnelle.

Soit $Oxyz$ un trièdre trirectangle dont le sommet O est fixe. Le point O est le centre d'un anneau formé par une tige circulaire infiniment mince, sans masse, placée dans le plan xOy et



invariablement liée à ce plan. Deux sphères massives, homogènes, identiques, ayant leurs centres c et c' sur la tige, sont traversées par elle et ne peuvent ainsi que glisser le long de l'anneau; elles sont en outre assujetties, par certaines liaisons, à rester symétriques par rapport à l'axe Ox. On suppose d'ailleurs que ces liaisons sont sans frottement et qu'il en est de même du glissement des sphères sur l'anneau. Enfin, aucune force extérieure n'agit sur le système ainsi constitué.

1° Former les équations différentielles qui déterminent la rotation instantanée du trièdre $Oxyz$ et l'angle u que font avec Ox les droites Oc et Oc'. Indiquer ensuite comment, en supposant ces équations intégrées, on pourra calculer les angles d'Euler qui définissent la position du trièdre relativement à des axes fixes convenablement choisis et comment aussi l'on

Digitized by Google

peut calculer les forces de liaison qui agissent sur chacune des sphères, regardée comme libre.

2° A un certain moment, on introduit brusquement une liaison nouvelle qui fixe invariablement les deux sphères à la tige : déterminer les variations de vitesse qui peuvent se produire, ainsi que les percussions de liaison que subit à ce moment chacune des sphères.

3° La liaison brusquement introduite étant supposée persistante, former les équations différentielles du mouvement du système. Admettant en outre qu'à l'instant de la percussion l'angle u était égal à $\frac{\pi}{4}$, étudier complètement ce mouvement; puis trouver un point de l'anneau tel que si, à une époque ultérieure donnée, on fixe brusquement ce point, le système soit subitement et tout entier immobilisé.

Nota. — On appellera a le rayon de l'anneau, b et m le rayon et la masse de chacune des sphères.

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL ET ANALYSE.

Bordeaux.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Trouver les surfaces, en coordonnées cartésiennes rectangulaires, telles que l'on ait*

$$\cos V = \frac{z}{a},$$

V *étant l'angle que fait la normale au point* x, y, z, *avec l'axe des* z.

2° *Étudier la convergence de la série*

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) + \sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+p} - \frac{1}{p}\right);$$

Digitized by Google

démontrer que

$$f^2 + f' = \text{const.};$$

en déduire

$$f(z) = \pi \cot \pi z.$$

Épreuve pratique. — *Calculer la valeur de l'intégrale*

$$\frac{1}{2i\pi} \int \frac{(z+1)}{z^3(z-1)^2} e^z \, dz,$$

prise le long d'une circonférence ayant l'origine pour centre et un rayon égal à 2. (Novembre 1903.)

Caen.

Épreuve écrite. — *Intégrer l'équation*

$$(y^2 - x^2 + 2zx)\frac{\partial z}{\partial x} + 2y(z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Mode de génération des surfaces représentées par l'intégrale générale en coordonnées rectangulaires. Déterminer celle de ces surfaces qui contient l'ellipse

$$x = 0, \qquad y^2 + 4z^2 = 4a^2$$

et chercher ses lignes de plus grande pente en supposant le plan XOY *horizontal.*

Solution.

Intégrale générale

$$x^2 + y^2 - 2xz = y\,\varphi(z).$$

Les surfaces correspondantes sont engendrées par un cercle dont le plan est parallèle à XOY, dont le centre est dans le plan $z = x$, et qui rencontre l'axe des z. La surface particulière demandée a pour équation

$$(x^2 + y^2 - 2xz)^2 = 4y^2(a^2 - z^2).$$

Ses lignes de niveau se projettent sur XOY suivant des cercles de rayon a passant par l'origine; leurs trajectoires orthogonales sont les projections des lignes de pente.


Digitized by Google

Soient

C le centre d'un des cercles;
OA le diamètre passant au point fixe;
M un point de sa circonférence.

La trajectoire qui passe en M est tangente au rayon MC et l'on a

$$r\frac{d\theta}{dr} = \text{tang}\,\text{OMC} = \text{tang}\,\text{MOA} = \frac{\text{MA}}{\text{MO}} = \frac{\sqrt{4a^2 - r^2}}{r}.$$

(Juillet 1904.)

Lille.

Épreuve écrite. — I. *La fonction $f(z)$ étant supposée uniforme dans tout le plan, démontrer que si l'équation*

$$f(z) = C$$

n'a, pour aucune valeur du second membre, un nombre illimité de racines, $f(z)$ est une fonction rationnelle.

(*Voir*, par exemple, Demartres, *Cours d'Analyse*, IIe Partie, p. 70-71.)

II. 1° *Étant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et un cône de révolution de sommet O et d'axe Oz, déterminer sur ce cône les courbes qui font en chaque point un angle donné i avec la génératrice passant en ce point;*

2° Γ *désignant une de ces courbes, rectifier la courbe Γ, calculer l'aire de la surface du cône limité par Γ et par deux génératrices;*

3° *Calculer le rayon de courbure et le rayon de torsion en un point de Γ; indiquer la relation qui lie ces deux quantités;*

4° *Déterminer les surfaces qui passent par la courbe Γ et qui coupent orthogonalement soit les cônes de révolution de sommet O et d'axe Oz, soit les cylindres de révolution autour de Oz;*

5° *Trouver les lignes asymptotiques de la dernière surface obtenue.*

Digitized by Google

SOLUTION.

1° Soient

α l'angle des génératrices du cône avec xOy;
r, z, ρ les distances d'un point quelconque M de Γ au sommet du cône, au plan xOy et à l'axe Oz;
ds l'arc élémentaire de Γ.

On a

$$dr = ds \cos i.$$

On en déduit que les projections sur xOy des courbes Γ sont les spirales logarithmiques

$$(S) \qquad \rho = a\, e^{\varphi \cot i \cos \alpha}.$$

Comme $\frac{dz}{ds} = \sin\alpha \cos i = \text{const.}$, les courbes Γ sont des hélices tracées sur des cylindres ayant pour sections droites les spirales S;

2° Si M_0 et M sont deux points quelconques d'une courbe Γ, on a

$$\text{arc}\, M_0 M = \frac{OM - OM_0}{\cos i},$$

$$\text{aire}\, M_0 OM = \tan i \left(\overline{OM}^2 - \overline{OM}_0^2\right);$$

3° Γ étant une hélice cylindrique, on a

$$\frac{R}{T} = \text{const.} = \tan\lambda \qquad \text{avec} \qquad \sin\lambda = \sin\alpha \cos i.$$

D'ailleurs

$$R = r \frac{\cos\alpha}{\sin i \cos i \cos\lambda}.$$

Les rayons de courbure et de torsion varient proportionnellement à la distance du point M au sommet du cône;

4° Les surfaces considérées ont respectivement pour équation aux dérivées partielles :

$$(px + qy)z + x^2 + y^2 = 0, \qquad px + qy = 0,$$

et pour équation générale

$$x^2 + y^2 + z^2 = f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad z = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

Digitized by Google

ou, en coordonnées polaires de l'espace,

$$r = F(\varphi), \qquad z = G(\varphi).$$

Celles de ces surfaces qui passent par une courbe Γ sont

$$r = \frac{a}{\cos\alpha} e^{\varphi \cot i \cos\alpha}, \qquad z = a \operatorname{tang}\alpha\, e^{\varphi \cot i \cos\alpha};$$

5° La dernière surface est un conoïde d'axe Oz, dont les asymptotiques sont, avec les génératrices rectilignes, les courbes ayant pour projections sur xOy les spirales logarithmiques

$$\rho = A e^{\frac{1}{2}\varphi \cot i \cos\alpha}.$$

(Juillet 1904.)

Lyon.

Épreuve écrite. — I. *Construire une surface de révolution telle qu'entre les deux rayons de courbure principaux en un point, ρ et ρ', on ait la relation*

$$\rho' = K\rho^m \qquad (K, m = \text{const.}).$$

II. *Former et intégrer l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, qui définit les conoïdes droits.*

III. *Soit*

$$\Omega = \int e^{iz} R(z)\, dz,$$

$z = \rho e^{i\theta}$, *où z varie de façon que* $\rho = \text{const.}$ *et θ varie de* o *à* π. $R(z)$ *est le quotient de deux polynomes en z, où le numérateur a le degré n et le dénominateur a le degré $n+2$. On demande la limite de Ω pour $\rho = \infty$. Appliquer le résultat au calcul de l'intégrale réelle*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{(1+x^2)^3}.$$

(Calcul diff. et intégral, novembre 1903.)

Épreuve écrite. — I. *Addition de la fonction pu.*

II. *Construire la courbe plane* C, *telle que $a^2 = x\rho$, où a est une constante, ρ le rayon de courbure, x l'abscisse.*

Digitized by Google

Coordonnées rectangulaires. Par hypothèse, C *passe par l'origine et* y *fait un angle donné avec l'axe des* x.

III. *Construire la surface*

$$\begin{aligned} x &= 9u^2 - 12uv + 14v^2 + 14v, \\ y &= 5u^2 - 2uv + 14u, \\ z &= 6u^2 + 6uv + 7v^2 + 42u + 28v. \end{aligned}$$

(Analyse, novembre 1903.)

Montpellier.

Épreuve écrite. — *Une surface étant rapportée à trois axes rectangulaires, le plan tangent au point* $M(x, y, z)$ *coupe l'axe* OZ *au point* T, *et le plan* XOY *suivant la droite* AB.

1° *Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces* S *telles que* $OT = a \times z$, *où* a *est une constante donnée;*

2° *Intégrer l'équation obtenue et former l'équation générale des surfaces* S;

3° *Soit* P *la projection de* M *sur le plan* XOY. *Déterminer la fonction arbitraire, qui entre dans l'équation des surfaces* S, *de façon que la droite* AB *forme avec* OP *un angle constant;*

4° *Déterminer les lignes asymptotiques de ces dernières surfaces.*

Épreuve pratique. — *On considère la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$\begin{aligned} x &= 3z^2, \\ y &= 6z^3. \end{aligned}$$

Trouver les expressions de la courbure et de la torsion en chaque point de la courbe, en fonction de z. *Prouver que la courbe est une hélice tracée sur un certain cylindre. Quel est ce cylindre?* (Juillet 1904.)

Rennes.

Épreuve écrite. — I. *On considère l'intégrale*

$$U_n(x) = \int_0^1 (1 - t^2)^{n-1} \cos(tx)\, dt,$$

Digitized by Google

où n désigne une constante au moins égale à 1 *et où t, x désignent des variables réelles indépendantes.*

1° *Établir la relation*

$$\frac{d^2 U_n}{dx^2} + U_n = U_{n+1},$$

puis, à l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'on a

$$U_{n+1}(x) = -\frac{2n}{x}\frac{d}{dx}[U_n(x)]$$

et que la fonction $U_n(x)$ *est une solution de l'équation différentielle*

$$(E_n) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0;$$

2° *n n'étant plus assujettie à la condition* $n \geqq 1$, *vérifier, en différentiant l'équation* (E_n), *que, si y est une solution de* (E_n), *la fonction* $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}$ *est une solution d'une équation différentielle de même forme* (E_{n+1}).

Montrer que l'on peut, par un calcul de proche en proche, obtenir l'intégrale générale de (E_n), *dans le cas où n est un nombre entier et positif;*

3° *Démontrer que si y est une solution de l'équation différentielle* (E_n), *la fonction z définie par l'égalité*

$$y = z x^{1-2n}$$

est une solution d'une équation différentielle de même forme $(E_{(1-n)})$;

4° *Déterminer les coefficients* $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ *des séries*

$$1 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots + a_p x^{2p} + \ldots,$$
$$x^{1-2n}(1 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \ldots + b_p x^{2p} + \ldots),$$

de façon que les fonctions définies par ces séries soient deux solutions de l'équation différentielle (E_n).

II. 1° *On donne la courbe* (C) *de l'espace et sa projection orthogonale* (C_1) *sur le plan* xOy. *On appelle* R *le rayon de courbure de* (C) *en un point* M *et* R_1 *le rayon de courbure de* (C_1) *au point* M_1 *projection de* M.

Digitized by Google

Démontrer que l'on a la relation

$$\frac{R_1}{R} = \frac{\cos^2 i}{\cos I},$$

i et I *étant les angles de la tangente et du plan osculateur en* M *à* (C) *avec le plan* Oxy ;

2° *En remarquant que* (C) *et* (C_1) *sont tracées sur un même cylindre, en utilisant le théorème de Meusnier et les propriétés de l'indicatrice de Dupin, ne peut-on pas obtenir une relation entre* R *et* R_1 ?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère le conoïde droit qui, rapporté à trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *a pour équation*

$$z = \frac{cy}{\pm\sqrt{a^2 - x^2}},$$

et l'on demande de calculer :

1° *L'aire* $A(z_1)$ *de l'ellipse suivant laquelle la surface est coupée par le plan* $z = z_1$;

2° *Le volume du solide limité par la surface et par les plans* $z = 0$, $z = c$;

3° *L'intégrale*

$$\int_0^c z^2 A(z)\, dz;$$

4° *Les intégrales doubles*

$$\int\int x^2(c - z)\, dx\, dy, \quad \int\int y^2(c - z)\, dx\, dy$$

étendues à la région du plan qui est située à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, *et dans l'angle des coordonnées positives.* (Juillet 1904.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Construire les courbes qui, rapportées à deux axes de coordonnées* Ox, Oy, *vérifient l'équation différentielle*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2}{y^3} - \frac{2}{y^5}.$$

Digitized by Google

II. *On considère le paraboloïde représenté par les équations*

$$x = mu,$$

$$y = \frac{v}{m},$$

$$z = mau^2 + \frac{b}{m} v^2,$$

qui déterminent les coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z *d'un de ses points en fonction de deux paramètres* u *et* v *et dans lesquelles* a, b, m *sont trois constantes réelles.*

Exprimer en fonction de u *et* v *l'inverse* k *du produit des rayons de courbure principaux; montrer que* k *ne dépend pas de* m, *mais seulement de* a, b, u, v. *Supposant que* u, v *prennent des valeurs déterminées* u_0, v_0 *différentes de zéro, déterminer* a *et* b *de façon que* k *soit maximum; montrer que la valeur correspondante de l'expression* k *est la plus grande des valeurs qu'elle peut prendre lorsque* a *et* b *varient,* u *et* v *conservant leurs valeurs* u_0 *et* v_0.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_2^{+\infty} \frac{(x^4+1)\,dx}{(x^2+4)^2(x-1)^3}.$$

(Juillet 1904.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1930.

(1902, p. 288.)

x_1 *étant une racine de l'équation*

(1) $$x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0,$$

$2 - x_1^2$ *en est une autre.* (A. PELLET.)

SOLUTION

Par M. AUDIBERT.

Si l'on pose $z = 2 - x^2$ ou $x = \pm(2-z)^{\frac{1}{2}}$, la transformée en z s'annulera pour $z = 2 - x_1^2$.

La substitution donne sans ambiguïté l'égalité

$$[(2-z)^2-4(2-z)+1]^2=+\left[4(2-z)^{\frac{1}{2}}-(2-z)^{\frac{3}{2}}\right]^2,$$

et la réduction de cette formule conduit à l'équation

$$z^4+z^3-4z^2-4z+1=0,$$

identique à (1).

Autres solutions par MM. Frizac, N. Plakhowo et Ruïs y Cazas.

1939.

(1902, p. 479.)

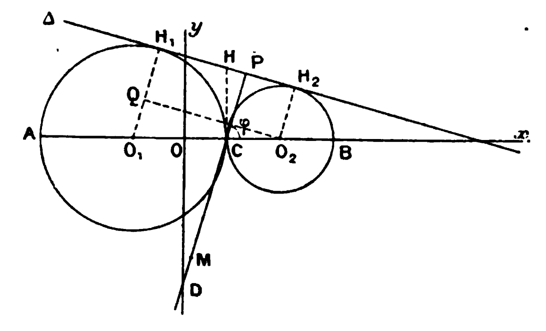
Soient A *et* B *deux points fixes,* C *un point du segment* AB, Δ *une tangente commune aux cercles de diamètres* CA *et* CB, P *la projection de* C *sur* Δ :

1° *La droite* CP *enveloppe l'hypocycloïde à quatre rebroussements dont deux sont en* A *et* B.

2° *Le point* P *décrit une développante de cette hypocycloïde.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION
Par M. A.-H. Couvert.

1° Soient O, O_1, O_2 les milieux de AB, AC, BC. Menons les



rayons de contact O_1H_1 et O_2H_2, et par O_2 menons O_2Q parallèle à Δ. Soit enfin D le point où CP rencontre la perpendiculaire Oy à AB. Les angles $\widehat{O_1O_2Q}$ et $\widehat{ODC}$ sont égaux comme

ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires. D'autre part :

$$OC = \frac{AC - CB}{2} = \frac{AC}{2} - \frac{CB}{2} = O_1H_1 - O_2H_2 = O_1Q.$$

Les deux triangles rectangles OCD et O_1O_2Q sont donc égaux. Il s'ensuit que les hypoténuses sont égales. Donc :

$$CD = O_1O_2 = \frac{AB}{2} = \text{const.}$$

La droite CD de longueur constante, dont les extrémités se déplacent sur deux droites rectangulaires, enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements. Les deux rebroussements situés sur AB sont bien A et B puisque

$$OA = OB = CD.$$

2° Soit M le point de contact de CP avec son enveloppe. Nous savons que l'arc BM d'hypocycloïde a pour valeur $\frac{3}{2}a\sin^2\varphi$ en posant $CD = a$ et appelant φ l'angle de CD avec AB.

Mais d'après la théorie du centre instantané ce contact M se trouve au pied de la perpendiculaire abaissée du sommet du rectangle de côtés contigus OC, OD opposé à O sur CD. On voit donc que

$$MC = a\sin^2\varphi.$$

Menons CH tangente commune en C; nous avons

$$CH = \frac{H_1H_2}{2} = \frac{O_2Q}{2} = \frac{a}{2}\sin\varphi$$

et

$$CP = CH\sin\varphi = \frac{a}{2}\sin^2\varphi.$$

Par suite :

$$MP = MC + CP = a\sin^2\varphi + \frac{a}{2}\sin^2\varphi = \frac{3}{2}a\sin^2\varphi = \text{arc}\,BM,$$

MP étant égal à l'arc BM, le point P décrit une développante de l'hypocycloïde.

Autre solution par M. AUDIBERT.

Digitized by Google

1984.

(1903, p. 528.)

On donne un cercle de centre O *et un point* A. *Soient* M *un point du plan et* B *un des points de rencontre de* OM *avec le cercle. Le lieu des points* M *tels que* $\frac{MA}{MB} = \frac{OA}{OB}$ *est un limaçon de Pascal.* (E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Lez.

On voit facilement que le lieu des points M est une conchoïde de cercle ou un limaçon de Pascal, suivant que le point A est à l'extérieur ou à l'intérieur du cercle O.

En effet, prenant pour axe des X la droite OA et pour axe des Y une perpendiculaire passant par le centre O, si $OA = d$, $OB = r$, on a

$$OM = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad MB = OM \pm r = \sqrt{x^2+y^2} \pm r$$

et

$$AM = \sqrt{y^2+(d-x)^2};$$

par suite

$$\frac{\sqrt{y^2+(d-x)^2}}{\sqrt{x^2+y^2} \pm r} = \frac{d}{r}.$$

Réduisant, on trouve pour le lieu des points M

$$(r^2-d^2)(x^2+y^2) - 2dr^2x = \pm 2d^2r\sqrt{x^2+y^2}$$

ou

$$\left(x^2+y^2-\frac{2dr^2x}{r^2-d^2}\right)^2 = \frac{4d^4r^2}{(r^2-d^2)^2}(x^2+y^2).$$

Or cette équation est celle d'une conchoïde

$$(x^2+y^2-bx)^2 = a^2(x^2+y^2),$$

dans laquelle on a

$$b = \frac{2dr^2}{r^2-d^2}, \qquad a = \frac{2d^2r}{r^2-d^2}.$$

Autre solution par M. H. Couvert.

Digitized by Google

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

MÉTHODOLOGIE ET ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT. — PHILOSOPHIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES. — CHRONIQUE SCIENTIFIQUE. — MÉLANGES. — BIBLIOGRAPHIE.

REVUE INTERNATIONALE PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS,

DIRIGÉE PAR

C.-A. LAISANT,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique de Paris.

H. FEHR,
Professeur à l'Université de Genève et au Gymnase.

AVEC LA COLLABORATION DE

A. BUHL,
Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Prix de l'abonnement annuel : Union postale........... **15** fr.

INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS (L'), dirigé par *C.-A. Laisant*, Docteur ès Sciences, Examinateur à l'École Polytechnique, et *Émile Lemoine*, Ingénieur civil, ancien Élève de l'École Polytechnique, avec la collaboration de *Ed. Maillet*, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique, et de *A. Grévy*, Docteur ès Sciences, ancien Élève de l'École Normale, Professeur au Lycée Saint-Louis. In-8, mensuel. Tome XI; 1904.

L'abonnement est annuel et part de Janvier.

Prix pour un an (12 NUMÉROS) :

Paris, 7 fr. — Départements et Union postale, 8 fr. 50.

Les années précédentes sauf le Tome I (1894) se vendent chacune, 7 fr.

MM. Laisant et Lemoine ont eu l'heureuse idée de mettre en rapport scientifique les mathématiciens, au moyen d'un organe international dont le titre, *Intermédiaire des Mathématiciens*, indique le but. Ce recueil mensuel, qui paraît depuis janvier 1894, n'admet d'autres articles que des questions posées par les mathématiciens à leurs collègues, soit pour en indiquer l'intérêt général, soit pour les besoins de leurs recherches personnelles, et les réponses à ces questions. La Mathématique est si vaste maintenant que nul n'en connaît complètement même une des branches, et qu'une question de détail (science, histoire, bibliographie) peut arrêter longtemps un savant de premier ordre, si ce détail sort du cadre de ses études ordinaires, tandis qu'elle ne serait qu'un jeu pour un autre.

Cette publication répond évidemment à un besoin, car elle a reçu, dès le principe, l'accueil le plus empressé dans le monde scientifique.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Août 1904.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

DARBOUX (Gaston), Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences et Professeur de Géométrie supérieure à l'Université de Paris. — **Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes.** Deux volumes grand in-8, se vendant séparément :

Tome I : Volume de IV-338 pages avec figures; 1898 .... 10 fr.

Tome II .... (*En préparation.*)

HALPHEN (G.-H.), Membre de l'Institut. — **Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.** 3 volumes grand in-8, se vendant séparément.

Ire Partie : *Théorie des fonctions elliptiques et de leur développement en séries*; 1886 .... 15 fr.

IIe Partie : *Applications à la Mécanique, à la Physique, à la Géodésie, à la Géométrie et au Calcul intégral*; 1888 .... 20 fr.

IIIe Partie : *Fragments.* (*Quelques applications à l'Algèbre et en particulier à l'équation du 5e degré. Quelques applications à la théorie des nombres. Questions diverses.*) Publié par les soins de la Section de Géométrie de l'Académie des Sciences; 1891 .... 8 fr. 50 c.

?77 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

Digitized by Google

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès Sciences,

Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,

Docteur ès Sciences,

Professeur au lycée Saint-Louis.

R. BRICARD,

Ingénieur des Manufactures de l'État,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,

ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME IV.

SEPTEMBRE 1904.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris,

à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,

ou à M. BOURLET, 21, avenue de l'Observatoire, 14e,

ou à M. BRICARD, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Digitized by Google

Rédacteur de service : M. R. Bricard.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences.

Besançon : M. Ét. Delassus. — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Duport. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. — Montpellier : M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers : M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

CHAPPUIS (**J.**), Agrégé, Docteur ès Sciences, Professeur de Physique générale à l'École Centrale des Arts et Manufactures, et **BERGET** (**A.**), Docteur ès Sciences, attaché au laboratoire des Recherches physiques à la Sorbonne. — **Cours de Physique**, *à l'usage des Candidats aux Écoles spéciales* (conforme aux derniers programmes). Un beau volume grand in-8 de IV-697 pages, avec 465 figures; 1898.

Broché.............. 14 fr. | Relié (cuir souple).. 17 fr.

INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS (**L'**), dirigé par *C.-A. Laisant*, Docteur ès Sciences, Examinateur à l'École Polytechnique, et *Émile Lemoine*, Ingénieur civil, ancien Élève de l'École Polytechnique, avec la collaboration de *Ed. Maillet*, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique, et de *A. Grévy*, Docteur ès Sciences, ancien Élève de l'École Normale, Professeur au Lycée Saint-Louis. In-8, mensuel. Tome XI; 1904.

L'abonnement est annuel et part de Janvier.

Prix pour un an (12 NUMÉROS) :

Paris, 7 fr. — Départements et Union postale, 8 fr. 50.

Les années précédentes sauf le Tome I (1894) se vendent chacune. 7 fr.

MM. Laisant et Lemoine ont eu l'heureuse idée de mettre en rapport scientifique les mathématiciens, au moyen d'un organe international dont le titre, *Intermédiaire des Mathématiciens*, indique le but. Ce recueil mensuel, qui paraît depuis janvier 1894, n'admet d'autres articles que des questions posées par les mathématiciens à leurs collègues, soit pour en indiquer l'intérêt général, soit pour les besoins de leurs recherches personnelles, et les réponses à ces questions. La Mathématique est si vaste maintenant que nul n'en connaît complètement même une des branches, et qu'une question de détail (science, histoire, bibliographie) peut arrêter longtemps un savant de premier ordre, si ce détail sort du cadre de ses études ordinaires, tandis qu'elle ne serait qu'un jeu pour un autre.

Cette publication répond évidemment à un besoin, car elle a reçu, dès le principe, l'accueil le plus empressé dans le monde scientifique.

Digitized by Google

RAPPORT DE M. APPELL SUR L'ENSEIGNEMENT DANS LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES (1).

Les grandes Écoles qui prennent, comme base de leurs programmes d'examen, le programme de Mathématiques spéciales ont actuellement des exigences discordantes : c'est ainsi que certaines questions figurant au programme de l'École Polytechnique ne figurent pas au programme de l'École centrale et inversement. Ces divergences n'ont pas grand inconvénient pour les élèves des lycées de Paris où se trouvent des classes préparant directement aux diverses Écoles; mais, dans les lycées des départements, il y a souvent quelques élèves seulement se préparant à une École déterminée : on ne peut alors faire un enseignement particulier pour chaque groupe d'élèves et les moins nombreux sont nécessairement sacrifiés. Il arrive, en outre, que beaucoup de jeunes gens se préparent à deux ou même à plusieurs Écoles à la fois : avec des programmes trop divergents, leur travail devient très difficile.

Il y a donc un intérêt évident à ce que les Écoles

(1) N. D. L. R. — Une Commission interministérielle, dite *Commission des grandes Écoles,* s'est réunie dans le courant de l'année scolaire 1903-1904 pour la création d'un programme d'études applicable à la classe de Mathématiques spéciales. On sait que, jusqu'à ce jour, les études étaient uniquement dirigées, dans cette classe, par les programmes d'admission aux grandes Écoles scientifiques.

Cette réforme semble marquer une étape importante dans l'enseignement scientifique français : nous avons donc pensé que nos lecteurs liraient avec intérêt le Rapport de M. Appell, qui indique nettement l'esprit dans lequel la Commission a élaboré le nouveau programme : quant à ce programme même, il est reproduit dans le *Supplément* du présent numéro.

Digitized by Google

prenant comme base la classe de mathématiques spéciales aient le *même programme*, ou, du moins, qu'il existe un programme d'enseignement *unique*, formant en quelque sorte le programme maximum dans lequel chaque École prendrait ses programmes d'admission, sans y introduire aucune question nouvelle de Spéciales et sans en altérer l'esprit général. C'est ce programme d'enseignement que la Sous-Commission a établi; mais elle a admis qu'une École pourrait joindre, à son programme d'examens, des matières prises dans les programmes d'enseignement des classes des lycées autres que celle de Mathématiques spéciales.

L'existence d'un programme d'enseignement de ce genre se justifie, en outre, par une considération du plus haut intérêt social. Dans les concours pour les diverses Écoles, s'il y a beaucoup d'appelés, il y a peu d'élus : les candidats qui n'ont pas réussi, après deux ou même trois années de préparation, sont obligés de chercher des carrières dans l'industrie, soit directement, soit en passant par l'enseignement supérieur. Pour que les années préparatoires passées au lycée ne soient pas perdues, il faut que l'enseignement des lycées, au lieu de porter sur une partie seulement des connaissances fondamentales qu'on suppose devoir être complétées plus tard dans les Écoles, forme un ensemble ayant une portée éducative et scientifique.

C'est dans cet esprit que la Sous-Commission de Mathématiques spéciales a poursuivi ses travaux et rédigé les programmes qu'elle soumet à l'approbation de la Commission.

Tout d'abord, elle en a écarté les questions présentant un caractère technique, tout en s'efforçant de donner aux élèves l'instrument scientifique indispensable aux applications : elle en a écarté également tous

Digitized by Google

les développements trop rigoureux et systématiques touchant aux principes, qui ne peuvent être entièrement compris que par des esprits mûrs ayant une certaine pratique de la science; enfin elle en a fait disparaître à peu près complètement les théories de l'enseignement mathématique supérieur, comme la théorie des courbes algébriques qui se présente sous son véritable jour alors seulement qu'on peut faire ressortir les liaisons profondes de cette théorie avec celle des formes algébriques et des transcendantes abéliennes.

Les principaux changements effectués dans le programme de mathématiques portent sur les deux points suivants : simplification de la Géométrie analytique, développement de l'Analyse mathématique. En Géométrie analytique, la Commission a cherché à faire disparaître autant que possible l'emploi des formules générales relatives aux courbes et aux surfaces du second ordre rapportées à des axes quelconques; elle a réduit à très peu de chose les notions sur les courbes algébriques. En Analyse, elle a ajouté les chapitres qui sont d'un usage courant en Géométrie infinitésimale, en Mécanique et en Physique, comme les séries entières, les quadratures dans les cas les plus simples, les équations différentielles du premier ordre immédiatement intégrables, les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants. En un mot, la Sous-Commission a cherché à développer l'enseignement dans le sens même dans lequel l'immense majorité des élèves de spéciales seront appelés à se diriger, dans les carrières qu'ils pourront rechercher.

Mais il faut bien avouer que l'œuvre de la Commission resterait stérile sans le concours des hommes qui seront chargés de donner la vie aux programmes, de les

Digitized by Google

enseigner ou d'en contrôler l'enseignement, c'est-à-dire sans le concours des professeurs et surtout des examinateurs.

Aussi la Commission a-t-elle jugé indispensable d'accompagner le programme de quelques commentaires et de le compléter par des vœux ayant pour but de préciser l'esprit qu'elle désire voir introduire dans l'enseignement et dans les examens.

Enseignement. — Les professeurs resteront maîtres de l'ordre dans lequel ils enseigneront les diverses questions du programme. Il leur est recommandé de ne pas charger les cours, de faire grand usage de livres, de ne pas abuser des théories générales, de n'exposer aucune théorie sans en faire de nombreuses applications poussées jusqu'au bout, de commencer habituellement par les cas les plus simples, les plus faciles à comprendre, pour s'élever ensuite aux théorèmes généraux. Parmi les applications d'une théorie mathématique, il conviendra de préférer celles qui se présentent en Physique, celles que les jeunes gens rencontreront plus tard dans le cours de leurs études soit théoriques, soit pratiques : c'est ainsi que, dans la construction des courbes, il conviendra de choisir comme exemples des courbes qui se présentent en Physique et en Mécanique, comme les courbes de Van der Waals, la cycloïde, la chaînette, etc., que, dans la théorie des enveloppes, il conviendra de prendre comme exemples les enveloppes qui se rencontrent dans la théorie des engrenages cylindriques, et ainsi de suite. Les élèves devront être interrogés en classe, exercés aux calculs numériques, habitués à raisonner directement sur les cas particuliers et non à appliquer des formules. En résumé, on devra développer leur jugement et leur initiative, non leur mémoire.

Digitized by Google

Nous allons maintenant passer en revue le programme pour préciser certains points.

Algèbre et Analyse. — Le professeur devra éviter de s'étendre sur les nombres incommensurables ; il lui suffira d'en donner des exemples précis en montrant comment on peut définir $\sqrt{2}$ par la notion de coupure. Par exemple, pour définir $\sqrt{2}$, on divise les nombres commensurables en deux classes, ceux dont le carré est inférieur à 2, et ceux dont le carré est supérieur à 2 ; la coupure entre ces deux classes définit $\sqrt{2}$. Quant aux opérations sur les incommensurables, le professeur pourra admettre qu'elles sont soumises aux mêmes règles que les opérations élémentaires de l'Arithmétique. Le professeur devra s'abstenir de toute théorie générale sur la notion de limite et se contenter de faire comprendre cette notion sur les exemples mêmes que fournit le programme.

Dans la résolution des équations du premier degré, on devra habituer les élèves à raisonner directement sur des équations numériques, à les résoudre et à les discuter sans employer les déterminants ; ceux-ci devront servir ensuite à donner à la théorie sa forme la meilleure.

Pour les séries, on se bornera à celles dont la convergence ou la divergence peuvent s'établir par l'application directe des règles indiquées au programme ; on en fera de nombreuses applications numériques, et l'on donnera aux élèves l'idée du plus ou moins de rapidité de la convergence, en leur faisant calculer une limite de l'erreur commise quand on prend un nombre déterminé de termes.

Dans la théorie des fonctions d'une variable réelle, on s'abstiendra de toute complication pour la notion de

Digitized by Google

continuité; on n'envisagera que des fonctions continues ayant une dérivée. On emploiera, partout où il sera possible, les représentations graphiques : signification géométrique de la dérivée, du signe de la dérivée seconde, du théorème des accroissements finis, du théorème de Rolle; relations qui existent entre les courbes représentatives d'une fonction et de ses dérivées première et seconde. Enfin la notion de la fonction primitive d'une fonction $f(x)$ sera obtenue en remarquant que l'aire d'un segment de la courbe $y = f(x)$ est une fonction ayant pour dérivée $f(x)$.

Une innovation importante est l'introduction des séries entières qui sont d'un usage constant dans les applications et qui forment, en même temps, la base de la théorie moderne des fonctions. L'importance de ces séries résulte de ce que, dans l'intervalle de convergence, on peut les multiplier, les diviser, les dériver, les intégrer comme des polynomes. Il est d'ailleurs expressément recommandé de ne pas se préoccuper des difficultés qui se présentent aux limites de l'intervalle de convergenee. Pour exercer les élèves au maniement de ces séries, on en fera des applications nombreuses, principalement à l'intégration d'équations différentielles linéaires par la méthode des coefficients indéterminés. C'est ainsi que le développement des fonctions

$$y = e^x, \qquad y = (1 + x)^m$$

s'obtient facilement si l'on remarque que ces fonctions sont respectivement caractérisées par les équations

$$y = y, \qquad (1 + x)y' = my,$$

avec la condition $y = 1$ pour $x = 0$.

Pour la formule de Taylor on se bornera à la seule forme du reste indiquée au programme, et on laissera

Digitized by Google

complètement de côté les méthodes que l'on employait pour obtenir les développements de

$$L(1+x), \quad \text{arc tang} x, \quad (1+x)^m,$$

en prenant comme point de départ l'expression analytique du reste.

Dans la théorie des équations algébriques, on n'a laissé subsister que les théorèmes les plus essentiels. On a indiqué l'élimination par les fonctions symétriques; mais il ne devra être soulevé aucune difficulté pour le cas des racines infinies, et l'on devra s'abstenir de donner la valeur de la racine commune par la méthode des fonctions symétriques, la véritable méthode pratique étant l'emploi du plus grand commun diviseur. Pour les équations à coefficients réels, de nombreuses applications numériques et graphiques doivent être faites, surtout à des équations du troisième degré.

Différentielles et intégrales. — Les élèves étant habitués à la notion de dérivée, on définira la différentielle *première* d'une fonction d'une variable et la différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables, en insistant sur ce fait que la forme

$$f'_x\, dx + f'_y\, dy + \ldots$$

se conserve par un changement de variables.

Les notions d'intégrale définie et de valeur moyenne d'une fonction seront rattachées aux représentations graphiques : on regardera l'aire comme une notion première.

En demandant l'intégration des différentielles rationnelles et de celles qui s'y ramènent, on a entendu demander l'intégration des différentielles rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$, ou en $\sin x$ et $\cos x$. On devra

Digitized by Google

surtout traiter des exemples numériques de ces quadratures. Indépendamment des méthodes générales, les élèves devront être exercés au calcul direct d'intégrales numériques des formes usuelles :

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c\,dx} \quad \text{ou} \quad \int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c},$$

$$\int \cos^m x \sin^p x\,dx \qquad (m \text{ et } p \text{ entiers}).$$

On trouvera dans la rectification des courbes, le calcul des volumes, des aires planes et courbes, des moments d'inertie, des centres de gravité, de nombreux exemples *d'intégrales simples* dans lesquels les calculs pourront et devront être faits complètement jusqu'à la fin.

De même les équations différentielles du premier ordre donneront lieu à de nombreuses applications numériques accompagnées d'interprétations géométriques. Enfin, l'intégration des équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants sera appliquée à des exemples tirés de la Mécanique et de la Physique.

Applications numériques. — Les applications numériques ont été réunies dans un paragraphe spécial. Dans cette partie du cours, on donnera surtout l'idée des méthodes pratiques pour la séparation et la détermination approchée des racines. Une équation de la forme

$$f(x) - \varphi(x) = 0$$

pourra être résolue approximativement par l'intersec-

Digitized by Google

tion des courbes

$$y = f(x), \qquad y = \varphi(x).$$

On prendra comme exemples des équations qui se rencontrent dans les applications comme

$$\operatorname{tang} x - kx = 0, \qquad x - e \sin x = nt, \qquad \ldots.$$

L'extension de la méthode de Newton à la résolution de deux équations simultanées ne devra pas donner lieu à des développements théoriques, mais seulement à quelques applications numériques; connaissant les valeurs approchées a et b des coordonnées d'un point de rencontre des courbes

$$f(x, y) = 0, \qquad \varphi(x, y) = 0,$$

on appellera

$$x = a + h, \qquad y = b + k$$

leurs valeurs exactes et l'on calculera approximativement h et k, par les deux équations linéaires

$$f(a, b) + hf'_a + kf'_b = 0,$$
$$\varphi(a, b) + h\varphi'_a + k\varphi'_b = 0.$$

Les méthodes d'approximation ne devraient pas être demandées à l'examen oral, où le temps manque pour faire effectivement les calculs numériques; elles devraient former le sujet d'une au moins des compositions écrites, où les candidats seraient appelés à les appliquer à des exemples.

Géométrie analytique. — On a cherché à simplifier le programme en ce qui touche la construction des courbes, de façon à se rapprocher des conditions qui se

Digitized by Google

présentent le plus fréquemment dans les applications; pour cela on a divisé la question en trois parties :

a. Étude des courbes définies par une équation qui peut être résolue explicitement par rapport à y; ce cas est très fréquent dans la pratique.

b. Étude des courbes telles que les coordonnées d'un de leurs points soient exprimées en fonction d'un paramètre; ce cas se présente constamment en Cinématique.

c. Courbes définies par une équation implicite et, en particulier, courbes algébriques. Cette dernière partie a été, comme nous l'avons déjà dit, très réduite. On a entendu supprimer toutes les théories générales sur les courbes algébriques; on a notamment voulu supprimer toutes les théories relatives à l'étude d'une courbe algébrique dans le voisinage d'un point multiple à distance finie ou infinie, toutes les formules générales relatives aux asymptotes, les questions relatives à la hessienne, à la recherche des points de contact des tangentes issues d'un point, aux applications plus ou moins déguisées des formules de Plücker. On devra se borner à l'équation de la tangente en un point simple à distance finie ou infinie, à l'équation des tangentes en un point simple ou double situé à l'origine. La recherche des asymptotes et le tracé de la courbe devront être donnés seulement sur des exemples numériques de courbes du deuxième et troisième degré. De cette façon disparaissent des théories qui avaient donné lieu à de nombreux et vastes développements.

Une autre simplification est relative à l'étude des courbes et des surfaces de second ordre. Pour l'étude de ces courbes et surfaces sur les équations réduites, on devra, dans le cours, se borner aux propriétés essentielles indiquées au programme et laisser de côté les questions qui chargent la mémoire des élèves, comme

Digitized by Google

la construction des axes d'une conique à centre dont on connaît deux diamètres conjugués, la recherche des diamètres conjugués égaux dans l'ellipsoïde, etc.

On a également cherché à supprimer tout abus dans les problèmes relatifs aux coniques et quadriques représentées par l'équation littérale la plus générale. C'est ainsi que l'indication relative à l'emploi de la méthode de décomposition en carrés à des coniques ou des quadriques définies par des équations *numériques*, a pour but d'empêcher le calcul des coefficients de la décomposition en fonction des coefficients littéraux de l'équation générale. De même on a donné, comme but unique de la recherche des directions principales d'une quadrique, la possibilité de faire disparaître les termes rectangles de l'équation de la surface, par un changement de l'orientation des axes rectangulaires. Cette recherche ne doit donner lieu, pour les quadriques représentées par l'équation générale, à aucune question sur les plans principaux, les axes de symétrie, les plans cycliques, les conditions de révolution. Une fois les rectangles disparus par le changement d'orientation des axes, on devra chercher à simplifier l'équation par la translation des axes; la mention expresse, qui en est faite dans le programme, a pour but d'empêcher les développements sur les invariants des formes quadriques en général et, plus particulièrement, de supprimer l'emploi de certains invariants relatifs à des formes spéciales.

L'introduction des éléments à l'infini et des éléments imaginaires dans le programme a eu pour but de préciser les points que les professeurs devront enseigner et d'éviter les développements excessifs qui ont été quelquefois donnés à ces considérations. On n'a pas voulu exclure de l'enseignement un outil commode, dont

Digitized by Google

l'usage est maintenant devenu familier; mais il est nécessaire qu'on n'en abuse pas : c'est dans le sens du réel que la Géométrie analytique doit être développée. Ces théories ne devront pas donner lieu à d'autres applications que celles qui sont indiquées dans le texte.

Géométrie descriptive. — Le programme actuel a été peu modifié; on y a ajouté, à titre de revision, des applications de Géométrie projective empruntées au programme de Mathématiques A; il importe, en effet, que la Géométrie descriptive ne soit pas réduite au procédé de représentation que l'on doit à Monge; à l'étranger on la conçoit d'une façon beaucoup plus large. Les applications de l'homographie devront être faites d'après l'enseignement donné dans le cours de Géométrie analytique; elles ne devront pas donner lieu à des développements nouveaux.

Dans les questions d'intersections de surfaces, on devra s'en tenir aux indications du programme et ne pas introduire, dans des problèmes graphiques, des développements théoriques qui ne se trouveraient pas dans le programme de Géométrie analytique.

Mécanique. — En Mécanique, il ne sera soulevé aucune difficulté sur les principes, comme l'indique le programme. Dans cette partie du cours, les élèves acquerront les notions de cinématique et de dynamique indispensables à l'enseignement de la Physique dont l'importance industrielle grandit chaque jour; c'est pour cette raison qu'on a introduit les notions de champ de forces, de lignes de forces qui sont d'un usage constant dans la théorie de l'attraction et dans les théories électriques ou magnétiques.

Dans l'étude des mouvements produits par des forces

Digitized by Google

centrales, on se bornera aux deux lois indiquées au programme : on sera conduit naturellement à démontrer le théorème des aires.

En Statique, on a introduit le frottement pour se rapprocher de la réalité et donner aux débutants le moyen de résoudre des problèmes réels.

Enfin, pour appliquer les règles de la Statique à des exemples pratiques, on a demandé l'équilibre de quelques machines simples qu'il faudrait montrer aux élèves et faire fonctionner devant eux. On a cherché à les pénétrer de cette notion fondamentale qu'on ne peut pas créer de travail, en leur demandant de vérifier, sur chaque machine simple, que si cette machine est en équilibre sans frottement et, si l'on vient à la déplacer infiniment peu, le travail élémentaire de la puissance est égal et de signe contraire à celui de la résistance.

Dans cette partie du programme, comme dans les autres, on devra poser aux élèves des problèmes précis, avec des données numériques de façon à habituer les débutants aux divers systèmes d'unités. On y trouvera de nombreuses occasions de faire des applications du système métrique, de résoudre des problèmes familiers d'équilibre et de mouvement. On devra éviter l'abus de l'appareil analytique, des axes de coordonnées, et exercer les élèves à raisonner directement sur chaque question.

Physique. — L'enseignement devra être aussi expérimental que possible.

La question de la pesanteur et du pendule devra être traitée dans un esprit différent de celui des autres parties du programme. Ce chapitre fondamental de la physique newtonienne sera exposé complètement, aussi complètement qu'il eût été possible de le faire du temps

Digitized by Google

de Newton, sans y laisser de lacunes, sans user de ces indications générales qui ailleurs remplacent quelquefois les idées précises. Le but est double. D'une part, la théorie de la chute d'un corps se confondant, comme l'on sait, avec les origines de la Mécanique, le professeur fera comprendre les principes de la Mécanique rationnelle en même temps qu'il enseignera les propriétés de la pesanteur. D'autre part, la mesure de g fournira un exemple d'une détermination physique complète, d'une recherche qui aboutit, grâce à l'emploi combiné de l'analyse et du calcul numérique.

Après avoir exposé les lois de la chute des corps, et notamment la première (égalité de l'accélération dans le vide pour tous les corps), le professeur fera remarquer que cette loi est nécessaire à la définition de la masse, que, sans cette loi, les masses, au lieu d'être des grandeurs physiques susceptibles d'addition, ne seraient que des coefficients numériques, de simples quotients. C'est par là également que se fait la soudure entre la Dynamique et la Statique, le poids pouvant se comparer statiquement à d'autres forces.

Il faut remarquer, en effet, que le soin d'expliquer les principes fondamentaux de la Mécanique rationnelle est laissé, dans le programme de mathématiques spéciales, au professeur de physique, car le programme de mécanique spécifie que l'on admettra que la force est géométriquement égale au produit de la masse par l'accélération, et le passage de la définition dynamique de la force à la définition statique n'y est pas explicitement indiqué.

La mesure de g peut se faire non seulement au moyen du pendule à réversion, mais aussi avec divers pendules à un seul couteau, pourvu que leur forme permette le calcul du moment d'inertie. Tels sont les

Digitized by Google

pendules de Borda composés d'un fil portant une sphère pesante ou bien des pendules formés de masses cylindriques ou sphériques, ou encore un pendule formé d'un cerceau oscillant sur une lame de canif. Ces diverses formes de pendule, simplement construites, donnent cependant g avec une approximation voisine de $\frac{1}{1000}$. Le professeur devra donc exécuter une détermination en classe, et les élèves en faire d'autres en manipulation. Ils devront en donner le détail, avec calculs numériques, sous forme de rédaction écrite.

En corrigeant les travaux écrits, le professeur rendra grand service aux élèves s'il attire leur attention sur la question de l'approximation obtenue. Actuellement nos élèves ne se doutent pas de ce que c'est qu'une approximation. Ils croient bien faire en calculant, dans un problème, des nombres avec un très grand nombre de chiffres. Ils paraissent ignorer qu'un nombre de huit chiffres implique une précision de $\frac{1}{100000000}$. Ils ne savent pas ce que c'est qu'une erreur relative; ils ne connaissent pas ce théorème que l'erreur relative d'un produit est égale à la somme des erreurs relatives des facteurs. Ils ne se permettraient pas non plus de multiplier par $1 - \varepsilon$, au lieu de diviser par $1 + \varepsilon$ ou, en général, de remplacer $(1 + \varepsilon)^m$ par $1 + m\varepsilon$. Le professeur de physique rendra grand service aux élèves en ne négligeant aucune occasion de leur expliquer les méthodes d'approximation sur les exemples qui se présentent dans les interrogations et les manipulations.

Chimie. — Le programme de Chimie a été peu modifié; on y trouvera des notes indiquant dans quel esprit l'enseignement doit être fait.

Digitized by Google

[K2e]

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. T. LEMOYNE.

Les lecteurs démontreront facilement que :

I. *Les axes radicaux des cercles circonscrits aux triangles podaires de chacun des points d'une transversale* Δ *par rapport à un triangle* ABC *passent par un même point* ω;

ce qui revient à dire évidemment que ce point a même puissance par rapport à tous ces cercles.

Lorsque la droite Δ coupe le cercle circonscrit au triangle ABC en deux points M, M′, les droites de Simson de M et M′ se rencontrent au point ω.

II. *Si, en particulier, la droite* Δ *est un diamètre du cercle circonscrit à* ABC, *les cercles circonscrits aux triangles podaires de chaque point de cette droite par rapport à* ABC *se coupent tous au point* ω.

Transformons la proposition I à l'aide de l'inversion triangulaire, nous obtiendrons celle-ci :

III. *Les axes radicaux des cercles circonscrits aux triangles podaires de chaque point d'une conique par rapport à un triangle inscrit* ABC *passent par un même point* ω.

La proposition II nous donne de la même manière cette propriété connue :

Les projections de tout point de l'hyperbole équilatère sur les côtés d'un triangle inscrit et le centre de cette courbe sont sur une même circonférence.

Digitized by Google

Si nous appliquons alors ce résultat à un quadrilatère quelconque ABCD en remarquant que l'hyperbole équilatère circonscrite passe par les orthocentres H_1, H_2, H_3, H_4 des quatre triangles ABC, ABD, ACD, BCD, nous verrons que :

IV. *Étant donné un quadrilatère quelconque* ABCD *et* H_1, H_2, H_3, H_4 *désignant les orthocentres des triangles formés par les sommets* A, B, C, D, *les cercles qui passent par les projections de chacun des huit points* A, B, C, D, H_1, H_2, H_3, H_4 *sur les côtés de tous les triangles formés par les sept autres pris trois à trois se coupent en un même point* ω.

Cette propriété contient, comme cas particuliers, deux des théorèmes d'une Note de M. Legrand sur le quadrilatère inscrit publiée dans le numéro de juin 1902 de la *Revue de Mathématiques spéciales* et aussi, je crois, dans le numéro d'août 1901 des *Nouvelles Annales*. Elle étend l'un de ces théorèmes à un quadrilatère quelconque, car le cercle d'Euler d'un triangle ABC est le cercle circonscrit au triangle podaire de l'orthocentre par rapport à ABC; par suite :

Les quatre cercles d'Euler des triangles ABC, ABD, ACD, BCD *passent au point* ω. *Il en est de même des cercles d'Euler des triangles formés par les quatre orthocentres.*

Si le quadrilatère ABCD devient inscriptible, le cercle circonscrit au triangle podaire de D par rapport à ABC se réduit évidemment à la droite de Simson de D et puisque le quadrilatère des orthocentres est symétrique du quadrilatère donné par rapport au point ω :

Les quatre droites de Simson du quadrilatère ABCD

Digitized by Google

passent au point ω; à cause de la symétrie, il en est de même de celles du quadrilatère des orthocentres.

Il y a encore, dans ce cas, un certain nombre de cercles mentionnés ci-dessus (IV) qui passent en ω.

D'ailleurs, lorsque le quadrilatère ABCD est inscriptible, les quatre cercles d'Euler des triangles ABC, ABD, ACD, BCD ont même rayon et, par raison de symétrie, ce rayon est aussi celui des cercles d'Euler du quadrilatère des orthocentres. Donc :

V. *Les centres des quatre cercles d'Euler d'un quadrilatère inscriptible et les centres des quatre cercles d'Euler du quadrilatère des orthocentres sont huit points d'un même cercle qui a pour centre le point ω.*

[O3j]

SUR UN PROCÉDÉ POUR PARVENIR A L'ÉQUATION INTRINSÈQUE DES LIGNES DU CYLINDRE DE RÉVOLUTION;

Par M. Henri PICCIOLI, à Arpino.

La recherche de l'équation intrinsèque des courbes qui sont tracées sur un cylindre de révolution peut être rattachée aux formules

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dM_1}{ds} &= \frac{M_2}{\rho}, \\ \frac{dM_2}{ds} &= -\frac{M_1}{\rho} - \frac{M_3}{T} + \cos\theta_3, \\ \frac{dM_3}{ds} &= \frac{M_2}{T} - \cos\theta_2, \end{aligned}\right.$$

qui lient les moments des directions principales d'une

courbe gauche C par rapport à une droite fixe r avec laquelle elles font respectivement les angles θ_1, θ_2, θ_3 ([1]).

A cet effet, rappelons *que le carré de la distance d'un point à une droite égale la somme des carrés des moments de cette droite par rapport à trois droites orthogonales issues du point donné;* l'expression $M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$ représentera donc le carré de la distance d'un point P de C à r.

La condition que P décrive une ligne appartenant à un cylindre de révolution d'axe r, se traduira ainsi :

$$(2) \qquad M_2 \cos\theta_3 - M_3 \cos\theta_2 = 0,$$

relation qu'on obtiendra en annulant la dérivée par rapport à l'arc s de l'expression $M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$ et tenant compte des formules (1).

Il s'ensuit de là que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne appartienne à un cylindre de révolution ayant pour axe une droite donnée est que les plus courtes distances de la normale principale et de la binormale à l'axe soient entre elles comme les cotangentes des angles correspondants.

Posons maintenant

$$m_1 = M_2 \cos\theta_3 - M_3 \cos\theta_2,$$
$$m_2 = M_3 \cos\theta_1 - M_1 \cos\theta_3,$$
$$m_3 = M_1 \cos\theta_2 - M_2 \cos\theta_1;$$

([1]) *Voir* ma Note *Sur les hélices cylindriques dont les normales principales rencontrent une droite fixe* (*Nouv. Ann.*, avril 1902).

Digitized by Google

nous verrons aisément que m_1, m_2, m_3 satisfont aux relations

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dm_1}{ds} = \dfrac{m_2}{\rho} + \sin^2\theta_1 \\ \dfrac{dm_2}{ds} = -\dfrac{m_1}{\rho} - \dfrac{m_3}{T} - \cos\theta_1\cos\theta_2, \\ \dfrac{dm_3}{ds} = \dfrac{m_2}{T} - \cos\theta_1\cos\theta_3. \end{cases}$$

Posant m_1 égal à zéro, et éliminant m_2 et m_3, nous trouverons une relation du type

$$(a)\quad \begin{cases} A_1\cos^2\theta_1 + A_2\cos^2\theta_2 + A_3\cos^2\theta_3 + A_{12}\cos\theta_1\cos\theta_2 \\ \qquad + A_{23}\cos\theta_2\cos\theta_3 + A_{13}\cos\theta_1\cos\theta_3 + A = 0, \end{cases}$$

où

$$A_1 = \frac{2}{\rho} - H_3 \ \ (^1), \qquad A_2 = -\frac{2}{\rho}, \qquad A_3 = 0;$$

$$A_{12} = -T\frac{d\rho}{ds}, \qquad A_{23} = 0, \qquad A_{13} = 1 - \frac{2}{T}, \qquad A = H_3.$$

En différentiant et en tenant compte des formules de Serret, on parviendra de là à une deuxième relation du même type

$$(b)\quad \begin{cases} B_1\cos^2\theta_1 + B_2\cos^2\theta_2 + B_3\cos^2\theta_3 + B_{12}\cos\theta_1\cos\theta_2 \\ \qquad + B_{23}\cos\theta_2\cos\theta_3 + B_{13}\cos\theta_1\cos\theta_3 + B = 0, \end{cases}$$

dont les coefficients seront liés à ceux de (a) par les

---

[1] Nous rappelons que H_3 n'est autre chose que l'expression

$$\frac{\rho}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{d\rho}{ds}\right),$$

qui, égalée à zéro, donne l'équation intrinsèque des courbes sphériques.

Digitized by Google

formules

$$B_1 = \frac{dA_1}{ds} - \frac{A_{12}}{\rho},$$

$$B_2 = \frac{dA_2}{ds} + \frac{A_{12}}{\rho} + \frac{A_{23}}{T},$$

$$B_3 = \frac{dA_3}{ds} - \frac{A_{23}}{T},$$

$$B_{12} = \frac{dA_{12}}{ds} + 2\frac{A_1}{\rho} - 2\frac{A_2}{\rho} + \frac{A_{13}}{T},$$

$$B_{23} = \frac{dA_{23}}{ds} - 2\frac{A_2}{T} + \frac{A_{13}}{\rho} + \frac{A_3}{T},$$

$$B_{13} = \frac{dA_{13}}{ds} - \frac{A_{12}}{T} - \frac{A_{23}}{\rho},$$

$$B = \frac{dA}{ds}.$$

En procédant ainsi nous parviendrons à une troisième relation dont les coefficients seront exprimables par les B comme les B le sont par les A.

Différentions encore jusqu'à obtenir *sept* relations de cette nature. Leur coexistence exige que l'on ait

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A \\ B_1 & B_2 & B_3 & \dots & B \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation cherchée : c'est une équation différentielle ordinaire du *huitième* ordre par rapport à ρ, et du *septième* par rapport à T. Elle est très compliquée. On peut la simplifier en remarquant que l'on a

$$A_1 + A_2 + A_3 + A = 0$$

et, par conséquent,

$$B_1 + B_2 + B_3 + B = 0,$$

et ainsi de suite.

Digitized by Google

[I11a]

SUR UNE CERTAINE SUITE ARITHMÉTIQUE;

PAR M. R. BRICARD.

1. Soit m un nombre entier, positif et impair, quelconque. Je forme la suite

$$(\mathrm{M}) \qquad [\sqrt{m}],\quad [\sqrt{2m}],\quad \ldots,\quad [\sqrt{(m-1)m}],$$

en désignant par $[x]$ le plus grand entier inférieur à x, si x n'est pas entier, et le nombre x lui-même, dans le cas contraire. Je me propose d'établir les deux théorèmes suivants :

1° *La suite* (M) *contient* $\frac{m-1}{2}$ *nombres pairs, et* $\frac{m-1}{2}$ *nombres impairs;*

2° *La somme alternée*

$$S = [\sqrt{(m-1)m}]-[\sqrt{(m-2)m}]+\ldots+[\sqrt{2m}]-[\sqrt{m}]$$

a une valeur égale à $\frac{m-1}{2}$.

Faisons, par exemple, $m=9$; la suite (M) est ici

$$\begin{array}{llll} [\sqrt{9}] = 3, & [\sqrt{18}] = 4, & [\sqrt{27}] = 5, & [\sqrt{36}] = 6; \\ [\sqrt{45}] = 6, & [\sqrt{54}] = 7, & [\sqrt{63}] = 7, & [\sqrt{72}] = 8; \end{array}$$

elle contient quatre nombres pairs et quatre nombres impairs, et l'on a bien

$$8-7+7-6+6-5+4-3 = 4 = \frac{9-1}{2}.$$

Digitized by Google

2. Pour établir les propositions énoncées, je m'appuierai sur quelques considérations d'un ordre plus général.

Soient

(A) $$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2p},$$

(B) $$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_{2q}$$

deux suites contenant chacune un nombre pair de termes quelconques (entiers ou non). Je suppose que les termes de chaque suite sont rangés en ordre non croissant.

Désignons par

$$(a_h)$$

le nombre des termes (B) qui sont *plus petits* qu'un terme donné a_h de la suite (A), et par

$$(b_k)$$

le nombre des termes (A) qui sont *au plus égaux* à un terme donné b_k de la suite (B). Appelons I_a le nombre des termes impairs de la suite des nombres (a_h), et S_a la valeur de la somme alternée

$$(a_1) - (a_2) + \ldots + (a_{2h-1}) - (a_h),$$

et soient, enfin, I_b et S_b les nombres analogues relatifs à la suite des nombres (b_h). *Je dis que l'on a*

$$S_a = I_b, \qquad S_b = I_a.$$

Figurons, en effet, un échiquier rectangulaire, de $2p$ colonnes et de $2q$ lignes. En bas de chaque colonne, écrivons dans l'ordre, en commençant par la gauche, les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$. A gauche de chaque ligne écrivons dans l'ordre, en commençant par le bas, les

Digitized by Google

nombres $b_1, b_2, \ldots, b_{2q}$. Cela fait, marquons un point dans la case de coordonnées (h, k), si l'on a

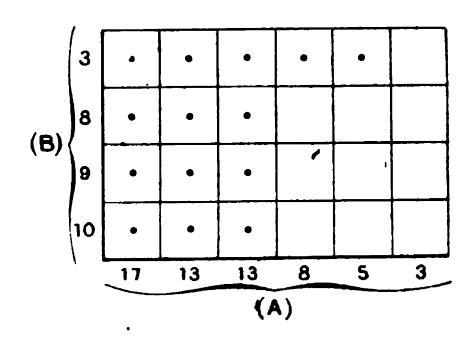
$$b_k < a_h,$$

et laissons cette case blanche, si l'on a

$$b_k \geqq a_h.$$

Voici, par exemple, le diagramme obtenu, en supposant que les suites (A) et (B) sont ainsi constituées :

(A)	17, 13, 13, 8, 5, 3,
(B)	10, 9, 8, 3.



Il est clair que le nombre des cases *marquées* dans la colonne de rang h est le nombre (a_h) et que le nombre des cases *non marquées* dans la ligne de rang k est le nombre (b_k). Cela posé, cherchons à évaluer la somme alternée

$$S_a = (a_1) - (a_2) + \ldots - (a_{2p}).$$

A cet effet, remplaçons les points marqués dans l'échiquier par le nombre $+1$, quand ils appartiennent à une colonne de rang impair, et par le nombre -1,

Digitized by Google

quand ils appartiennent à une colonne de rang pair. Le diagramme pris comme exemple devient ainsi

3	+1	−1	+1	−1	+1	
8	+1	−1	+1			
9	+1	−1	+1			
10	+1	−1	+1			
	17	13	13	8	5	3

et la somme alternée S_a est évidemment égale à la somme algébrique de tous les nombres inscrits dans l'échiquier. Or effectuons cette somme en totalisant successivement chaque *ligne*. La somme relative à la ligne de rang k est égale à 0, si le nombre des termes qui y sont inscrits est pair, et à $+1$ dans le cas contraire. Mais, comme les cases de cette ligne sont en nombre pair $2p$, la parité du nombre des termes qui y sont inscrits est la même que la parité du nombre des cases blanches qu'elle contient. Or ce dernier nombre est égal à (b_k), comme on l'a remarqué plus haut.

En résumé, la somme algébrique S_a contient autant d'unités qu'il y a de nombres impairs dans la suite des nombres (b_k). On a donc bien

$$S_a = I_b. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — I_a et I_b, et par suite S_a et S_b, sont des nombres de même parité. En effet, I_a est pair ou impair en même temps que le nombre total des cases marquées dans le premier diagramme; I_b est pair ou impair en même temps que le nombre total des cases blanches. Or, le nombre des cases marquées et celui des cases

Digitized by Google

blanches sont de même parité, parce que le nombre total des cases de l'échiquier est le nombre pair $4pq$.

3. Il est maintenant facile d'établir les propositions énoncées au début de cet article. Je supposerai que, m étant un nombre impair, les suites (A) et (B) sont ainsi constituées :

$$(A) \qquad (m-1)^2, \quad (m-2)^2, \quad \ldots, \quad 4, \quad 1,$$
$$(B) \qquad (m-1)m, \quad (m-2)m, \quad \ldots, \quad 2m, \quad m.$$

Le nombre (km), relatif à un terme de la suite (B), est le nombre des carrés entiers *au plus égaux* à km [1]; on a donc, en employant la notation fixée au début,

$$(km) = [\sqrt{km}].$$

Le nombre (h^2), relatif à un terme de la suite (A), est le nombre des multiples de m qui sont *inférieurs* à h^2. On a donc

$$(h^2) = \left\{ \frac{h^2}{m} \right\},$$

en appelant $\{x\}$ le plus grand nombre entier *inférieur* à x ($\{x\} = x - 1$, si x est entier).

Comme les termes de chaque suite sont bien en nombre pair $m - 1$, on peut appliquer les résultats du n° 2 : on voit donc que, si l'on forme les suites

$$[\sqrt{(m-1)m}], \quad [\sqrt{(m-2)m}], \quad \ldots, \quad [\sqrt{2m}], \quad [\sqrt{m}]$$

et

$$\left\{ \frac{(m-1)^2}{m} \right\}, \quad \left\{ \frac{(m-2)^2}{m} \right\}, \quad \ldots, \quad \left\{ \frac{4}{m} \right\}, \quad \left\{ \frac{1}{m} \right\},$$

---

[1] Le fait est exact pour le premier terme de la suite (B), à cause de

$$m^2 > (m-1)m > (m-1)^2;$$

il est donc, *a fortiori*, exact pour les autres termes.

Digitized by Google

la somme alternée des termes de chacune de ces suites, calculée en donnant le signe + au terme le plus grand, est égale au nombre des termes impairs de l'autre suite.

Il suffit donc, pour obtenir la démonstration cherchée, d'établir que :

1° *La suite*

$$\left\{\frac{h^2}{m}\right\} \qquad (h = m-1, m-2, \ldots, 1)$$

contient $\frac{m-1}{2}$ *nombres impairs;*

2° *La somme alternée*

$$S' = \left\{\frac{(m-1)^2}{m}\right\} - \left\{\frac{(m-2)^2}{m}\right\} + \ldots + \left\{\frac{4}{m}\right\} - \left\{\frac{1}{m}\right\}$$

a pour valeur $\frac{m-1}{2}$.

1° Soient q_h et r_h le quotient et le reste obtenus en divisant h^2 par m, *et en ayant soin de prendre* $r_h = m$, *si la division se fait exactement*. On a

$$h^2 = mq_h + r_h, \qquad r_h \leqq m, \qquad \left\{\frac{h^2}{m}\right\} = q_h.$$

On tire de là

$$(m-h)^2 = m(m + q_h - 2h) + r_h, \qquad r_h \leqq m,$$

d'où l'on conclut

$$(1) \qquad \left\{\frac{(m-h)^2}{m}\right\} = m + \left\{\frac{h^2}{m}\right\} - 2h,$$

nombre qui est de parité différente de celle de $\left\{\frac{h^2}{m}\right\}$, puisque m est impair.

Deux termes de la suite $\left\{\frac{h^2}{m}\right\}$, équidistants des ex-

Digitized by Google

trêmes, sont donc de parités différentes, ce qui établit le premier point.

2° On a

$$S' = -\left\{\frac{1}{m}\right\} + \ldots + (-1)^h \left\{\frac{h^2}{m}\right\} + \ldots$$
$$+ (-1)^{m-h}\left\{\frac{(m-h)^2}{m}\right\} + \ldots + \left\{\frac{(m-1)^2}{m}\right\},$$

ou bien, en groupant deux à deux les termes équidistants des extrêmes,

$$S' = \sum_{h=1}^{h=\frac{m-1}{2}} (-1)^h \left[\left\{\frac{h^2}{m}\right\} - \left\{\frac{(m-h)^2}{m}\right\}\right],$$

et, en tenant compte de la relation (1),

$$S' = \sum_{h=1}^{h=\frac{m-1}{2}} (-1)^h (2h - m).$$

Or, on a

$$2h - m = h - m - [(m-h) - m],$$

d'où

$$(-1)^h(2h - m) = (-1)^h(h - m) + (-1)^{m-h}[(m-h) - m].$$

On peut donc écrire

$$S' = \sum_{h=1}^{h=m-1} (-1)^h (h - m)$$
$$= (m-1) - (m-2) + (m-3) - (m-4) + \ldots + 2 - 1,$$

ou bien, en groupant les termes consécutifs deux à deux,

$$S' = 1 + 1 + \ldots + 1,$$

Digitized by Google

le nombre des termes du second membre étant égal à $\frac{m-1}{2}$. Donc enfin

$$S' = \frac{m-1}{2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — La suite (M) jouit encore des propriétés suivantes, dont je laisse au lecteur le soin de trouver les démonstrations :

1° *Dans la suite* (M), *un même nombre ne peut figurer plus d'une fois;*

2° *Un même nombre peut figurer deux fois, et cette circonstance se présente un nombre de fois égal à* $\left[\frac{m}{4}\right]$.

Ainsi, dans la suite prise comme exemple ($m = 9$), il y a $\left[\frac{9}{4}\right] = 2$ nombres qui figurent deux fois, à savoir les nombres 6 et 7.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une plaque infiniment mince, homogène et pesante, ayant la forme d'un triangle équilatéral dont le côté a pour longueur* $2\sqrt{3}$, *s'appuie par le côté* BC *sur un plan horizontal fixe sur lequel elle peut glisser sans frottement. Cette plaque étant verticale et immobile, on lui applique en un point* D *une percussion d'intensité égale à* $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ *et normale à son plan.*

1° *Trouver le mouvement initial de la plaque; reconnaître si elle continue à s'appuyer sur le plan horizontal fixe. Peut-on choisir le point* D *de manière que le mouvement initial de la plaque soit une rotation autour de* BC?

Digitized by Google

2° *Le point* D *étant quelconque, étudier le mouvement de la plaque après l'effet de la percussion. Peut-on choisir le point* D *de manière que le côté* BC *reste parallèle à lui-même?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer la pression de l'eau sur une porte d'écluse verticale et rectangulaire en supposant qu'en amont l'eau affleure au côté supérieur* AB *et en aval au côté inférieur* DC. *Déterminer la position du centre de pression. On donnera la pression en kilogrammes dans le cas où* $AB = 3^m$ *et* $AD = 4^m$. (Juillet 1904.)

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Équations d'équilibre d'un fil non pesant dont chaque élément ds est repoussé de l'axe* OX *par une force égale au quotient de ds par le carré de sa distance à* OX. *Dire dans quel cas la tension est constante et quelle est alors la courbe funiculaire. Enfin, en supposant le fil contenu dans le plan* XOY, *déterminer la courbe qu'il dessine dans le cas particulier où son équation est algébrique.*

SOLUTION.

$$d.\mathrm{T}\frac{dx}{ds} = 0, \qquad d.\mathrm{T}\frac{dy}{ds} + \frac{y\,ds}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \qquad d.\mathrm{T}\frac{dz}{ds} + \frac{z\,ds}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

T est constant si le fil est sur un cylindre de révolution autour de OX : il a alors la forme d'une hélice. Enfin, si z est nul, on a

$$\mathrm{T}\frac{dx}{ds} = \frac{1}{a}, \qquad d\frac{1}{a}\frac{dy}{dx} + \frac{ds}{y^2} = 0.$$

En faisant $\frac{dy}{dx} = y'$, $ds = \frac{dy}{y'}\sqrt{1+y'^2}$, on trouve aisément

$$dx = \frac{\mathrm{C}y\,dy}{\sqrt{a^2(\mathrm{C}-y)^2 - \mathrm{C}^2y^2}};$$

l'intégrale n'est algébrique que pour $\mathrm{C} = a$:

$$dx = \pm\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - 2ay}}.$$

Digitized by Google

II. *A une sphère pesante et homogène, pouvant pivoter autour d'un point* O *de sa surface, est liée une tige* DH *dirigée suivant le prolongement du diamètre* OD *qui part du point fixe* O; *une circonférence* S *peut tourner librement autour d'un de ses diamètres* PP' *qui est vertical, fixe, ayant son milieu en* O; *le point* H *est assujetti à glisser sur* S *avec une vitesse constante. A l'instant initial, l'angle* POH *est droit, la circonférence* S *immobile, la sphère animée d'une rotation donnée autour de* OH. *Déterminer le mouvement du système en négligeant les masses de* DH *et de* S.

SOLUTION.

Prenant trois axes fixes dont l'un, OZ_1, est dirigé suivant OP, on déterminera la position de la sphère à l'aide des trois angles d'Euler; θ, égal à POH, a pour valeur $\frac{\pi}{2}+at$. On a pour la force vive

$$2T = \frac{7}{5}MR^2(\alpha^2+\psi'^2\cos^2\alpha t)+\frac{2}{5}MR^2(\varphi'-\psi'\sin\alpha t)^2.$$

L'ordonnée du centre de gravité étant $-R\sin\alpha t$, le travail virtuel du poids, aussi bien que celui des forces de liaison, est nul; les deux équations de Lagrange sont extrêmement simples et l'on a tout de suite les intégrales premières

$$\varphi'-\psi'\sin\alpha t=\omega, \qquad 7\psi'\cos^2\alpha t-2\omega\sin\alpha t=0,$$

eu égard aux conditions initiales. Il est facile d'avoir les intégrales finies, et, si l'on veut, les forces de liaison.

(Juillet 1904.)

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE : CINÉMATIQUE. — *L'extrémité* A *d'une barre rectiligne* AB *décrit un cercle d'un mouvement uniforme, tandis que son extrémité* B *décrit le prolongement d'un diamètre* Ox *de ce cercle. Étudier la distribution des accélérations des divers points de la barre* AB *à un instant donné.*

DYNAMIQUE. — *Mouvement d'une toupie dont la pointe*

Digitized by Google

repose sans frottement sur un plan horizontal. On ne considérera que le cas où, à l'instant initial, la vitesse du centre de gravité est nulle et la toupie animée d'une rotation autour de son axe de figure. On se bornera à établir les équations qui définissent le mouvement et à ramener leur intégration aux quadratures.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une barre très mince* AB, *homogène et pesante, de masse* M, *de longueur* $2l$, *mobile sans frottement dans un plan horizontal, est d'abord en repos. Une bille de dimensions très petites et de masse* 3M, *lancée dans le même plan, vient choquer la barre perpendiculairement à sa direction, avec une vitesse* V_0 *en un point* P *tel que* $AP = \frac{AB}{6}$. *La barre et la bille sont supposées parfaitement élastiques.*

1° *Montrer qu'après le choc le centre de gravité de la barre et la bille prennent des vitesses équipollentes, et déterminer la vitesse de rotation de la barre autour de son milieu.*

2° *Dans leur mouvement ultérieur, la barre et la sphère viennent à nouveau se choquer. Calculer le temps qui sépare les deux chocs et montrer que la barre, après ce choc, est ramenée au repos.*

3° *La bille, continuant son mouvement, vient choquer une nouvelle barre* CD *identique à la première, mobile dans le même plan autour de son extrémité* D, *mais d'abord en repos, la figure* ABCD *étant un rectangle. Tandis que la bille cheminait entre les deux barres, on a réuni les extrémités* C *et* A *par un fil inextensible et sans masse, de longueur égale à l'écartement des deux barres. Déterminer le régime des vitesses des deux barres après le choc et la tension de percussion du fil.*

(Juillet 1904.)

Rennes.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère deux tiges,* AB *et* CD, *homogènes de même longueur* $2a$, *et de même poids* mg. *La première est horizontale et peut tourner librement autour de la verticale* Az; *la seconde se meut de telle façon que son extrémité* C *glisse sur la verticale* Az, *tan-*

Digitized by Google

dis que l'extrémité D *s'appuie sur la tige horizontale* AB. *Il n'y a pas de frottement. Étudier le mouvement du système.*

Examiner en particulier le cas où le point C *reste immobile et celui où il effectue des oscillations infinitésimales.*

On désignera par φ *l'angle* ACB *et par* θ *l'angle azimutal du plan* zAB.

II. *L'accélération dans le mouvement relatif.*

Remarque. — Le problème I ne présente pas de difficulté. Le théorème des forces vives et celui des aires permettent de ramener l'intégration à des quadratures, et la discussion est analogue à celle de plusieurs questions classiques de la Mécanique rationnelle (pendule sphérique, etc.).

La recherche de l'équilibre relatif de la tige CD dans le plan zAB et l'étude des oscillations infinitésimales correspondantes peuvent être comparées aux questions analogues relatives au régulateur de Watt.

Épreuve pratique. — *Sur un cylindre de révolution à génératrices horizontales, on pose en équilibre une règle rectangulaire homogène d'épaisseur négligeable et d'une longueur de* $0^m,48$. *Cette règle, légèrement dérangée de sa position d'équilibre, fait de petites oscillations dont la période est de* $1^s,25$. *On suppose qu'il n'y a pas de glissement, que le frottement de roulement est nul, et que la règle reste perpendiculaire aux génératrices du cylindre. On demande de trouver le rayon de ce cylindre sachant que l'on a* $g = 9^m,81$.

Remarque. — Entre le rayon du cylindre a, la longueur l de la règle et la période t de l'oscillation, on trouve la relation

$$t^2 = \frac{4\pi^2 l^2}{3ga}.$$

(Juillet 1904.)

Poitiers.

Épreuve écrite. — I. *Étude cinématique du mouvement d'un système invariable qui a un point fixe.*

II. *Un disque matériel homogène, de rayon* r *et d'épaisseur infiniment petite, glisse sans frottement dans un*

Digitized by Google

plan fixe. Il est animé, à l'instant $t = 0$, *d'une rotation* ω_0 *autour de son centre.*

Quelle force faut-il faire agir, à partir de cet instant, dans le plan du disque, sur un point A *de sa circonférence, pour que ce point* A *prenne un mouvement rectiligne et uniforme ?*

Quel est alors le mouvement du disque?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer le centre de gravité du solide engendré par la rotation d'un secteur de cercle autour de l'un de ses rayons extrêmes :*

Rayon du cercle............ $a = 0^m,580$
Angle d'ouverture........... $\alpha = 31°6'23''$

(Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Mouvement d'un point pesant qui glisse avec frottement sur un plan incliné.*

On adoptera les notations suivantes :

O, *position initiale du mobile;*
Ox, *horizontale du plan;*
Oy, *ligne de plus grande pente dans le sens des cotes croissantes;*
α, *angle du plan avec le plan horizontal;*
f, *coefficient de frottement.*

On demande de calculer les coordonnées (x, y) *du mobile* M *au temps* t *et le temps* t *lui-même au moyen de la variable auxiliaire* $v = \tan\frac{\theta}{2}$, *où* θ *désigne l'angle de* Oy *avec la tangente en* M *à la trajectoire.*

Discuter les diverses phases du mouvement en faisant varier f.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère un système articulé formé de deux barres égales* OA, O'A' *pouvant tourner respectivement autour des points fixes* O, O' *et réunies par une barre* AA' *de longueur constante.*

Dans la position initiale du système les barres OA_0, $O'A'_0$ *sont parallèles et dirigées en sens contraire. Soient* I_0 *le milieu de* $A_0A'_0$ *et* I_0x *et* I_0y *des axes rectangulaires, tels que* I_0x *soit parallèle à* OA_0 : *les éléments numériques du système sont les coordonnées* (m, n) *du point* O *et la lon-*

Digitized by Google

gueur a de OA_0. *Ces éléments sont choisis de telle sorte que, dans la position finale du système,* OA *ayant tourné d'un angle* $\alpha = A_1OA_0$, *l'autre barre* O'A' *a tourné du même angle* α.

Soient alors, dans une position intermédiaire quelconque, θ *et* θ' *les angles* AOA_0 *et* $A'O'A'_0$; *on demande, en supposant que* α *et* t *sont des quantités très petites et du même ordre de grandeur dont on négligera les puissances supérieures à la quatrième :*

1° *Les valeurs approchées de la différence* $\theta' - \theta$ *et des coordonnées* (x, y) *du milieu* I *de* AA', *exprimées avec* n, a, α, θ;

2° *La construction et les propriétés du lieu approché du point* I. (Novembre 1903.)

Lyon.

Épreuve écrite. — *Soient* α *et* β *deux barres horizontales, parallèles, infiniment minces, placées à même hauteur. Un corps* S, *solide et pesant, repose sur* α *et* β *par deux surfaces cylindriques* A *et* B *qui ont même axe* ω *de révolution, horizontal, perpendiculaire à* α *et* β, *et un rayon* R. *Le plan mené par* ω *et par le centre de gravité* G *de* S *fait l'angle* θ_0 *avec la verticale. On imprime à* S *une vitesse initiale de translation parallèle aux barres.*

Quel sera le mouvement ultérieur? Tenir compte du frottement, dont on supposera le coefficient égal pour A *et* B. (Novembre 1903.)

Bordeaux.

Épreuve écrite. — *Une barre homogène* AB, *de masse* M, *est mobile dans un plan* xOy *autour de son milieu* O *qui est fixe. Un cercle homogène de masse* μ, *mobile dans le plan* xOy, *ne peut que rouler sur la barre* AB. *Les divers points matériels de ce cercle sont attirés par le point* O *proportionnellement à leur masse et à leur distance au point* O. *On demande d'étudier le mouvement du système.*

Étudier le cas particulier où le système part du repos.

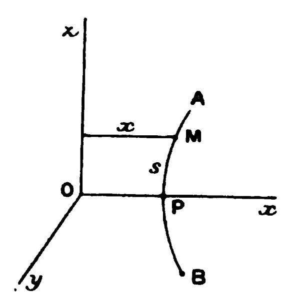
Peut-on choisir les conditions initiales de façon que le cercle C *reste en équilibre relatif sur la barre* AB?

N. B. — Dans la discussion on supposera que la barre AB

Digitized by Google

est toujours assez longue pour que le cercle ne puisse pas la quitter.

Épreuve pratique. — *Une poulie, constituée par une surface dont on néglige l'épaisseur, est définie géométriquement de la façon suivante : Soit* APB *la courbe méridienne située dans le plan* xOz *qui, en tournant autour de* Oz,



engendre la surface de la poulie; si M *est un point quelconque de cette méridienne, on a, en désignant par* x *l'abscisse du point* M *et par* s *l'arc* PM,

$$x = \sqrt{1+s^2},$$

et l'arc s *varie entre* -1 *et* $+1$. *On demande de calculer le rayon d'inertie de la poulie par rapport à son axe* Oz.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

N. d. l. R. — Nous prions les auteurs de solutions de questions proposées de vouloir bien se conformer, dans leurs rédactions, aux dispositions adoptées dans le Journal (indications du numéro de la question, de l'année et de la page où figurait l'énoncé; reproduction de cet énoncé; nom de l'auteur de la question).

Nous leur recommandons aussi de n'écrire que d'un seul côté de la page.

Digitized by Google

1971.

(1903, p. 192.)

Soient R *le rayon de courbure d'une courbe,* R_1 *celui de la représentation sphérique des tangentes,* T *le rayon de torsion,* ρ *le rayon de la sphère osculatrice,* s *l'arc de la courbe donnée; démontrer les relations*

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{R}\frac{dR}{ds}\right)^2, \tag{1}$$

$$\left(\frac{R^2}{R_1}\right)^2 - \left(\frac{\rho}{T}\right)^2 = 1 \tag{2}$$

et dire ce que devient la relation (2) *dans l'hypothèse*

$$\rho = \text{const.}, \qquad T = \text{const.}$$

(Solon Chassiotis.)

SOLUTION

Par M. Solon Chassiotis.

Soient

$$(C) \qquad x = f_1(s), \qquad y = f_2(s), \qquad z = f_3(s)$$

les coordonnées rectangulaires d'une courbe rapportée à son arc s. Les expressions

$$(C') \qquad \alpha = f'_1(s), \qquad \beta = f'_2(s), \qquad \gamma = f'_3(s)$$

sont alors les cosinus directeurs de la tangente en un point, ou bien les coordonnées rectangulaires de la représentation (C′) sphérique de la courbe donnée C. On a d'ailleurs la condition

$$f'^2_1(s) + f'^2_2(s) + f'^2_3(s) = 1. \tag{1}$$

Les rayons R et R_1 de courbure de C et de C′ sont respectivement

$$\frac{1}{R^2} = f''^2_1(s) + f''^2_2(s) + f''^2_3(s), \tag{2}$$

$$\frac{1}{R_1^2} = f'''^2_1(s) + f'''^2_2(s) + f'''^2_3(s). \tag{3}$$

Digitized by Google

et à cause de (2) on a

(4) $$-\frac{1}{R^3}\frac{dR}{ds} = f_1'' f_1''' + f_2'' f_2''' + f_3'' f_3'''.$$

Or, les formules de Frenet donnent la relation

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = S\left(\frac{d\alpha'}{ds}\right)^2,$$

T étant le rayon de torsion, et comme

$$\alpha' = R\frac{d\alpha}{ds}, \qquad \beta' = R\frac{d\beta}{ds}, \qquad \gamma' = R\frac{d\gamma}{ds},$$

c'est-à-dire

$$\alpha' = R f_1''(s), \qquad \beta' = R f_2''(s), \qquad \gamma' = R f_3''(s),$$

il vient

$$\frac{d\alpha'}{ds} = R f_1''' + f''\frac{dR}{ds}, \qquad \ldots,$$

d'où

(5) $$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{R}\frac{dR}{ds}\right)^2;$$

c'est la première des formules.

Pour arriver à l'autre, considérons le rayon ρ de la sphère osculatrice; on a

(6) $$\rho^2 = R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2,$$

d'où, en éliminant $\frac{1}{R}\frac{dR}{ds}$ entre (5) et (6), on arrive à la relation très simple

(7) $$\left(\frac{R^2}{R_1}\right)^2 - \left(\frac{\rho}{T}\right)^2 = 1.$$

facile à retenir.

Remarque. — Les formules (5) et (7) sont évidemment indépendantes du choix de la variable, elles sont donc applicables à *tous* les cas.

L'avantage de la formule (5) est que, une fois R et R' calculés pour une courbe donnée, elle fait connaître T^2.

Digitized by Google

Exemples. — 1° Soit une *hélice circulaire*. On trouve, en calculant R,

$$R = a.$$

Quant à R_1 il est aussi constant, car la représentation sphérique d'une hélice est un cercle. On a donc

$$R_1 = b \qquad \text{et} \qquad \frac{dR}{ds} = 0;$$

on déduit

$$T = \frac{ab}{\sqrt{a^4 - 1}} = \text{const.},$$

résultat connu.

Ainsi :

Les courbes dont le rayon de courbure est constant et qui ont comme représentation sphérique de leurs tangentes un cercle sont des hélices circulaires.

Quant à la formule (7), elle fait connaître ρ; mais à cause de (6) on a

$$\rho = R.$$

En sorte que, en tout point d'une hélice,

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2,$$

où toutes les lettres sont des constantes.

2° Prenons les courbes $T = a$, $\rho = b$. On tire de (7)

$$R^2 = KR_1,$$

et de (5)

$$(8) \qquad mR + \sqrt{1 + m^2R^2} = ps,$$

m et p étant des constantes dépendant de a et de b.

Ces courbes sont tracées sur une surface-canal engendrée par une sphère de rayon constant dont le centre parcourt une courbe à torsion constante. Elles coupent à angle droit les cercles de la surface et de plus sont des géodésiques pour cette dernière. Comme on a $T = a$, l'équation (8) définit la courbe en coordonnées intrinsèques.

Digitized by Google

1977.

(1903, p. 431.)

On donne dans un plan cinq droites a, b, c, d, d' et deux points D_1, A_2 *sur une droite qui passe par le point d'intersection* D *des droites d et d'.*

On projette du point D_1 *les points* (bc), (ca), (ab) [1] *sur la droite d et du point* A_2 *les mêmes points sur la droite d'. Soit a' la droite qui joint les deux projections du point (bc); soient de même b' et c', ...*

Les huit droites a, b, c, d, a', b', c', d' forment une configuration jouissant des propriétés suivantes, dont on demande la démonstration :

1° *On peut former huit groupes de six droites, les droites d'un même groupe passant par un même point, et cela conformément au Tableau suivant :*

$(ab)(c'd')$	$(bc)(a'd')$	$(ca)(b'd')$	*passent par un même point* A_2
$(a'b')(cd)$	$(b'c')(ad)$	$(c'a')(bd)$	
$(ab)(cd)$	$(bc')(a'd)$	$(c'a)(b'd)$	» B_2
$(a'b')(c'd')$	$(b'c)(ad')$	$(ca')(bd')$	
$(ab')(c'd)$	$(b'c)(a'd)$	$(ca)(bd)$	» C_2
$(a'b)(cd')$	$(bc')(ad')$	$(c'a')(b'd')$	
$(ab')(cd')$	$(b'c')(a'd')$	$(c'a)(bd')$	» D_2
$(a'b)(c'd)$	$(bc)(ad)$	$(ca')(b'd)$	
$(ab')(cd)$	$(b'c')(a'd)$	$(c'a)(bd)$	» A_1
$(a'b)(c'd')$	$(bc)(ad')$	$(ca')(b'd')$	
$(a'b)(cd)$	$(bc')(ad)$	$(c'a')(b'd)$	» B_1
$(ab')(c'd')$	$(b'c)(a'd')$	$(ca)(bd')$	
$(ab)(cd')$	$(bc')(a'd')$	$(c'a)(b'd')$	» C_1
$(a'b')(c'd)$	$(b'c)(ad)$	$(ca')(bd)$	
$(ab)(c'd)$	$(bc)(a'd)$	$(ca)(b'd)$	» D_1
$(a'b')(cd')$	$(b'c')(ad')$	$(c'a')(bd')$	

---

[1] (bc) est le point d'intersection des droites b et c.

Digitized by Google

2° *Désignons respectivement par* A, B, C, D *les points* (aa'), (bb'), (cc'), (dd'). *Les trois points appartenant à l'un quelconque des seize groupes*

$$\begin{array}{llll} AA_1A_2, & AB_1B_2, & AC_1C_2, & AD_1D_2, \\ BB_1A_2, & BA_1B_2, & BD_1C_2, & BC_1D_2, \\ CC_1A_2, & CD_1B_2, & CA_1C_2, & CB_1D_2, \\ DD_1A_2, & DC_1B_2, & DB_1C_2, & DA_1D_2 \end{array}$$

sont sur une même droite. (L. Klug.)

SOLUTION

Par M. L. Klug.

1° On connaît le théorème suivant :

Si un triangle est circonscrit à un autre, on peut lui circonscrire une infinité de triangles circonscrits au second.

Ce théorème peut encore s'énoncer ainsi :

Soient $l'm'n'$ *et* $l''m''n''$ *deux triangles inscrits au triangle* lmn (*les points* l', l'' *sont sur le côté* mn, *etc.*); *soient* l_1, m_1, n_1 *les points où se coupent respectivement* $m'n'$, $m''n''$; $n'l'$, $n''l''$; $l'm'$, $l''m''$. *Si la droite* m_1n_1 *passe par le point* l, *les droites* n_1l_1 *et* l_1m_1 *passent respectivement par les points* m *et* n.

Dans la figure considérée, les deux triangles

$$(b'd)(ac)(b'd'), \quad (a'd)(bc)(a'd')$$

sont inscrits au triangle dcd'; les deux côtés $(b'd)(ac)$ et $(a'd)(bc)$ passent par le point D_1; les deux côtés $(ac)(b'd')$, $(bc)(a'd')$ passent par le point A_2, et les trois points D_1, A_2, (dd') ou D sont en ligne droite; par conséquent le point d'intersection $(a'b')$ des côtés $(b'd)(b'd')$ ou b' et $(a'd')(a'd)$ ou a' est sur la droite $D_1(cd')$ et aussi sur la droite $A_2(cd')$.

Il en résulte que, si l'on projette le point $(a'b')$ du point D_1 sur d', et du point A_2 sur d, la droite qui joint ces deux projections n'est autre que c.

De même, si l'on projette les points $(b'c')$, $(c'a')$ du point D_1

sur d' et du point A_2 sur d, les droites qui joignent les deux projections d'un même point sont respectivement a et b.

Pour démontrer que les droites

$$(ab)(cd), \quad (bc')(a'd), \quad (c'a)(b'd),$$
$$(a'b')(c'd'), \quad (b'c)(ad'), \quad (ca')(bd')$$

passent par le point B_2, remarquons que les côtés des triangles abc', $a'b'c$ déterminent une involution sur la droite d. Par conséquent, la droite $(c'a)(b'd)$ passe par le point d'intersection B_2 des droites $(ab)(cd)$, $(a'd)(bc')$. Les mêmes triangles déterminent une involution sur la droite d'; par conséquent, la droite $(c'a)(b'd')$ contient le point d'intersection C_1 des droites $(ab)(cd')$, $(bc')(a'd')$. On démontrera de même tous les résultats énoncés dans la première partie.

2° Démontrons par exemple que les trois points D, B_2, C_1 sont en ligne droite; à cet effet considérons les deux triangles

$$(ab)(cd)(cd'), \quad (bc')(a'd)(a'd')$$

qui sont inscrits au triangle $dd'b$.

Les côtés $(ab)(cd)$ et $(bc')(a'd)$ passent par le point B_2.

Les côtés $(ab)(cd')$ et $(bc')(a'd')$ passent par le point C_1.

Les côtés $(cd)(cd')$ et $(a'd)(a'd')$ passent par le point ca'.

La droite $B_2(ca')$ passe par le sommet (bd') du triangle $dd'b$; la droite $C_1(ca')$ passe par le sommet (bd) du même triangle; donc la droite B_2C_1 passe par le point (dd') ou D.

C. Q. F. D.

1980.

(1903, p. 432.)

Déterminer, de la manière la plus générale, une courbe (plane ou gauche) telle que toutes ses conchoïdes par rapport à un point de l'espace convenablement choisi soient des courbes sphériques. (R. Bricard.)

SOLUTION

Par M. R. Bricard.

Soient

C une courbe jouissant de la propriété énoncée;

O un point par rapport auquel toutes les conchoïdes de C sont des courbes sphériques;

m et n deux points quelconques de C.

Digitized by Google

Si, quels que soient les points m et n, on a $Om = On$, la courbe C est tracée sur une sphère de centre O, et fournit une solution évidente du problème. Dans le cas contraire, on peut choisir les points m et n de telle manière que l'on ait

$$Om \neq On.$$

Construisons alors les deux conchoïdes de C, C′ et C″, obtenues en retranchant des rayons vecteurs de C des longueurs constantes, égales respectivement à Om et à On. Les deux courbes C′ et C″ passent par le point O, et les sphères (S′) et (S″) qui, par hypothèse, les contiennent, passent aussi par le point O.

Cela posé, désignons respectivement par O′ et par O″ les points diamétralement opposés au point O, sur les sphères (S′) et (S″), et soient p' et p'' deux points correspondants des courbes C′ et C″. Le segment de longueur constante $p'p''$ est la projection orthogonale, sur la droite Op', du segment fixe O′O″ : cela exige que la droite Op' fasse un angle constant avec la droite O′O″; d'où il résulte que la courbe C′ est l'intersection de la sphère (S′) et d'un cône de révolution ayant son sommet en O′.

Réciproquement, *la courbe, intersection d'un cône de révolution et d'une sphère contenant le sommet du cône, est telle que toutes ses conchoïdes par rapport au sommet du cône sont des courbes sphériques*. Désignons, en effet, par O le sommet du cône, par O′ le point de la sphère qui lui est diamétralement opposé, par m' un point quelconque de la courbe. Menons par O′ une parallèle à l'axe du cône, et soit O″ un point fixe quelconque sur cette parallèle. La projection orthogonale de O′O″ sur Om est évidemment un segment de longueur constante; donc, etc.

On a donc bien obtenu la solution générale du problème, en laissant de côté la solution évidente et sans intérêt signalée plus haut.

1983.

(1903, p. 480.)

Soient C *le cercle ayant pour diamètre la distance des deux sommets d'un limaçon de Pascal, et* C′ *un cercle bitangent au limaçon :*

Digitized by Google

1° *L'axe radical des cercles* C *et* C' *passe par un point fixe;*

2° *Le lieu des centres de similitude des cercles* C *et* C' *est une strophoïde droite.* (E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. LETIERCE.

I. Prenons, pour axe des x, l'axe de symétrie du limaçon, pour origine le point double O, et pour axe des y la perpendiculaire à Ox.

Soient a l'abscisse du centre du cercle C, p le rayon de C. Considérons le limaçon comme podaire de C par rapport à O.

Si

$$(x-a)\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

est une tangente à C, les coordonnées d'un point du limaçon sont données par

$$x = (p + a\cos\alpha)\cos\alpha,$$
$$y = (p + a\cos\alpha)\sin\alpha$$

ou, en remplaçant $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ par leurs valeurs en fonction de $\tang\frac{\alpha}{2} = t$,

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{[p+a+(p-a)t^2](1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \\ y = \dfrac{2[p+a+(p-a)t^2]t}{(1+t^2)^2}. \end{cases}$$

Soit un cercle C' d'équation

$$(2)\qquad x^2+y^2+2\lambda x+2\mu y+\nu = 0.$$

Pour que C' soit bitangent au limaçon, il faut que l'équation aux t des points d'intersection de (1) et de (2) soit un carré parfait. Tous calculs faits, on trouve

$$(3)\qquad \mu^2+\lambda^2+\lambda a = 0,$$
$$\nu = \lambda\frac{p^2-a^2}{a}.$$

L'axe radical de C et C' a pour équation

$$2(\lambda+a)x + 2\mu y + p^2 - a^2 + \frac{\lambda}{a}(p^2-a^2) = 0.$$

Digitized by Google

Ce qui montre que l'axe radical passe par le point fixe

$$\left(x = \frac{a^2 - p^2}{2a}, \; y = 0\right).$$

II. Les centres de similitude sont définis par l'intersection de la droite des centres et de la circonférence lieu des points d'où l'on voit C et C′ sous le même angle. Exprimant cette propriété, on trouve pour équation de la circonférence

$$\frac{\lambda^2 + \mu^2 - \nu}{(x+\lambda)^2 + (y+\mu)^2} = \frac{p^2}{(x-a)^2 + y^2}.$$

La droite des centres est

$$\mu(x-a) - (\lambda + a)y = 0.$$

Éliminons λ et μ entre ces deux équations et l'équation (3); on obtient finalement, après suppression du facteur $[(x-a)^2 + y^2]$,

$$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0.$$

Le lieu est donc une strophoïde droite passant par le centre du cercle C et ayant, pour point double, le point double du limaçon. Il est à remarquer que ce lieu est indépendant de p.

1985.

(1903, p. 528.)

On sait que le lieu des milieux des cordes normales à une ellipse est une sextique.

Montrer que l'aire de cette courbe est la moitié de celle de l'ellipse de Frégier relative à l'ellipse donnée.

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. A.-H. Couvert.

Soit $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'ellipse considérée; la normale à cette courbe au point d'anomalie excentrique φ est

$$a \sin\varphi . x - b \cos\varphi . y = c^2 \sin\varphi \cos\varphi,$$

Digitized by Google

et le diamètre de cette droite est

$$b^2 \cos\varphi . x + a^2 \sin\varphi . y = 0.$$

En éliminant φ entre ces deux équations, on a la sextique considérée

$$(b^2x^2 + a^2y^2)^2 (a^6y^2 + b^6x^2) - a^4b^4c^4x^2y^2 = 0.$$

En coordonnées polaires, cette courbe a pour équation

$$\rho^2 = \frac{(abc)^4 \sin^2\theta \cos^2\theta}{(b^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta)^2 (a^6 \sin^2\theta + b^6 \cos^2\theta)}.$$

L'aire A de la courbe sera

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \, d\theta,$$

$$A = 2(abc)^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta}{(a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta)^2 (a^6 \sin^2\theta + b^6 \cos^2\theta)}.$$

Posons $\tang\theta = t$,

$$d\theta = \frac{dt}{1+t^2}$$

et

$$A = 2(abc)^4 \int_0^{\infty} \frac{t^2 \, dt}{(a^2t^2 + b^2)^2 (a^6t^2 + b^6)}.$$

Or

$$\frac{t^2}{(a^2t^2 + b^2)^2 (a^6t^2 + b^6)}$$
$$= \frac{1}{a^4 - b^2}\left(\frac{1}{a^2}\frac{1}{(a^2t^2 + b^2)^2} + \frac{b^2}{a^2(a^4 - b^4)}\frac{1}{a^2t^2 + b^2} - \frac{a^2b^2}{a^4 - b^4}\frac{1}{a^6t^2 + b^6}\right).$$

Donc

$$A = \frac{2a^4b^4c^2}{a^2 + b^2}\left(\frac{1}{a^2}\int_0^{\infty} \frac{dt}{(a^2t^2 + b^2)^2} + \frac{b^2}{a^2(a^4 - b^4)} \times \int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2t^2 + b^2} - \frac{a^2b^2}{a^4 - b^4}\int_0^{\infty} \frac{dt}{a^6t^2 + b^6}\right).$$

Or

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2t^2 + b^2} = \frac{1}{ab}\int_0^{\infty} \frac{d\left(\frac{at}{b}\right)}{1 + \left(\frac{at}{b}\right)^2} = \frac{1}{ab}\left(\text{arc tang}\,\frac{at}{b}\right)_0^{\infty} = \frac{\pi}{2ab}$$

Digitized by Google

et

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(a^2t^2+b^2)^2} = \frac{1}{ab^3}\int_0^\infty \frac{d\left(\frac{at}{b}\right)}{\left[1+\left(\frac{at}{b}\right)^2\right]^2}$$

$$= \frac{1}{2ab^3}\int_0^\infty \frac{d\left(\frac{at}{b}\right)}{1+\left(\frac{at}{b}\right)^2} = \frac{\pi}{4ab^3},$$

$$\int_0^\infty \frac{dt}{a^6t^2+b^6} = \frac{1}{a^3b^3}\int_0^\infty \frac{d\left(\frac{a^3t}{b^3}\right)}{1+\left(\frac{a^3t}{b^3}\right)^2} = \frac{\pi}{2a^3b^3};$$

d'où

$$A = \frac{2a^4b^4c^2}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{a^2}\frac{\pi}{4ab^3} + \frac{b^2}{a^2(a^4-b^4)}\frac{\pi}{2ab} - \frac{a^2b^2}{a^4-b^4}\frac{\pi}{2a^3b^3}\right),$$

$$A = \frac{\pi ab^3c^2}{a^2+b^2}\left(\frac{1}{2b^2} + \frac{b^2}{a^4-b^4} - \frac{a^2b^2}{(a^4-b^4)b^2}\right)$$

$$= \frac{\pi abc^2(a^2-b^2)^2}{2(a^2+b^2)(a^4-b^4)},$$

$$A = \frac{\pi ab}{2}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2.$$

Or, l'ellipse de Frégier a pour équation

$$\frac{x^2}{\left(\frac{ac^2}{a^2+b^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{bc^2}{a^2+b^2}\right)^2} = 1$$

(*voir*, par exemple : Kœhler, *Exercices de Géométrie analytique*, Ire Partie, p. 57). L'aire A′ de cette ellipse est

$$A' = \pi\frac{abc^4}{(a^2+b^2)^2}.$$

Nous voyons alors que

$$A = \frac{A'}{2}.$$

C. Q. F. D.

1986.

(1903, p. 576.)

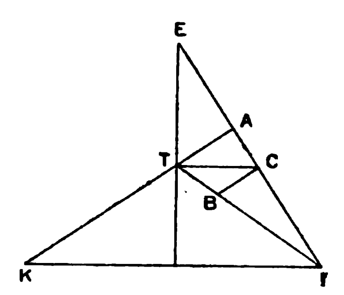
D'un point arbitraire T *on mène à une parabole donnée les tangentes* TA, TB. *Sur la normale en* A *on projette*

orthogonalement en C *le point de contact* B. *Du point* T *on élève la perpendiculaire* TE *à* TC, *elle coupe en* E *la normale en* A : *quel est le lieu du point* E, *lorsque* T *varie de position?* (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. R. B.

Soit I le point où TB rencontre AC. Du point I menons à la parabole la tangente autre que IB, et soit K le point de



rencontre de cette tangente et de AT. On a, d'après une propriété connue de la parabole,

$$\frac{KT}{KA} = \frac{IB}{IT} = \frac{IC}{IA},$$

KI est donc parallèle à TC.

Il en résulte immédiatement que le point E est l'orthocentre du triangle TKI, circonscrit à la parabole. E appartient donc à la directrice, qui se trouve être le lieu demandé.

Solution analytique de M. LEZ.

ERRATA.

A.-G. GREENHILL, *Étude géométrique du mouvement planétaire :*

Page 339, ligne 9, *au lieu de :* en $P_1 P_2$, *lire :* en PP_2.
» 341, ligne 23, *au lieu de :* direction, *lire :* directrice.
» 347, ligne 12, *au lieu de :* $\frac{1}{2} v =$, *lire :* $\frac{1}{2} v^2$.

Digitized by Google

NIEWENGLOWSKI (**B.**), Inspecteur de l'Académie de Paris, Docteur ès Sciences, et **GERARD** (**L.**), Professeur au Lycée Ampère, Docteur ès Sciences. — **Cours de Géométrie élémentaire** à l'usage des élèves de **Mathématiques élémentaires**, de **Mathématiques spéciales**, des candidats aux Écoles du Gouvernement et des candidats à l'agrégation.

I. *Géométrie plane*. In-8 (23 × 14) de xx-362 pages, avec 289 figures, cartonné; 1898 .... 5 fr.
Broché .... 4 fr.

II. *Géométrie dans l'espace*. In-8 (23 × 14) de 496 pages, avec 363 fig., cartonné; 1899 .... 6 fr.
Broché .... 5 fr.

— **Cours de Géométrie élémentaire** à l'usage du Premier Cycle (section B) et du Second Cycle (section C et D).

I. *Géométrie plane*. In-8 (23 × 14) de xx-251 pages, avec 226 figures, cartonné; 1903 .... 3 fr. 50 c.
Broché .... 2 fr. 50 c.

II. *Géométrie dans l'espace*. In-8 (23 × 14) de 263 pages, avec 208 fig., cartonné; 1903 .... 3 fr. 50 c.
Broché .... 2 fr. 50 c.

— **Cours de Géométrie élémentaire** à l'usage du Premier Cycle (section A) et du Second Cycle (sections A et B).

I. *Géométrie plane*. In-8 (23 × 14) de xvi-163 pages, avec 182 figures, cartonné; 1903 .... 3 fr.
Broché .... 2 fr.

II. *Géométrie dans l'espace*. In-8 (23 × 14) de 122 pages, avec 93 fig., cartonné; 1903 .... 3 fr.
Broché .... 2 fr.

NIEWENGLOWSKI (**B.**), Docteur ès Sciences, ancien Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand, Inspecteur de l'Académie de Paris. — **Cours de Géométrie analytique**, à l'usage des Élèves de la Classe de Mathématiques spéciales et des Candidats aux Écoles du Gouvernement. 3 volumes grand in-8, avec nombreuses figures, se vendant séparément.

Tome I : *Sections coniques*, avec 120 figures; 1894 .... 10 fr.

Tome II : *Construction des courbes planes. Compléments relatifs aux coniques*, avec 180 figures; 1895 .... 8 fr.

Tome III : *Géométrie dans l'espace* (avec une Note de M. E. Borel, maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille, *Sur les Transformations en Géométrie*), avec 43 figures; 1896 .... 14 fr.

ROUCHÉ (**Eug.**) et **COMBEROUSSE** (**Ch. de**). — **Éléments de Géométrie.** 7e édition conforme aux derniers programmes (Classes de Mathématiques A et B), revue et complétée par Eugène Rouché, Membre de l'Institut, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, Examinateur de sortie à l'École Polytechnique. In-8 de xl-611 pages, avec 485 figures et 543 questions proposées; 1904 .... 6 fr.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Septembre 1904.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6ᵉ).

APPELL (Paul), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Centrale, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — **Cours de Mécanique** à *l'usage des candidats à l'École Centrale des Arts et Manufactures*. In-8 de 271 pages et 143 figures; 1902.......... 7 fr. 50 c.

LAURENT (H.), Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique et ancien Élève de cette École. — **Traité d'Algèbre**, à l'usage des candidats aux Écoles du Gouvernement. Revu et mis en harmonie avec les derniers programmes, par *Marchand*, ancien Élève de l'École Polytechnique. 4 volumes in-8.

Iʳᵉ Partie. — *Algèbre élémentaire*, à l'usage des Classes de Mathématiques élémentaires. 4ᵉ édition; 1887.......... 4 fr.

IIᵉ Partie. — *Analyse algébrique*, à l'usage des Classes de Mathématiques spéciales. 5ᵉ édition; 1894.......... 4 fr.

IIIᵉ Partie. — *Théorie des équations*, à l'usage des Classes de Mathématiques spéciales. 5ᵉ édition; 1894.......... 4 fr.

IVᵉ Partie. — Compléments : *Théorie des polynomes à plusieurs variables*; 1894.......... 1 fr. 50 c.

34577 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.


Digitized by Google

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Publication fondée en 1842 par Gerono et Terquem,
et continuée par Prouhet, Bourget, Brisse, Rouché, Antomari et Duporcq.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME IV.

OCTOBRE 1904.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris,
à M. Laisant, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,
ou à M. Bourlet, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,
ou à M. Bricard, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.
(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Digitized by Google

Rédacteur de service : M. R. BRICARD.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences

Besançon : M. ÉT. DELASSUS. — Bordeaux : M. PADÉ. — Caen : M. A. DE SAINT-GERMAIN. — Clermont-Ferrand : M. C. GUICHARD. — Dijon : M. DUPORT. — Grenoble : M. J. COLLET. — Lille : M. BOULANGER. — Lyon : M. L. AUTONNE. — Marseille : M. SAUVAGE. — Montpellier : M. E. FABRY. — Nancy : M. H. VOGT. — Paris : M. RAFFY. — Poitiers : M. MAILLARD. — Rennes : M. LE ROUX. — Toulouse : M. COSSERAT.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

CAHEN (E.), ancien Élève de l'École Normale supérieure, Professeur de mathématiques spéciales au Collège Rollin. — **Éléments de la Théorie des nombres.** *Congruences. Formes quadratiques. Nombres incommensurables. Questions diverses.* Grand in-8; 1900.............. 12 fr.

INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS (L'), dirigé par *C.-A. Laisant*, Docteur ès Sciences, Examinateur à l'École Polytechnique, et *Émile Lemoine*, Ingénieur civil, ancien Élève de l'École Polytechnique, avec la collaboration de *Ed. Maillet*, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique, et de *A. Grévy*, Docteur ès Sciences, ancien Élève de l'École Normale, Professeur au Lycée Saint-Louis. In-8, mensuel. Tome XI; 1904.

L'abonnement est annuel et part de Janvier.

Prix pour un an (12 NUMÉROS) :

Paris, 7 fr. — Départements et Union postale, 8 fr. 50.

Les années précédentes sauf le Tome I (1894) se vendent chacune. 7 fr.

MM. Laisant et Lemoine ont eu l'heureuse idée de mettre en rapport scientifique les mathématiciens, au moyen d'un organe international dont le titre, *Intermédiaire des Mathématiciens*, indique le but. Ce recueil mensuel, qui paraît depuis janvier 1894, n'admet d'autres articles que des questions posées par les mathématiciens à leurs collègues, soit pour en indiquer l'intérêt général, soit pour les besoins de leurs recherches personnelles, et les réponses à ces questions. La Mathématique est si vaste maintenant que nul n'en connaît complètement même une des branches, et qu'une question de détail (science, histoire, bibliographie) peut arrêter longtemps un savant de premier ordre, si ce détail sort du cadre de ses études ordinaires, tandis qu'elle ne serait qu'un jeu pour un autre.

Cette publication répond évidemment à un besoin, car elle a reçu, dès le principe, l'accueil le plus empressé dans le monde scientifique.

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

[L²17eα]

SUR L'EXTENSION DU THÉORÈME DES POLYGONES DE PONCELET A L'ESPACE, PAR DES POLYÈDRES DE GENRE *un* (¹);

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. Appelons polyèdre homogène un polyèdre dont toutes les faces ont le même nombre x de côtés, dont tous les sommets ont le même nombre y d'arêtes. Un polyèdre homogène de genre *un* donne lieu aux *trois* relations

$$F + S = A,$$
$$Fx = Sy = 2A$$

homogènes par rapport aux trois quantités F, S *et* A. L'élimination de ces trois quantités donne

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} = 1 \quad \text{ou} \quad (x-2)(y-2) = 4.$$

On peut donc avoir

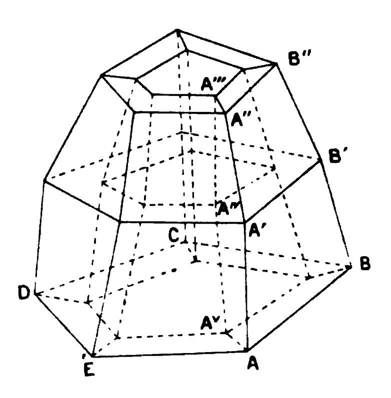
$$(1) \qquad x = 4, \quad y = 4 \quad \text{avec} \quad F = S,$$
$$(2) \qquad x = 3, \quad y = 6 \quad \text{avec} \quad F = 2S,$$
$$(2') \qquad y = 3, \quad x = 6 \quad \text{avec} \quad S = 2F,$$

les deux derniers cas étant corrélatifs l'un de l'autre.

(¹) La première idée de l'emploi de polyèdres de genre *un* pour l'objet indiqué ici s'est présentée au cours d'une conversation avec M. R. Bricard.

Digitized by Google

2. Parmi les polyèdres (1), on peut citer des polyèdres à un trou ou polyèdres *toriques* (*voir* la figure ci-dessous), dont les faces sont des quadrilatères assemblés 4 par 4 autour de chaque sommet. Si p est le nombre des sommets sur un contour tel que ABCD..., et si q est le nombre des sommets sur un contour tel que AA′A″A‴..., le nombre des sommets ou des



faces est pq. Le plus simple de ces polyèdres correspond à $p = 3$, $q = 3$; il a 9 sommets et 9 faces.

3. Les polyèdres (2) ont pour faces des triangles assemblés 6 par 6 autour de chaque sommet (sommets hexaèdres). Le plus simple de ces polygones correspond à $S = 7$.

On se donne à volonté les sommets 1, 2, ..., 7. On a les arêtes en joignant chaque sommet aux six autres. Pour former les 14 faces, on se rappelle (théorie des systèmes triples) que sept objets 1, 2, ..., 7 donnent lieu à sept triades, deux objets pris à volonté faisant partie d'une triade et d'une seule; un tel système triple donnera donc 7 faces, chacune de 21 arêtes appartenant à l'une de ces faces; au moyen de deux systèmes

Digitized by Google

triples, on aura les 14 faces, chaque arête étant commune à deux faces ([1]). On prendra par exemple

124, 235, 346, 457, 561 672, 713

et

134, 245, 356, 467, 571, 612, 723.

On peut encore, pour former ces faces, écrire cycliquement

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, ..., 1, 2, ..., 7,

barrer de trois en trois, ce qui donne

1, 2, 4, 5, 7, 1, 3, 4, 6, 7, 2, 3, 5, 6,

et les 14 faces donnent la chaîne fermée

124, 245, 457, 571, 713, ..., 612.

On peut enfin considérer les 7 tétraèdres

1234, 2345, ..., 6712, 7123;

chacune des faces 123, 234, ..., 712 est commune à deux tétraèdres voisins; en supprimant ces faces, il reste les 14 faces du polyèdre torique.

Cette construction a été indiquée par Möbius, qui paraît s'être occupé le premier de polyèdres de genre *un* ([2]).

II.

4. De combien de paramètres dépendent les polyèdres considérés? Les sommets donneraient lieu à 3S paramètres, si les faces étaient nécessairement des triangles;

([1]) Ce mode de formation des faces m'a été indiqué par M. Bricard.

([2]) *Voir* l'Ouvrage de M. Max Brückner (*Vielecke und Vielflache*, p. 221. Leipzig, 1900).

Digitized by Google

mais il faut défalquer $x - 3$ paramètres pour chaque face lorsque les faces ont x côtés; le nombre des paramètres restants est

$$3S - F(x-3)$$

ou

$$3(F+S) - 2(F+S)$$

ou

$$F + S \quad (^1).$$

Si donc le polyèdre doit être *circonscrit à une quadratique et inscrit à une autre*, ce qui forme $F + S$ conditions, il est déterminé, au moins en apparence. Il y a lieu de se demander si la recherche d'un tel polyèdre n'est pas un problème susceptible d'indétermination.

5. Considérons les deux quadriques de révolution

$$(\Sigma) \qquad a(x^2+y^2) + cz^2 + d = 0,$$

$$(\Sigma') \qquad a'(x^2+y^2) + c'z^2 + 2mz + d' = 0,$$

et un polyèdre torique circonscrit à la première et inscrit à la seconde. Nous supposerons que les polygones ABC..., A′B′C′..., ... sont des polygones réguliers, situés dans des plans parallèles au plan des xy, ayant leurs côtés parallèles, et dont les centres sont sur l'axe des z. Le plan des zx étant supposé perpendiculaire aux arêtes AB, A′B′, ..., en leurs milieux M, M′, ..., on a dans ce plan un polygone de q côtés, MM′..., circonscrit à la conique

$$(S) \qquad y = 0, \qquad ax^2 + cz^2 + d = 0.$$

---

[1] Ce nombre, exact pour les polyèdres (2) et (2′), est un *minimum* dans le cas des polyèdres (1). Il a, en effet, été obtenu en écrivant que le fait, pour chaque face, d'être plane, impose $F(4-3) = F$ conditions. Or il est parfaitement possible que ces conditions ne soient pas indépendantes. *Voir* la note suivante.

Digitized by Google

Les points AA'... sont sur la conique obtenue en coupant la quadrique Σ' par le plan

$$y = x \tang \frac{\pi}{p}.$$

et les points MM'... sont sur la conique

$$(S') \qquad y = 0, \qquad a'x^2 \operatorname{séc}^2 \frac{\pi}{p} + c'z^2 + 2mz + d' = 0.$$

Les deux coniques S et S' sont liées par une relation invariante puisqu'il existe un polygone de q côtés circonscrit à l'une et inscrit à l'autre; *les deux quadriques Σ et Σ' sont donc aussi liées par une relation invariante,* ce qui confirme la prévision du n° 4.

6. Soit, par exemple, $p = 3$, $q = 3$. On a, à cause de $p = 3$,

$$(S) \qquad ax^2 + cz^2 + d = 0,$$

$$(S') \qquad 4a'x^2 + c'z^2 + 2mz + d' = 0.$$

La condition de fermeture pour $q = 3$ est celle-ci : l'équation en λ relative aux deux coniques étant formée d'après l'équation

$$\lambda S + S' = 0,$$

la somme des racines carrées des racines de cette équation doit être nulle. L'une des valeurs de λ est d'ailleurs

$$\lambda = \frac{-4a'}{a},$$

et les deux autres sont données par l'équation

$$(3) \qquad (\lambda c + c')(\lambda d + d') - m^2 = 0:$$

en désignant par λ' et λ'' les racines de cette équation

Digitized by Google

on doit donc avoir

$$2\sqrt{\frac{-a'}{a}} \pm \sqrt{\lambda'} \pm \sqrt{\lambda''} = 0.$$

Or, si l'on forme l'équation en λ relative aux deux quadriques

$$(\Sigma) \qquad ax^2 + ay^2 + cz^2 + d = 0,$$
$$(\Sigma') \qquad a'x^2 + a'y^2 + c'z^2 + 2mz + d' = 0,$$

d'après l'équation

$$\lambda\Sigma + \Sigma' = 0,$$

deux des racines ont pour valeur commune

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-a'}{a},$$

et les deux autres λ_3 et λ_4 ont les valeurs désignées plus haut par λ' et λ''. *La condition de fermeture est donc ici :*

$$\sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_2} \pm \sqrt{\lambda_3} \pm \sqrt{\lambda_4} = 0;$$

ce résultat est de nature à donner confiance dans les vues exposées ici pour l'extension véritable du théorème des polygones de Poncelet à l'espace (¹).

7. Soit encore $p = 4$, $q = 4$. On a, à cause de $p = 4$,

$$(S) \qquad ax^2 + cz^2 + d = 0,$$
$$(S') \qquad 2a'x^2 + c'z^2 + 2mz + d' = 0.$$

La condition de fermeture pour $q = 4$ est que, dans l'équation en λ formée comme il est dit plus haut,

---

(¹) Le polyèdre considéré ici dépend de 19 et non de 18 paramètres, comme le montre la considération des triangles ABC, A′B′C′, A″B″C″. Le problème qui se pose à son sujet semble donc être, *a priori*, un problème simplement indéterminé; il se trouve être, dans le cas considéré, un problème impossible ou doublement indéterminé.

Digitized by Google

l'une des racines soit égale à la somme des deux autres. L'une des valeurs de λ est ici

$$\lambda = \frac{-2a'}{a},$$

et les deux autres sont données par l'équation (3); on doit donc avoir, soit

$$-\frac{2a'}{a} = \lambda' + \lambda'',$$

soit

$$-\frac{2a'}{a} = \pm(\lambda' - \lambda'').$$

En conservant les notations du n° 6 *la condition de fermeture est donc ici, soit*

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4,$$

soit

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \pm(\lambda_3 - \lambda_4);$$

même observation qu'à la fin du numéro précédent.

8. Le temps me manque pour pousser la question plus loin; je souhaite que d'autres fassent ce que je ne puis faire.

[M³5, M²3]

CONTOURS VARIABLES INSCRITS A UNE CUBIQUE GAUCHE, CIRCONSCRITS PAR LES PLANS DE LEURS ANGLES A UNE SURFACE RÉGLÉE DU TROISIÈME ORDRE;

Par M. G. FONTENÉ.

Si l'on cherche un polygone de n côtés inscrit à une courbe gauche donnée et circonscrit par les plans de ses angles à une surface donnée, le problème est en

Digitized by Google

général déterminé; le théorème que l'on trouvera au n° 7 a donc un caractère paradoxal.

I.

1. Soit une cubique gauche Γ donnée par les formules

(1) $$x = \lambda^3, \quad y = \lambda^2, \quad z = \lambda, \quad t = 1.$$

Considérons les plans *b*, en nombre doublement infini, qui coupent la cubique en trois points A, B, C dont les paramètres α, β, γ vérifient la relation triplement linéaire, symétrique en α et γ,

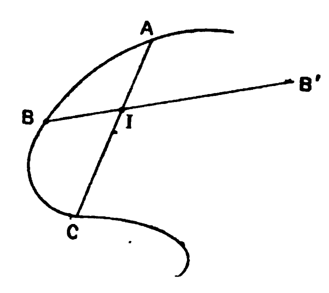
(2) $$A\alpha\gamma.\beta + B(\alpha+\gamma)\beta + B'\alpha\gamma + C\beta + C'(\alpha+\gamma) + D = 0;$$

l'enveloppe de ces plans est une surface de troisième classe. En effet, soient P et Q deux points de la cubique; comme le plan *b* n'a en commun avec la courbe que les points A, B, C, si l'on considère un plan *b* passant par PQ, les points P et Q (dans cet ordre) sont pour ce plan les points A et B, ou les points B et A, ou les points extrêmes A et C; la relation (2) étant triplement linéaire, il existe un seul plan *b* passant par PQ tel que P et Q soient A et B pour ce plan, ...; l'enveloppe du plan *b* est donc une surface de troisième classe, deux des plans tangents qui passent par une corde PQ de la cubique étant de même nature, le dernier étant d'une nature spéciale (relativement à PQ).

2. Cette surface est réglée et contient la cubique. En effet, si l'on se donne β, on a entre α et γ une relation involutive; le point B étant donné, il y a donc

Digitized by Google

involution entre A et C sur la cubique, de sorte que les cordes AC sont les génératrices d'un même système d'une quadrique passant par la cubique; parmi les génératrices de l'autre système, une passe en B, soit BB'; comme BB' rencontre les cordes AC relatives au point B,



on voit que tout plan mené par BB' est un plan tangent à la surface enveloppe considérée, de sorte que cette droite est une génératrice de cette surface.

3. Il est facile de voir géométriquement que toute surface réglée du troisième ordre passant par la cubique détermine par ses plans tangents trois points A, B, C de la courbe liés par une relation de la forme (2). Une telle surface doit donc dépendre de cinq paramètres, comme la relation (2), et c'est ce que l'on peut vérifier par le calcul suivant. (Les nos 3 et 4 peuvent être laissés de côté.)

L'équation d'une surface réglée du troisième ordre est de la forme

$$(x - fy + gz - ht)^2(x - ly + mz - nt)$$
$$= k(x - f'y + g'z - h't)^2(x - l'y + m'z - n't);$$

et cette surface contient la cubique si l'on a identiquement

$$(\lambda^3 - f\lambda^2 + \ldots)^2(\lambda^3 - l\lambda^2 + \ldots)$$
$$\equiv k(\lambda^3 - f'\lambda^2 + \ldots)^2(\lambda^3 - l'\lambda^2 + \ldots).$$

Digitized by Google

Il faut d'abord $k=1$. Si l'on désigne par a, b, c, α, β, γ, a', b', c', ... les racines des quatre polynomes en λ, on doit avoir

$$\begin{aligned}&(\lambda-a)^2(\lambda-b)^2(\lambda-c)^2(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)\\ =\ &(\lambda-a')^2(\lambda-b')^2(\lambda-c')^2(\lambda-\alpha')(\lambda-\beta')(\lambda-\gamma');\end{aligned}$$

on ne peut pas supposer $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$, ..., et il faut prendre

$$\alpha'=\gamma'=b,\qquad \alpha=\gamma=b',\qquad a'=a,\qquad c'=c,\qquad \beta'=\beta;$$

les quatre polynomes en λ sont donc, en remplaçant β par d,

$$\begin{aligned}&(\lambda-b)(\lambda^2-p\lambda+q),\quad (\lambda-b')^2(\lambda-d),\\ &(\lambda-b')(\lambda^2-p\lambda+q),\quad (\lambda-b)^2(\lambda-d);\end{aligned}$$

l'équation de la surface est, avec cinq paramètres,

$$\begin{aligned}&[x-(b+p)y+(bp+q)z-bq.t]^2\\ &\quad\times[x-(2b'+d)y+(b'^2+2b'd)z-b'^2d.t]\\ &=[x-(b'+p)y+(b'p+q)z-b'q.t]^2\\ &\quad\times[x-(2b+d)y+(b^2+2bd)z-b^2d.t]=0.\end{aligned}$$

4. Si l'on veut pousser le calcul jusqu'à la relation (2), on observera qu'une génératrice de la surface est, avec les premières notations,

$$\begin{aligned}x-fy+gz-ht&=\theta(x-f'y+g'z-h't),\\ \theta^2(x-ly+mz-nt)&=x-l'y+m'z-n't;\end{aligned}$$

elle s'appuie sur la cubique en un point B dont le paramètre β est donné par la relation

$$\beta-b=\theta(\beta-b');$$

les équations de la génératrice deviennent

$$\begin{aligned}(\beta-b')(x-fy+gz-ht)&=(\beta-b)(x-f'y+g'z-h't),\\ (\beta-b)^2(x-ly+mz-nt)&=(\beta-b')^2(x-l'y+m'z-n't);\end{aligned}$$

Digitized by Google

en tenant compte des valeurs de f, g, ..., on obtient, après suppression du facteur $b - b'$,

$$x - (\beta + p)y + (p\beta + q)z - q\beta . t = 0,$$

$$\begin{aligned}
&[2\beta - (b + b')]x \\
&\quad - [2\beta^2 + 2d\beta - 2bb' - d(b + b')]y \\
&\quad + [(b + b' + 2d)\beta^2 - 2bb'\beta - 2bb'd]z \\
&\qquad\qquad\qquad - d[(b + b')\beta^2 - 2bb'\beta]t = 0.
\end{aligned}$$

On aura alors la relation entre les paramètres α, β, γ des points A, B, C, déterminés sur la cubique par un plan tangent à la surface, en écrivant que le plan

$$x - (\alpha + \gamma + \beta)y + (\beta\alpha + \beta\gamma + \alpha\gamma)z - \alpha\gamma\beta . t = 0$$

contient la droite précédente. Comme il contient déjà le point B, de coordonnées β^3, β^2, β, 1, il suffira d'écrire que sa trace sur le plan $z = 0$ contient la trace de la droite sur le même plan; on a ainsi la relation

$$\begin{vmatrix}
1 & \alpha + \gamma + \beta & \alpha\gamma\beta \\
1 & \beta + p & q\beta \\
2\beta - (b + b') & \begin{matrix} 2\beta^2 + 2d\beta \\ - 2bb' - d(b + b') \end{matrix} & d[(b + b')\beta^2 - 2bb'\beta]
\end{vmatrix} = 0.$$

Divisant la dernière colonne par β, et retranchant de la seconde la première multipliée par β, on a

$$\begin{vmatrix}
1 & \alpha + \gamma & \alpha\gamma \\
1 & p & q \\
2\beta - (b + b') & \begin{matrix} (2d + b + b')\beta \\ - 2bb' - d(b + b') \end{matrix} & d[(b + b')\beta - 2bb']
\end{vmatrix} = 0;$$

cette relation est triplement linéaire en α, β, γ, symétrique en α et γ.

Digitized by Google

II.

5. Nous établirons maintenant le fait suivant :

Lemme. — *Les n équations*

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha - 2\beta\cos h + \gamma = k, \\ \beta - 2\gamma\cos h + \delta = k, \\ \gamma - 2\delta\cos h + \varepsilon = k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \rho - 2\sigma\cos h + \tau = k, \\ \sigma - 2\tau\cos h + \alpha = k, \\ \tau - 2\alpha\cos h + \beta = k \end{cases}$$

se réduisent à $n - 2$ équations distinctes si l'on prend

$$(4)\qquad h = \frac{2k\pi}{n}.$$

Ajoutons les $n - 2$ premières équations multipliées respectivement par les quantités

$$\sin h,\quad \sin 2h,\quad \sin 3h,\quad \dots,\quad \sin(n-2)h;$$

β disparaît; $\gamma, \delta, \dots, \rho$ disparaissent en vertu de l'identité

$$\sin(p-1)h - 2\sin ph\cos h + \sin(p+1)h = 0;$$

on obtient

$$m\sigma + n\tau + \alpha\sin h = k'$$

avec

$$m = -\sin(n-1)h,\qquad n = \sin(n-2)h,$$

$$k' = k\sin h + k\frac{\sin\frac{nh}{2}\sin\frac{(n-3)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Cette équation sera identique à la $(n-1)^{\text{ième}}$ des

Digitized by Google

équations données (multipliée par $\sin h$) si l'on a

$$m = \sin h, \quad \text{ou} \quad \sin(n-1)h + \sin h = 0,$$
$$\text{ou} \quad \sin\frac{nh}{2}\cos\frac{(n-2)h}{2} = 0;$$
$$n = -2\sin h\cos h, \quad \text{ou} \quad \sin(n-2)h + \sin 2h = 0,$$
$$\text{ou} \quad \sin\frac{nh}{2}\cos\frac{(n-4)h}{2} = 0;$$
$$k' = k\sin h, \quad \text{ou} \quad \sin\frac{nh}{2}\sin\frac{(n-3)h}{2} = 0;$$

en écartant la solution étrangère $h = (2k+1)\pi$, qui se présente pour n impair, on a la solution véritable

$$\sin\frac{nh}{2} = 0, \qquad h = \frac{2k\pi}{n}.$$

6. Théorème. — *Les n équations*

$$(5)\quad \begin{cases} A\alpha\beta\gamma + B\beta(\alpha+\gamma) + B'\alpha\gamma + C\beta + C'(\alpha+\gamma) + D = 0, \\ A\beta\gamma\delta + B\gamma(\beta+\delta) + \dots\dots\dots\dots = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A\tau\alpha\beta + B\alpha(\tau+\beta) + \dots\dots\dots\dots = 0, \end{cases}$$

triplement linéaires, semi-symétriques, se réduisent à $n-2$ équations distinctes sous une condition unique.

Elles renferment alors quatre paramètres arbitraires.

On passe, en effet, des équations (3) aux équations (5) par la substitution

$$\alpha = \frac{p\alpha'+q}{r\alpha'+s}, \qquad \beta = \frac{p\beta'+q}{r\beta'+s}, \qquad \dots,$$

et inversement.

Digitized by Google

III.

7. Théorème. — Sous une condition unique, *il existe en nombre doublement infini des contours polygonaux de* n *côtés* ABC...T, *inscrits à une cubique gauche* Γ, *et tels que les plans* a, b, c, ..., t *de leurs angles soient tangents à une surface réglée de troisième classe, donc de troisième ordre, passant par la cubique; par chaque point* B *de la courbe passe une génératrice* BB′ *de la surface, et les plans* ABC, *en nombre simplement infini, qui passent en* B *contiennent la droite* BB′.

La cubique étant donnée, la surface dépend de quatre paramètres.

Considérons un contour polygonal de n côtés ABC...T, inscrit à la cubique (1), et supposons que les valeurs α, β, γ, ..., τ du paramètre λ aux sommets de ce contour sont assujetties à vérifier les n relations (5), dans le cas où ces relations se réduisent à $n-2$ relations distinctes; le contour est variable avec deux paramètres, et, d'après ce qu'on a vu au début, l'enveloppe des plans a, b, c, ..., t des angles du contour est une surface réglée de troisième ordre passant par la cubique.

Je rappelle que la diagonale AC, par exemple, rencontre la génératrice BB′.

Inversement, la cubique étant toujours donnée, la surface réglée du troisième ordre qui passe par la cubique est seulement astreinte à vérifier une condition de fermeture, variable avec le nombre n des côtés du contour, et cette surface dépend alors de quatre paramètres.

Digitized by Google

IV.

8. J'ai montré précédemment qu'il peut exister en nombre doublement infini des tétraèdres, des octaèdres, des icosaèdres inscrits à une cubique gauche et circonscrits à une quadrique.

Avec des tétraèdres, on a des contours quadrangulaires ABCD, ABDC, ACBD, inscrits à une cubique gauche et circonscrits à une quadrique, avec deux paramètres.

Avec des octaèdres, les diagonales étant AA′, BB′, CC′, si l'on supprime par exemple les six arêtes BC, CA, AB et B′C′, C′A′, A′B′, on a des contours hexagonaux AB′CA′BC′, etc.

Avec des icosaèdres, les diagonales étant OO′, AA′, ..., EE′, si l'on supprime les vingt arêtes OA, ..., OE, O′A′, ..., O′E′, AB, ..., EA, A′B′, ..., E′A′, on a des contours décagonaux AD′BE′CA′DB′EC′, etc.

Hors de ces cas singuliers, si un contour polygonal doublement variable est inscrit à une cubique gauche, je ne crois pas qu'il puisse être circonscrit à une quadrique par les plans de ses angles. En effet, toute corde BC de la cubique fait partie d'au moins un contour ABCDE... de l'espèce indiquée, ce qui donne au moins deux plans ABC, BCD, passant par BC et tangents à l'enveloppe des plans des angles du contour; en outre, il existe au moins un contour ...BMC... pour lequel les sommets B et C sont séparés par un autre; donc, à moins que le point M ne soit A ou D, l'enveloppe est au moins de troisième classe. Or il ne semble pas que M puisse être A ou D si le contour n'est pas emprunté à un polyèdre à faces triangulaires, inscrit à la cubique et circonscrit à la quadrique.

Digitized by Google

[D1d, D3d]

LES FONCTIONS D'UNE INFINITÉ DE VARIABLES INDÉPENDANTES;

PAR M. J. LE ROUX,
Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

1. Il existe des expressions dépendant d'une infinité d'éléments et dont les propriétés sont familières à tous les mathématiciens : séries, produits, déterminants infinis, etc. Mais on peut être amené aussi à considérer d'autres expressions où des éléments en nombre infini figurent sous une forme beaucoup plus compliquée, et à étudier la manière dont elles se comportent lorsqu'on fait varier les éléments considérés. Telles sont par exemple les intégrales des équations aux dérivées partielles, regardées comme des fonctions des constantes initiales ([1]). On a ainsi de véritables fonctions d'une infinité de variables indépendantes. Celles qui se présentent dans les applications jouissent de propriétés extrêmement simples, constituant une extension naturelle des propriétés des fonctions de plusieurs variables.

2. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ une suite infinie dé-

([1]) Dans un Mémoire paru récemment au *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* j'ai exposé les fondements de cette théorie et j'en ai fait l'application aux équations aux dérivées partielles. *Voir* aussi, dans les *Travaux scientifiques de l'Université de Rennes :* Les fonctions d'une infinité de variables indépendantes (1902); Intégration d'une équation aux dérivées partielles à une infinité de variables indépendantes (1903).


Digitized by Google

nombrable de variables indépendantes, et

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

une fonction de ces variables.

Dans ce qui suit nous n'aurons pas en vue le domaine *complet* d'existence de la fonction considérée, mais seulement un domaine *restreint* où la fonction existe certainement et où l'on peut la soumettre à des opérations déterminées. Dans le cas des variables réelles nous supposerons le domaine défini par des inégalités de la forme suivante :

$$a_n < x_n < b_n,$$

a_n et b_n étant des nombres fixes, indépendants des valeurs attribuées aux variables autres que x_n. La limite inférieure des différences $b_n - a_n$ peut être égale à zéro ; c'est-à-dire que, étant donné un nombre positif ε, arbitrairement petit, il existe toujours une infinité de différences $b_n - a_n$, différentes de zéro, et satisfaisant à l'inégalité

$$|b_n - a_n| < \varepsilon.$$

Nous dirons alors que le domaine est *évanouissant*. Tel est, par exemple, le domaine de convergence de la série

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots.$$

Un changement de variables, défini par la formule

$$y_n = \frac{x_n - a_n}{b_n - a_n},$$

remplace un domaine évanouissant par un domaine non évanouissant. On peut évidemment, s'il y a lieu, appliquer cette transformation à une partie seulement des variables.

Digitized by Google

Pour les variables complexes nous supposerons de même que le domaine restreint est défini en assujettissant chaque variable x_n à rester à l'intérieur d'un contour simple *fixe* C_n, limitant une aire non nulle A_n. Soit ρ_n la limite supérieure des rayons des cercles intérieurs à C_n. Si la limite inférieure des nombres ρ_n est égale à zéro, quand n croît indéfiniment, nous dirons encore que le domaine est évanouissant. Il est toujours possible, par un changement de variables analogue à celui que nous avons considéré plus haut, de rendre un domaine non évanouissant. Dans certaines questions on peut être amené à considérer un domaine mixte dans lequel les variables se classent en deux catégories, les unes sont réelles (ou représentées par des points d'une courbe), les autres complexes (variant dans une aire).

3. Je regarde tout système de valeurs attribuées aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ comme les coordonnées d'un point, que j'appelle le point x. Une fonction

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

est définie dans un domaine D, si à tout point x de ce domaine correspond pour la fonction une valeur bien déterminée.

Une fonction $f(x)$ définie dans un *domaine non évanouissant* est continue, si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre η, tel que les inégalités

$$|h_i| < \eta$$

entraînent

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon.$$

On a posé

$$f(x+h) = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n, \ldots).$$

Digitized by Google

4. Il y a lieu maintenant d'introduire une notion nouvelle : celle de *fonction convergente*. Soient

$$x^0 \qquad (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \ldots)$$

et

$$x^0 + h \qquad (x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_n^0 + h^n, \ldots)$$

deux points quelconques d'un domaine restreint D. Désignons par $f_m(x^0 + h, x^0)$ ce que devient $f(x^0 + h)$ quand on y néglige les accroissements $h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots$ des variables d'indice supérieur à m :

$$(1) \quad \begin{cases} f_m(x^0 + h, x^0) \\ \quad = f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, x_3^0 + h_3, \ldots, x_m^0 + h_m, x_{m-1}^0, x_{m+2}^0, \ldots). \end{cases}$$

Je dis que *la fonction $f(x)$ est convergente dans le domaine* D *si la différence*

$$f(x^0 + h) - f_m(x^0 + h, x^0)$$

tend vers zéro quand m croît indéfiniment.

On peut alors faire correspondre à tout nombre positif ε un nombre μ, tel que l'inégalité

$$(2) \qquad m > \mu$$

entraîne la suivante :

$$(3) \qquad |f(x^0 + h) - f_m(x^0 + h, x_0)| < \varepsilon.$$

Le nombre μ devra dépendre en général des h. Nous dirons que la fonction $f(x)$ est uniformément convergente dans le domaine D, si le nombre μ peut être choisi indépendamment des h, de manière que l'inégalité (3) soit une conséquence de (2), sous la seule condition que le point $x^0 + h$ appartienne, comme x^0, au domaine considéré. Dans ces conditions la limite μ peut être aussi regardée, jusqu'à un certain point, comme indé-

Digitized by Google

pendante de x^0. Cela résulte immédiatement de l'identité

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} f(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2, \ldots, x_m^0+h_m, x_{m+1}^0+h_{m+1}, \ldots) \\ \quad -f(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2, \ldots, x_m^0+h_m, x_{m+1}^0+k_{m+1}, x_{m+2}^0+k_{m+2}, \ldots) \\ = [f(x^0+h)-f_m(x^0+h, x^0)] \\ \quad -[f(x_1^0+h_1, \ldots, x_m^0+h_m, x_{m+1}^0+k_{m+1}, \ldots)-f_m(x^0+h, x^0)]. \end{array}\right.$$

La notion de fonction convergente ne présente rien d'artificiel. Les intégrales des équations aux dérivées partielles sont, dans de certaines limites, des fonctions convergentes des constantes initiales qui servent à les déterminer.

Une fonction peut évidemment être convergente, et même uniformément convergente, sans être continue; de même elle peut être définie et continue sans être convergente; on en a un exemple très simple en considérant le prolongement d'une série de Taylor en dehors de son cercle de convergence. Considérons l'ensemble des fonctions $f(z)$ analytiques à l'intérieur d'une aire simple C entourant l'origine. Chaque fonction de l'ensemble est définie par les valeurs qu'elle prend, ainsi que la suite de ses dérivées pour $z=0$. Désignons par $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ces valeurs. Pour tout point α intérieur au cercle de convergence, on a

$$f(\alpha)=x_0+\frac{\alpha}{1}x_1+\frac{\alpha^2}{1.2}x_2+\ldots.$$

Je désigne cette valeur par

$$\varphi(x_0, x_1, x_2, \ldots)=\varphi(x).$$

Quand le point α est extérieur au cercle de convergence, mais intérieur à l'aire C, la fonction $\varphi(x)$ est encore déterminée, mais elle n'est plus convergente.

Digitized by Google

On a, en effet,

$$\varphi_m(x, 0) = x_0 + \frac{\alpha}{1} x_1 + \frac{\alpha^2}{1.2} x_2 + \ldots + \frac{\alpha_m}{m!} x_m,$$

et cette expression n'a plus pour limite $\varphi(x)$ quand m croît indéfiniment.

5. Toute fonction convergente peut être représentée par une série convergente : telle est, en effet, la série dont le terme général u_n est de la forme

$$u_n = f_n(x, x^0) - f_{n-1}(x, x^0),$$

où l'on regarde les x^0 comme des valeurs numériques fixes. Si la fonction $f(x)$ est uniformément convergente dans le domaine D la série considérée l'est aussi. Cette série jouit en outre de la propriété que chacun de ses termes de rang fini ne contient qu'un nombre limité de variables, le nombre de ces variables croissant indéfiniment avec le rang du terme : c'est ce que j'appelle une *série normale*.

Toute série normale uniformément convergente dans un domaine D définit une fonction uniformément convergente dans ce domaine.

6. La théorie des limites s'applique sans modification aux fonctions convergentes et uniformément convergentes.

La somme ou le produit d'un nombre limité de fonctions convergentes est une fonction convergente.

Le quotient de deux fonctions convergentes est une fonction convergente, pourvu que le dénominateur soit différent de zéro dans le domaine considéré.

On peut même concevoir des séries dont les termes soient des fonctions d'une infinité de variables. Je me

Digitized by Google

contente d'énoncer les théorèmes suivants dont la démonstration ne présente aucune difficulté :

I. *Une série dont les termes sont des fonctions uniformément convergentes dans un domaine* D *et qui est elle-même uniformément convergente dans* D *représente dans ce domaine une fonction uniformément convergente.*

II. *Une série uniformément convergente dans un domaine* D, *et dont les termes sont des fonctions continues dans ce domaine, y représente une fonction continue.*

7. Supposons maintenant que la fonction désignée par $f_m(x, x_0)$ soit *une fonction analytique* des m variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, quelque grand que soit m, le domaine étant un domaine restreint de variables complexes. Nous dirons alors que la fonction $f(x)$ est elle-même *une fonction analytique.*

Il est facile d'étendre aux *fonctions analytiques uniformément convergentes* la formule de Taylor. En effet, la fonction $f(x)$ étant uniformément convergente peut être représentée par une série normale uniformément convergente, dont chaque terme est une fonction analytique des variables, dont il dépend

$$f(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots.$$

Posons

$$x_n = x_n^0 + h_n,$$

et supposons les x_n^0 et les h_n tels que les points $x_n^0 + th_n$ restent intérieurs au domaine D lorsque t prend toutes les valeurs possibles de module inférieur ou égal à *un*.

Les termes de la série

$$f(x_n^0 + ht) = \Sigma\, u_n(x^0 + ht)$$

Digitized by Google

sont des fonctions analytiques de t, et la série est uniformément convergente dans une aire qui renferme en entier le cercle de rayon *un*. Donc la fonction $f(x^0+ht)$ est développable suivant les puissances croissantes de t en une série qui reste convergente pour $t=1$.

Dans le développement, le coefficient de t^n est égal à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(x_0+ht)}{t^{n+1}}$$

évaluée suivant la circonférence de rayon *un*, ayant pour centre l'origine, ou suivant tout autre contour équivalent; nous allons faire voir d'abord que ce coefficient est égal à la limite, pour m infini, de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f_m(x^0+ht,x^0)}{t^{n+1}}.$$

Considérons, en effet, l'intégrale

$$(5)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(x^0+ht)-f_m(x^0+ht,x^0)}{t^{n+1}}.$$

La fonction $f(x)$ étant uniformément convergente, on peut déterminer un nombre m' tel que, pour $m>m'$, on ait

$$|f(x^0+ht)-f_m(x^0+ht,x^0)|<\varepsilon,$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit.

D'autre part, sur le contour d'intégration, le module de t est égal à *un*, et la longueur du contour est égale à 2π.

Donc le module de l'intégrale (5) est, dans les conditions énoncées, inférieur à ε, ce qui démontre notre proposition.

La fonction $f_m(x^0+ht,x^0)$ ne dépend que d'un

Digitized by Google

nombre limité m de variables; on a donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f_m(x^0+ht,x^0)}{t^{n+1}}$$
$$=\frac{1}{n!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1^0}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2^0}+\ldots+h_m\frac{\partial}{\partial x_m^0}\right)^n f(x_1^0,x_2^0,\ldots).$$

Nous en déduisons les deux propositions suivantes :

1° *Dans les conditions que nous avons considérées, les polynomes homogènes en h*

$$\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1^0}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2^0}+\ldots+h_m\frac{\partial}{\partial x_m^0}\right)^n f(x^0)$$

admettent pour limites des fonctions uniformément convergentes des h, quand m croît indéfiniment.

En particulier, la série

$$h_1\frac{\partial f}{\partial x_1^0}+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2^0}+\ldots+h_m\frac{\partial f}{\partial x_m^0}+\ldots$$

est uniformément convergente.

2° *La fonction analytique $f(x^0+h)$ est développable en série de Taylor, par la formule*

$$f(x^0+h)=U_0(x^0)+\frac{1}{1}U_1(h,x^0)+\frac{1}{1.2}U_2(h,x^0)+\ldots$$
$$+\frac{1}{n!}U_n(h,x^0)+\ldots,$$

le terme $U_n(h,x^0)$ étant défini par la formule

$$U_n(h,x^0)=\left(\sum_{i=0}^{i=\infty}h_i\frac{\partial}{\partial x_i^0}\right)^n f(x^0).$$

Comme application de la première proposition, considérons un produit infini

$$P=(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_m)\ldots,$$

Digitized by Google

et supposons-le uniformément convergent dans le domaine défini par les inégalités

$$|x_i| < \rho_i.$$

En faisant alors $x_i^0 = 0$, on trouve que la série

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_m + \ldots$$

doit être uniformément convergente dans le domaine

$$|h_i| < \rho_i.$$

Cette propriété est d'ailleurs bien connue; il était néanmoins intéressant de la rattacher à notre théorie générale.

8. Le module de la différence

$$f(x) - f_m(x, x^0)$$

reste inférieur à un nombre positif ε_m qui tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$. Prenons la dérivée de cette différence par rapport à l'une des variables x_i. Si nous supposons que la variable x_i soit représentée, dans son plan, par un point situé à une distance égale ou supérieure à δ_i du contour de l'aire A_i, nous avons

$$(6) \qquad \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f_m(x, x^0)}{\partial x_i} \right| \leqq \frac{\varepsilon_m}{\delta_i}.$$

Cette égalité fondamentale prend deux formes différentes suivant que i est inférieur ou supérieur à m.

Soit d'abord $i \leqq m$; $f_m(x, x^0)$ dépend alors de la variable x_i et l'inégalité (6) exprime que *les dérivées d'une fonction analytique uniformément convergente sont elles-mêmes des fonctions analytiques uniformément convergentes.*



Soit ensuite $i > m$; la fonction $f_m(x, x^0)$ ne contient plus la variable x_i; l'inégalité (6) se réduit alors à la suivante

$$\left|\frac{\partial f(x)}{\partial x_{m+\alpha}}\right| \leqq \frac{\varepsilon_m}{\delta_{m+\alpha}},$$

en posant $i = m + \alpha$. On a ainsi une limite supérieure de la dérivée. Pour les dérivées d'ordre supérieur il existe évidemment des limites semblables. On a en général

$$\operatorname{mod} \frac{\partial^{p_1+p_2+\ldots+p_r} f(x)}{\partial x_{m+\alpha_1}^{p_1} \partial x_{m+\alpha_2}^{p_2} \ldots \partial x_{m+\alpha_r}^{p_r}} \leqq \frac{p_1!\, p_2! \ldots p_r!\, \varepsilon_m}{\delta_{m+\alpha_1}^{p_1} \delta_{m+\alpha_2}^{p_2} \ldots \delta_{m+\alpha_r}^{p_r}},$$

les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ étant supposés positifs.

Dans l'établissement de ces inégalités on ne suppose d'ailleurs pas nécessairement que la fonction $f(x)$ dépende d'une infinité de variables. Elles pourraient s'appliquer à certains problèmes, qui se présentent dans les applications, où figurent des fonctions dépendant d'un nombre très élevé de variables, ces variables ayant d'ailleurs des influences très inégales sur la variation des fonctions. On est conduit alors à remplacer les fonctions considérées par des fonctions approchées dans lesquelles certaines variables sont remplacées par des constantes.

CORRESPONDANCE.

M. C. — Voici une démonstration géométrique du théorème que M. Troin a fait connaître dans le numéro d'août dernier (p. 361) et qu'on peut énoncer ainsi :

Par les extrémités de la médiane AM *d'un triangle* ABC *on fait passer une circonférence de cercle* (C). *Cette courbe coupe au point* D *la circonférence circonscrite au*

triangle ABC *et au point* E *le côté* BC : *les droites* AB, AD, AC, AE *forment un faisceau harmonique.*

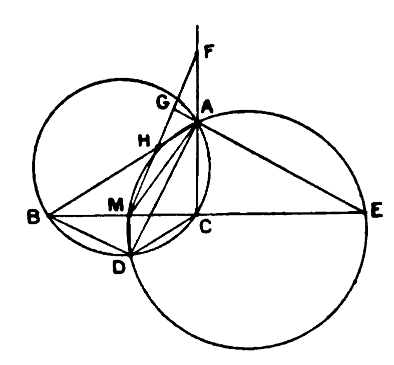
Parallèlement à AD menons la droite MHF qui coupe AB au point H et AC au point F, on a

$$\widehat{HFA} = \widehat{DAC} = \widehat{DBC}.$$

De même

$$\widehat{AHF} = \widehat{BCD}.$$

Le triangle FAH est alors semblable au triangle BDC.



Appelons G le point où AE coupe HF, on a

$$\widehat{HGA} = \widehat{DAE} = \widehat{DME}.$$

Le point G est alors l'homologue de M, donc il est le milieu de HF.

Les droites AH, AG, AF et la parallèle AD à FH forment alors un faisceau harmonique : c'est ce qu'il fallait démontrer.

Dans le même numéro d'août il y a une solution analytique de la question 1984. Pour la résoudre géométriquement on peut dire :

Prenons le centre O comme pôle d'inversion.

Il résulte des données que le lieu demandé a pour transformée une conique dont un foyer est le point O. Inversement, en prenant O pour pôle, cette conique a pour transformée le lieu demandé : ce lieu est donc un limaçon de Pascal.

Digitized by Google

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE.

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Démontrer la formule de Lagrange*

$$f(y) = f(a) + \frac{x}{1!}\varphi(a)f'(a) + \frac{x^2}{2!}D[\varphi^2(a)f'(a)] + \ldots$$
$$+ \frac{x^n}{n!}D^{n-1}[\varphi^n(a)f'(a)] + \ldots$$

qui sert à développer une fonction $f(y)$ de la racine y de l'équation

$$y = a + x\varphi(y)$$

(*on admettra que cette équation possède une racine et une seule dans le voisinage de a lorsque x est suffisamment petit*).

II. *Employer la formule dans l'étude du mouvement elliptique et développer l'anomalie excentrique, le rayon vecteur et l'anomalie vraie suivant les puissances croissantes de l'excentricité e. On poussera le développement jusqu'aux termes en e^4 inclusivement.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une étoile de distance polaire $\delta = 72°9'8''$ et d'ascension droite $Æ = 4^h5^m10^s$ est observée à $2^h25^m7^s$ (temps sidéral) en un lieu de colatitude $\lambda = 43°52'21''$. Quelles sont ses coordonnées zénithales? Les coordonnées étant trouvées, on vérifiera le résultat par l'emploi de l'analogie des sinus, et enfin on cherchera quelle influence pourrait avoir, sur la détermination de la distance zénithale, une erreur de $\pm 1^s$ de temps sidéral faite sur l'heure.* (Juillet 1904.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Détermination de l'heure sidérale, en un lieu de latitude λ, à l'aide d'une hauteur d'une*

Digitized by Google

étoile dont les coordonnées Æ et ⓓ sont connues. Circonstances dans lesquelles il faut opérer pour réduire au minimum l'influence des erreurs d'observation et de latitude.

II. *Détermination simultanée de la latitude et de l'heure à l'aide de deux hauteurs d'une même étoile observée à un intervalle de temps connu. Cas particulier où la latitude est approximativement connue.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calcul de l'anomalie excentrique et de l'anomalie vraie, connaissant l'anomalie moyenne et l'excentricité.*

Application numérique :

$$M = 332^\circ 28' 54'',77; \qquad \log e = \bar{1},3897662.$$

L'anomalie excentrique sera calculée avec une erreur absolue inférieure à 0",1. (Juillet 1904.)

Lille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Connaissant d'une part le développement de la fonction perturbatrice en série trigonométrique, de l'autre les expressions des dérivées des éléments elliptiques, expressions dont la première et la dernière sont*

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\tan g \varphi}{na^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{\partial R}{\partial \varphi} + \sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{R}{\partial e},$$

on demande d'exposer le calcul des perturbations des divers ordres; on montrera comment une modification dans l'expression de la longitude moyenne évite l'introduction du temps comme facteur des lignes trigonométriques. On distinguera ensuite, parmi les inégalités du premier ordre, celles qui sont à courte ou à longue période, et les inégalités séculaires; on montrera en particulier que les inégalités à longue période affectent surtout la longitude moyenne, et que le grand axe n'a pas d'inégalité séculaire du premier ordre.


Digitized by Google

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une étoile* A, *ayant pour déclinaison boréale* 10°, *passe dans le premier vertical de Lille en même temps qu'une autre étoile* B *dont la déclinaison est* + 30°. *Quelle est : 1° la différence d'ascension droite des deux astres; 2° leur distance angulaire? Latitude de Lille :* 50° 38′ 44″. (Juillet 1904.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Description des instruments employés en Astronomie pour déterminer avec précision la direction de la verticale (niveau à bulle d'air et bain de mercure).*

II. *Démontrer qu'en un jour sidéral la position apparente (c'est-à-dire vue à travers l'atmosphère) d'une étoile décrit une section conique autour de sa position vraie (c'est-à-dire vue à travers le vide).*

Étudier le genre de cette section conique.

On prendra pour valeur R *de la réfraction l'expression*

$$R = k \operatorname{tang} z,$$

dans laquelle $k = 58'',3$ *et* z *désigne la distance zénithale vraie de l'étoile.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On observe une même étoile à ses deux passages dans un même vertical d'azimut*

$$A = 28° 41' 52''.$$

Les deux distances zénithales observées, corrigées de la réfraction, sont

$$z_1 = 61° 1' 15'',$$
$$z_2 = 19° 7' \ 3''.$$

On demande de déterminer la latitude du lieu et la déclinaison de l'étoile.

On suppose que les azimuts sont comptés dans le sens du mouvement diurne à partir du point sud de l'horizon.

z_1 *est la hauteur zénithale du passage sud.*

(Juillet 1904.)

Digitized by Google

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Paris.

Épreuve écrite. — I. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0,$$

où a, b, c sont des fonctions continues de x et y dans une certaine région du plan où va rester le point (x, y); de plus, dans cette région, c est négatif.

Démontrer qu'il ne peut y avoir DEUX *intégrales de l'équation précédente prenant sur une courbe fermée* C *une succession de valeurs données et étant continues à l'intérieur de* C *ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres.*

II. *Soit l'équation*

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = cu,$$

où c est une fonction holomorphe de x et y dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$. Montrer que l'équation précédente admet des intégrales de la forme

$$(2) \qquad P(x, y)\log(x^2+y^2) + Q(x, y),$$

où P *et* Q *sont holomorphes autour de l'origine, et où* $P(0, 0)$ *a une valeur donnée g.*

Dans quel problème de la Théorie de la chaleur rencontre-t-on l'équation (1) *avec c positif? Quelle est l'interprétation physique des singularités correspondant à la forme* (2)?

Épreuve pratique. — *Étant donnée l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = u,$$

Digitized by Google

trouver l'intégrale de cette équation qui, pour $x = 0$, se réduit à UN *et qui, pour $y = 0$, se réduit à* UN.

Cette intégrale se présentera sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances de x et de y. Il faut trouver la loi des coefficients de cette série. (Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant considérée l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz + d,$$

où les coefficients a, b, c, d sont holomorphes dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$, démontrer qu'il existe une intégrale z de cette équation déterminée par les conditions suivantes : on a

$$z = f(x) \quad pour \quad y = 0,$$
$$z = \varphi(y) \quad pour \quad x = 0,$$

f et φ étant deux fonctions données, respectivement holomorphes autour de $x = 0$ et de $y = 0$. On suppose d'ailleurs $f(0) = \varphi(0)$.

II. *Étant donné un contour fermé* C, *qu'appelle-t-on* FONCTION DE GREEN

$$G(x, y;\, a, b)$$

relative à l'aire limitée par ce contour et au point (a, b)?

Énoncer les propriétés fondamentales de cette fonction et s'en servir pour trouver l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

s'annulant sur C *et continue à l'intérieur; la fonction $f(x, y)$ est une fonction donnée de x et de y.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Trouver la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^2},$$

a désignant une constante positive supérieure à UN.

(Octobre 1903.)

Digitized by Google

Épreuve écrite. — I. *On considère l'équation différentielle (tous les éléments étant réels)*

$$x^2 \frac{dy}{dx} = y - f(x, y), \tag{1}$$

où $f(x, y)$ est une série ordonnée suivant les puissances de x et y, pour $x = y = 0$, ne contenant pas de terme du premier degré en y, et convergeant pour $|x|$ et $|y|$ assez petits.

1° *Montrer que l'intégrale de l'équation* (1), *passant par un point* (x_0, y_0) *suffisamment rapproché de l'origine, et pour lequel* $x_0 > 0$, PASSE PAR L'ORIGINE.

2° *Montrer qu'à gauche de l'axe* O*y il n'y a qu'*UNE SEULE INTÉGRALE PASSANT A L'ORIGINE.

II. *Établir que la transformation*

$$z = \frac{1}{x}\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

entre les deux plans z et t transforme une circonférence du plan t, ayant l'origine pour centre, en une ellipse du plan z, ayant pour foyers les points $+1$ *et* -1.

En déduire qu'une fonction $f(x)$ de la variable complexe x, holomorphe à l'intérieur d'une ellipse ayant pour foyers les points ± 1, *peut être développée en une série de la forme*

$$f(x) = \Sigma a_n \mathrm{P}_n(x),$$

les a_n étant des constantes et $\mathrm{P}_n(x)$ le polynome

$$(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n.$$

Épreuve pratique. — *On considère l'équation*

$$x \log x = a, \tag{1}$$

où a est une constante comprise entre 0 *et* $-\frac{1}{e}$, $\log x$ *désignant le logarithme népérien de x et e étant la base de ce système de logarithmes.*

1° *Démontrer que l'équation* (1) *a deux racines réelles.*

Digitized by Google

2° *On fait les approximations successives*

$$x_1 = -a, \quad x_2 = \frac{a}{\log x_1}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{a}{\log x_{n-1}}, \quad \ldots.$$

Montrer que les quantités positives x vont en diminuant. Quelle relation leur limite a-t-elle avec l'équation (1)?

(Juillet 1904.)

CERTIFICATS DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Étant donnée la surface du second degré définie en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1 :$$

1° *Chercher toutes les surfaces du second degré qui la coupent à angle droit en tous les points de la courbe commune d'intersection;*

2° *Chercher si deux des surfaces ainsi obtenues peuvent se couper mutuellement à angle droit en tous leurs points communs.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne la surface définie par les équations*

$$3x = 3u + 3uv^2 - u^3,$$
$$3y = 3v + 3vu^2 - v^3,$$
$$z = u^2 - v^2,$$

où u et v désignent deux paramètres variables. On demande de calculer l'aire de la portion de surface correspondant à toutes les valeurs de u et v comprises respectivement entre zéro et des limites supérieures u_0, v_0 de ces paramètres, ainsi que le volume du cylindre qui projette cette portion de surface sur le plan des xy.

Vérifier que les courbes qui limitent cette portion de surface sont planes. (Octobre 1903.)

Digitized by Google

Épreuve écrite. — *On considère une surface dont l'élément linéaire peut être mis sous la forme*

$$ds^2 = u(du^2 + dv^2).$$

1° *On demande de déterminer les lignes géodésiques de cette surface.*

2° *Si l'on fait correspondre à chaque point de la surface le point d'un plan ayant pour coordonnées rectangulaires u et v, on obtient une représentation conforme de la surface. Quelles sont les lignes planes qui servent de représentation aux géodésiques de la surface?*

3° *Déterminer les lignes géodésiques passant par deux points de la surface donnés par leurs coordonnées.*

Épreuve pratique. — *La projection de Bonne étant définie par les formules*

$$\rho = u + k, \qquad \rho\omega = v \sin u,$$

où ρ et ω désignent les coordonnées polaires dans le plan et u, v les coordonnées polaires sur la sphère, déterminer les courbes de la sphère qui se conservent dans la représentation. Construire la représentation de ces courbes dans le plan en donnant à la constante k la valeur 1.

(Mars 1904.)

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET CALCUL INTÉGRAL.

Paris.

Épreuve écrite. — I. *Étant donnés, dans un plan* P, *un point fixe et une droite fixe* DD' :

1° *On demande de déterminer les courbes* C *du plan* P *telles que la distance* MQ *d'un point quelconque* M *de l'une de ces courbes à la droite fixe* DD' *soit égale à la distance* OR *du point fixe* O *à la tangente en* M *à la courbe* C.

Digitized by Google

2° *Par un point* A *du plan* P *il passe en général deux courbes de cette espèce, tangentes en ce point* A *à deux droites distinctes* At, At'. *Trouver le lieu géométrique des points* A *pour lesquels ces deux droites* At, At' *sont confondues et étudier la forme des courbes* C *correspondantes dans le voisinage du point* A.

N. B. — *On prendra pour origine le point* O, *l'axe* Oy *étant parallèle à la droite* DD'.

II. *Démontrer que l'équation différentielle linéaire*

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (x+\mu+\gamma)\frac{dy}{dx} + \mu y = 0,$$

où μ *et* γ *sont deux nombres entiers positifs, admet pour intégrale un polynome* $y = P(x)$. *En déduire qu'elle admet une seconde intégrale de la forme*

$$y = e^x Q(x),$$

$Q(x)$ *étant aussi un polynome.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int \frac{[x\log(x^2+y^2) - x^2y^2]\,dx + [y\log(x^2+y^2) + x^3]\,dy}{(x^2+y^2)^2}$$

prise le long du chemin AMNP, *joignant le point* A, *de coordonnées* $x = 1$, $y = 0$, *au point* P *de coordonnées* X, Y *en contournant une fois l'origine, le point* P *étant situé dans l'angle* xOy. (Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant donné, dans un plan* P, *un axe* Ox, *on demande de déterminer dans ce plan une courbe* C, *passant par le point* O, *telle que l'aire engendrée par la rotation d'un arc* OM *de cette courbe autour de* Ox *soit dans un rapport constant avec l'aire engendrée par la rotation de la tangente* MT *autour du même axe.*

Examiner en particulier le cas où $k = \frac{4}{3}$.

II. *Trouver la valeur finale de la fonction*

$$u = \text{arc tang}\sqrt{1-z}$$

Digitized by Google

de la variable complexe z, lorsque cette variable décrit le segment de ligne droite allant du point $z = 0$ au point $z = 1 + \sqrt{-1}$, la valeur initiale de u étant égale à $\frac{\pi}{4}$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - 4)\sqrt{x(1-x)}}.$$

(Octobre 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On demande l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \qquad xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 y \frac{\partial z}{\partial y} = z(x^2 + y^2).$$

Soit S *la surface représentée par l'équation $z = f(x, y)$, la fonction $f(x, y)$ étant une intégrale de l'équation* (1). *Déterminer la fonction arbitraire qui figure dans cette intégrale, de façon que les caractéristiques forment une famille de lignes asymptotiques de la surface* S *et trouver la seconde famille de lignes asymptotiques.*

Les surfaces Σ *ainsi obtenues dépendent d'une constante arbitraire. Trouver l'équation générale des surfaces qui les coupent orthogonalement.*

II. *On considère la fonction de deux variables complexes*

$$f(x, y) = \frac{\sin x}{x^2 + y^2 + 3}.$$

Soient x_0, y_0 deux nombres RÉELS *quelconques. On demande de trouver une limite supérieure du module de $f(x, y)$ lorsque les variables x et y restent comprises respectivement à l'intérieur de deux cercles* C *et* C' *de rayon égal à* 1 *décrits des points x_0 et y_0 pour centres, dans le plan de chacune de ces variables.*

Quelles conclusions peut-on déduire de ce calcul, relativement aux intégrales de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{x^2 + y^2 + 3}$$

qui sont réelles pour des valeurs réelles de la variable?

Digitized by Google

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_{-1}^{+1} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(Juillet 1904.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1974.

(1903, p. 240.)

Posons d'une manière générale

$$y_k = (m+1)^k a_0 x^m + m^k a_1 x^{m-1} + (m-1)^k a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m,$$

k et m étant des entiers positifs; si l'équation $y_0 = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation $y_k = 0$, quel que soit k, les deux équations ayant d'ailleurs le même nombre de racines positives. En outre, si $p > k$, toute racine p^{uple} de $y_0 = 0$ est racine $(p-k)^{uple}$ de $y_k = 0$.

Par exemple, en partant de $y_0 = (x-1)^m$, on voit que, pour $k < m$,

$$\begin{aligned}(m+1)^k x^m &- \frac{m}{1} m^k x^{m-1} \\ &+ \frac{m(m-1)}{1.2}(m-1)^k x^{m-2} - \ldots + (-1)^m \\ = (x-1)^{m-k} f(x),\end{aligned}$$

$f(x)$ ayant toutes ses racines réelles et positives.

(M. d'Ocagne.)

SOLUTION

Par M. A. Laureaux.

On a visiblement

$$y_k = \frac{d}{dx}(xy_{k-1}).$$

Digitized by Google

Si l'équation $y_{k-1} = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation $xy_{k-1} = 0$, et par suite, en vertu du théorème de Rolle, de l'équation $y_k = 0$. Or $y_0 = 0$ a, par hypothèse, toutes ses racines réelles. Donc, etc.

En second lieu, les nombres des racines positives des équations $y_0 = 0$ et $y_k = 0$ sont exactement donnés par les nombres de variations que présentent leurs premiers membres, puisque ces deux équations ont toutes leurs racines réelles, et ces nombres de variations sont évidemment identiques.

Enfin, l'identité signalée au début, qui, développée, s'écrit

$$y_k = y_{k-1} + x\frac{dy_{k-1}}{dx},$$

montre qu'une racine multiple d'ordre α de $y_{k-1} = 0$ est racine multiple d'ordre $\alpha - 1$ de $y_k = 0$. Donc, etc.

Remarque. — La dernière proposition est en défaut si la racine multiple considérée est nulle. Ainsi, supposons que zéro soit racine multiple d'ordre p de $y_0 = 0$. On a

$$a_m = a_{m-1} = \ldots = a_{m-p+1} = 0, \qquad a_{m-p} \neq 0,$$
$$y_k = (m+1)^k a_0 x^m + \ldots + (m-p+1)^k a_{m-p} x^p,$$

et zéro est racine p^{uple} de $y_k = 0$, quel que soit k.

Autre solution par M. Letierce.

1989.

(1904, p. 48.)

On donne les demi-diamètres conjugués OD, OD′ *d'une ellipse et les segments* OG, OG_1 *perpendiculaires et égaux à* OD′. *Démontrer que les bissectrices de l'angle* GDG_1, *limitées au diamètre* OD′, *se projettent orthogonalement sur* DG *ou* DG_1, *suivant des segments respectivement égaux aux demi-axes de l'ellipse.* (Mannheim.)

SOLUTION

Par M. P. P.

Soient J le point où la bissectrice intérieure de GDG_1 coupe OD′, H et H_1 ses projections sur DG et DG_1. On a

$$JG = JG_1, \qquad JH = JH_1.$$

Digitized by Google

Les triangles rectangles JGH, JG_1H_1 seront donc égaux et

$$GH = G_1H_1.$$

Donc

$$DH = DH_1 = \frac{DG + DG_1}{2}.$$

Or, d'après le théorème énoncé au même Tome (p. 7),

$$DG = a - b, \qquad DG_1 = a + b.$$

Par suite

$$DH = DH_1 = a.$$

Même démonstration pour la bissectrice extérieure DJ'; seulement, ici, le segment DH'_1 étant dirigé dans le sens de DG_1, tandis que DH' est en sens contraire de DG, on a

$$DH' = DH'_1 = \frac{DG_1 - DG}{2} = b.$$

Autres solutions de MM. Barisien, Troin et Lez.

1990.

(1904, p. 48.)

On considère une hypocycloïde à trois rebroussements qui varie de manière à avoir, avec un cercle donné, trois tangentes communes fixes. Ses deux courbes ont, en outre, trois tangentes communes variables. Quel est le lieu des sommets du triangle formé par ces trois dernières tangentes? (R. Bricard.)

SOLUTION

Par M. R. B.

Soit O le centre du cercle donné C, dont on supposera le rayon égal à l'unité. Une hypocycloïde à trois rebroussements H étant de la troisième classe, C et H ont bien six tangentes communes. Soient m_1, m_2, ..., m_6 leurs points de contact avec C.

Appelons H' la polaire réciproque de H par rapport à C : H', qui coupe C aux points m_1, m_2, ..., m_6, est une courbe du troisième ordre, ayant en O un point double à tangentes isotropes.

Digitized by Google

Si l'on prend comme axes de coordonnées les droites isotropes issues du point O, le cercle C a pour équation

(1) $$xy = 1,$$

et, la courbe H',

(2) $$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + xy = 0,$$

A, B, C, D étant des coefficients quelconques.

L'équation aux x des points d'intersection de C et de C' s'obtient par l'élimination de y entre les deux équations précédentes, ce qui donne

(3) $$Ax^6 + Bx^4 + x^3 + Cx^2 + D = 0.$$

Les racines $x_1, x_2, \ldots, x_6$ de cette équation sont les abscisses des points $m_1, m_2, \ldots, m_6$. Il est visible qu'elles satisfont aux relations

$$\sum x_i = 0, \qquad \sum \frac{1}{x_i} = \sum y_i = 0.$$

Par conséquent *le point* O *est le barycentre des points* m_1, $m_2, \ldots, m_6$. Réciproquement, lorsque six points $m_1, m_2, \ldots$, m_6 du cercle C sont tels que leur barycentre tombe au point O, leurs x sont racines d'une équation de la forme (3), et l'on peut trouver une courbe H' qui coupe C en ces six points.

Cela posé, supposons fixes les trois points m_1, m_2, m_3, et soit g leur barycentre. Les points m_4, m_5, m_6 doivent alors varier sur C de telle manière que leur barycentre soit le point fixe g' défini par $Og' = -Og$. Les milieux des cordes m_4m_5, m_5m_6, m_6m_4 décrivent donc un cercle G' homothétique à C, le centre d'homothétie étant le point g' et le rapport d'homothétie étant $-\frac{1}{2}$. Le triangle formé par les tangentes à C aux points m_4, m_5, m_6 (triangle dont les sommets sont des points du lieu demandé) est par suite inscrit à un cercle fixe Γ', inverse de G' par rapport à C.

Mais, de même, les milieux des cordes m_1m_2, m_2m_3, m_3m_1 sont sur un cercle G, homothétique de C par rapport à g, le rapport d'homothétie étant $-\frac{1}{2}$, et les sommets du triangle formé par les tangentes à C aux points m_1, m_2, m_3 sont sur

Digitized by Google

un cercle Γ, inverse de G par rapport à C; G et G′ sont visiblement symétriques par rapport au point O; il en est donc de même de Γ et de Γ′, et l'on peut énoncer le résultat final que voici :

Soient O *le centre du cercle donné,* Γ *le cercle circonscrit au triangle formé par les trois tangentes fixes. Le lieu demandé est le cercle* Γ′, *symétrique de* Γ *par rapport au point* O.

1991.

(1904, p. 96.)

Soient (S) *et* (S′) *deux surfaces réglées ayant la même ligne de striction* C, *et telles que les génératrices* G *et* G′ *de* (S) *et de* (S′) *qui se coupent en un point m de* C *fassent entre elles un angle constant. Toute droite* G″, *qui passe par le point m et constitue avec* G *et* G′ *un trièdre de grandeur invariable, engendre une surface* (S″) *dont la ligne de striction est aussi* C. (R. Bricard.)

SOLUTION

Par M. Emil Rath.

J'appliquerai la méthode de Grassmann à la solution de cette question et de la question suivante. J'emploie les notations de M. Burali-Forti (*Introduction à la Géométrie différentielle suivant la méthode de Grassmann*. Paris, 1897).

Si U, U′, U″ sont des vecteurs unités parallèles aux génératrices des trois surfaces, qui passent par la courbe donnée C. et T un vecteur unité parallèle à la tangente de la courbe C, on a

$$(1) \qquad U^2 = U'^2 = U''^2 = T^2 = 1.$$

La courbe C est la ligne de striction des deux premières surfaces, on a donc

$$(2) \qquad T \left| \frac{dU}{ds} = 0, \qquad T \right| \frac{dU'}{ds} = 0,$$

s désignant l'arc de la courbe C. Les angles des vecteurs U, U′, U″ sont constants; on a donc

$$(3) \qquad U \mid U' = \text{const.}, \qquad U' \mid U'' = \text{const.}, \qquad U'' \mid U = \text{const.}$$

Digitized by Google

La dérivation des équations (1) et (3) donne

$$(4)\quad \begin{cases} o = U \Big| \dfrac{dU}{ds} = U' \Big| \dfrac{dU'}{ds} = U'' \Big| \dfrac{dU''}{ds}, \\ o = U \Big| \dfrac{dU'}{ds} + U' \Big| \dfrac{dU}{ds} = U' \Big| \dfrac{dU''}{ds} + U'' \Big| \dfrac{dU'}{ds} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = U'' \Big| \dfrac{dU}{ds} + U \Big| \dfrac{dU''}{ds}. \end{cases}$$

Si nous posons

$$T = \alpha U + \alpha' U' + \alpha'' U'',$$

les α, α', α'' désignant des nombres, nous avons, en vertu des relations (4) et (2) :

$$o = T \Big| \frac{dU}{ds} = \alpha' U' \Big| \frac{dU}{ds} + \alpha'' U'' \Big| \frac{dU}{ds},$$

$$o = T \Big| \frac{dU'}{ds} = \alpha\, U \Big| \frac{dU'}{ds} + \alpha'' U'' \Big| \frac{dU'}{ds},$$

$$\begin{aligned} T \Big| \frac{dU''}{ds} &= \alpha\, U \Big| \frac{dU''}{ds} + \alpha' U' \Big| \frac{dU''}{ds} \\ &= -\alpha\, U'' \Big| \frac{dU}{ds} - \alpha' U'' \Big| \frac{dU'}{ds} \\ &= \frac{\alpha\alpha'}{\alpha''} \left(U' \Big| \frac{dU}{ds} + U \Big| \frac{dU'}{ds} \right) = o. \end{aligned}$$

La dernière équation $T \Big| \dfrac{dU''}{ds} = o$ montre que la courbe C est la ligne de striction de la troisième surface.

1992.

[1904, p. 96 et 144 (1).]

On donne dans l'espace une courbe C.

1° *Définir la surface réglée la plus générale dont* C *est la ligne de striction en même temps qu'une ligne de courbure.*

2° *Définir la surface réglée la plus générale dont* C *est la ligne de striction en même temps qu'une ligne asymptotique.* (R. Bricard.)

(1) Les deux énoncés dont l'ensemble constitue la question 1992 ont été séparés par suite d'une erreur matérielle.

Digitized by Google

SOLUTION

Par M. Emil Rath.

Considérons un point P de la courbe donnée C comme fonction de l'arc s. Si T, B, N sont trois vecteurs unités, parallèles à la tangente, la normale principale et la binormale de la courbe C au point P, on a

$$(1)\quad \begin{cases} T^2 = N^2 = B^2 = 1, & T \mid N = N \mid B = B \mid T = 0, \\ B = \mid TN, \quad T = \mid NB, & N = \mid BT, \end{cases}$$

$$(2)\quad \frac{dT}{ds} = \frac{1}{\rho} N, \qquad \frac{dN}{ds} = -\left(\frac{1}{\rho} T + \frac{1}{\tau} B\right), \qquad \frac{dB}{ds} = \frac{1}{\tau} N$$

$\left(\text{formules de Frenet; } \frac{1}{\rho} \text{ est la courbure, } \frac{1}{\tau} \text{ la torsion}\right)$.

Soit U un vecteur unité, encore indéterminé, tel que la surface réglée TU admette la courbe C pour ligne de striction; nous aurons

$$(3)\qquad T \left| \frac{dU}{ds} \right. = 0.$$

Si donc nous posons

$$(4)\qquad U = xT + yN + zB,$$

où x, y, z sont des nombres fonctions de s telles que

$$(5)\qquad U^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

les formules de Frenet donnent

$$(6)\quad \frac{dU}{ds} = \left(\frac{dx}{ds} - \frac{y}{\rho}\right) T + \left(\frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho} + \frac{z}{\tau}\right) N + \left(\frac{dz}{ds} - \frac{y}{\tau}\right) B.$$

En substituant la valeur de $\frac{dU}{ds}$ dans (3), nous avons, en vertu de (1),

$$(7)\qquad \frac{dx}{ds} - \frac{y}{\rho} = 0.$$

1° Pour que la courbe donnée soit *asymptotique*, il faut et il suffit que le vecteur U soit parallèle au plan osculateur de la courbe, et par conséquent perpendiculaire à la binormale; on a donc

$$U \mid B = 0 \qquad \text{ou} \qquad z = 0.$$

Digitized by Google

Si nous posons donc $x^2 = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, (7) donne

$$(8) \qquad \sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{\rho}\right) = 0.$$

En supposant $\sin\varphi \neq 0$, nous avons

$$\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{\rho} = 0;$$

et, en intégrant

$$(9) \qquad \varphi = \varphi_0 + \int_0^s \frac{ds}{\rho},$$

φ_0 est la valeur de φ pour $s = 0$. La génératrice passant par le point P de la surface réglée cherchée est donc définie par le vecteur

$$(10) \qquad U = \cos\varphi\, F + \sin\varphi\, N,$$

φ étant donné par la formule (9).

2° Pour que la courbe donnée C soit une *ligne de courbure*, il faut et il suffit que T soit parallèle à $\frac{dR}{ds}$, R désignant un vecteur unité parallèle à la normale de la surface. Le plan tangent est parallèle au bivecteur UT; on a donc

$$R = \frac{|\,UT}{\operatorname{mod} UT},$$

ou, en vertu de (4) et (1),

$$(11) \qquad \sqrt{y^2 + z^2}\, R = zN - yB.$$

En dérivant et en tenant compte des formules de Frenet, on

$$\sqrt{y^2+z^2}\,\frac{dR}{ds} = -\frac{z}{\rho}T + \frac{y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds} - \frac{y^2+z^2}{\tau}}{y^2+z^2}(yN + zB).$$

Pour que $\frac{dR}{ds}$ soit parallèle à T, il faut que l'on ait

$$(12) \quad y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds} - \frac{y^2+z^2}{\tau} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\frac{z}{y}}{1+\left(\frac{z}{y}\right)^2} = \frac{ds}{\tau}.$$

Digitized by Google

Si nous posons $\frac{ds}{\tau} = d\psi$ (angle de torsion), on a, en intégrant,

$$\text{arc tang}\,\frac{z}{y} = \psi + c.$$

La constante c est la valeur de arc tang $\frac{z}{y}$ pour $s = 0$ et $\psi = 0$. En substituant à $\psi + c$ la grandeur ψ', on a

$$(13) \qquad \frac{z}{y} = \text{tang}\,\psi'.$$

Des équations (5) et (7) on tire

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\cos\psi'\,ds}{\rho}, \qquad \text{arc}\sin x = \int_0^s \frac{ds\cos\psi'}{\rho} + c_1$$

(c_1 est la valeur de arc sin x pour $s = 0$),

$$(14) \qquad x = \sin\left(\int_0^s \frac{ds\cos\psi'}{\rho} + c_1\right).$$

La surface cherchée est définie par la relation (4); les nombres x, y, z étant donnés par les équations (13) et (14).

1993.

(1904, p. 144.)

Soient m et m' deux points d'une ellipse E. *Sur la normale en m on porte, extérieurement à l'ellipse, une longueur mp, égale au demi-diamètre conjugué de celui qui aboutit en m. Soit p' le point analogue que l'on peut construire sur la normale en m'.*

Démontrer que, si la tangente en m' contient le point p, la tangente en m contient le point p'.

(R. Bricard.)

SOLUTION ANALYTIQUE

Par M. E.-N. Barisien.

Si l'ellipse E a pour équation

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

et si φ et φ' sont les angles d'anomalie excentrique en m et m', on sait que les points p et p' sont situés sur le cercle de Chasles

Digitized by Google

concentrique à E et de rayon $(a+b)$. Les coordonnées de p et p' sont

$$p\begin{cases} x=(a+b)\cos\varphi, \\ y=(a+b)\sin\varphi, \end{cases} \qquad p'\begin{cases} x=(a+b)\cos\varphi', \\ y=(a+b)\sin\varphi'. \end{cases}$$

Les tangentes à E en m et m' ont pour équations

$$bx\cos\varphi + ay\sin\varphi = ab,$$
$$bx\cos\varphi' + ay\sin\varphi' = ab.$$

On voit que la condition pour que la tangente en m' passe par p est la même que si la tangente en m passe par p'. Cette condition est

$$(a+b)(b\cos y\cos\varphi' + a\sin\varphi\sin\varphi') = ab.$$

Remarques. — On a encore les propriétés suivantes :

I. *Le lieu du point de rencontre des tangentes en m et m' est l'ellipse*

$$b(2b+a)x^2 + a(2a+b)y^2 = ab(a+b)^2.$$

II. *Le lieu du point de rencontre des droites pp' et mm' est la kreuzcurve*

$$b^5(2a+b)x^2 + a^5(a+2b)y^2 = c^4x^2y^2.$$

Soient p_1 le symétrique de p par rapport à m, p'_1 le symétrique de p' par rapport à m. On trouve encore :

III. *Le lieu du point de rencontre des droites pp' et $p_1p'_1$ est la kreuzcurve*

$$b^3(2a+b)x^2 + a^3(a+2b)y^2 = (a+b)^2x^2y^2.$$

IV. *Le lieu du point de rencontre des droites $p_1p'_1$ et mm' est la kreuzcurve* II.

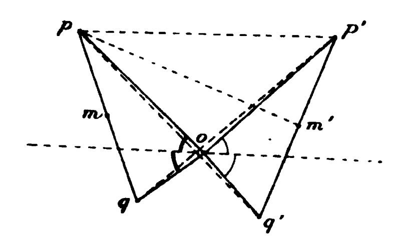
Autres solutions analytiques de M. D. Tabakoff, de M. Troin et de M. Lez.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE
Par M. Thié.

On sait que si l'on porte, sur la normale en m à une ellipse E, et de part et d'autre du point m, deux seg-



ments mp, mq, égaux tous deux au demi-diamètre conjugué de celui qui aboutit en m (le point p étant extérieur à l'ellipse), les points p et q se trouvent respectivement sur les cercles de Chasles, de rayons $a+b$ et $a-b$, a et b étant



les demi-axes de E. On sait aussi que op et oq sont également inclinées sur les axes de E.

Soient p' et q' les points analogues relatifs au point m'; si le point p est sur la tangente à E en m', on a

$$pp' = pq'.$$

Mais les deux triangles poq', $p'oq$ sont égaux, comme ayant

$$op = op', \qquad oq = oq', \qquad \widehat{poq'} = \widehat{p'oq}.$$

Donc

$$pq' = p'q.$$

Il en résulte

$$pp' = p'q.$$

Par suite le point p' se trouve bien sur la tangente en m à E. C. Q. F. D.

ERRATA.

Numéro de janvier 1904, pages 22 et 24, dans le Mémoire de M. Fontené : *Sur le système articulé de M. Kempe,* la figure de la page 24 doit porter le n° 11, et la figure de la page 22 le n° 12.

Digitized by Google

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

NIEWENGLOWSKI (B.), Inspecteur de l'Académie de Paris, Docteur ès Sciences, et **GÉRARD (L.)**, Professeur au Lycée Ampère, Docteur ès Sciences. — **Cours de Géométrie élémentaire** à l'usage des élèves de **Mathématiques élémentaires**, de **Mathématiques spéciales**, des candidats aux Écoles du Gouvernement et des candidats à l'agrégation.

I. *Géométrie plane.* In-8 (23 × 14) de XX-362 pages, avec 289 figures, cartonné; 1898 .... 5 fr.
Broché .... 4 fr.

II. *Géométrie dans l'espace.* In-8 (23 × 14) de 496 pages, avec 363 fig., cartonné; 1899 .... 6 fr.
Broché .... 5 fr.

— **Cours de Géométrie élémentaire** à l'usage du Premier Cycle (section B), du Second Cycle (section C et D) et des Mathématiques A et B.

I. *Géométrie plane.* In-8 (23 × 14) de XX-251 pages, avec 226 figures, cartonné; 1903 .... 3 fr. 50 c.
Broché .... 2 fr. 50 c.

II. *Géométrie dans l'espace.* In-8 (23 × 14) de 263 pages, avec 208 fig., cartonné; 1903 .... 3 fr. 50 c.
Broché .... 2 fr. 50 c.

— **Cours de Géométrie élémentaire** à l'usage du Premier Cycle (section A) et du Second Cycle (sections A et B).

I. *Géométrie plane.* In-8 (23 × 14) de XVI-163 pages, avec 182 figures, cartonné; 1903 .... 3 fr.
Broché .... 2 fr.

II. *Géométrie dans l'espace.* In-8 (23 × 14) de 122 pages, avec 93 fig., cartonné; 1903 .... 3 fr.
Broché .... 2 fr.

BOUSSINESQ (J.), Membre de l'Institut, Professeur de Mécanique physique à la Faculté des Sciences de Paris. — **Cours d'Analyse infinitésimale,** à l'usage des personnes qui étudient cette Science en vue de ses applications mécaniques et physiques. 2e éd., 2 vol. grand in-8, avec fig.

On vend séparément :

TOME I. — *Calcul différentiel.*

Partie élémentaire (pour les Élèves des Écoles industrielles); 1887 .. 7 fr. 50 c.
Compléments; 1887 .... 9 fr. 50 c.

TOME II. — *Calcul intégral.*

Partie élémentaire (pour les Élèves des Écoles industrielles); 1890. 7 fr. 50 c.
Compléments; 1890 .... 16 fr.

Ce Cours d'Analyse s'adresse aux physiciens, naturalistes, élèves ingénieurs, philosophes, etc., qui, sans avoir fait des études mathématiques très étendues, éprouvent le besoin de connaître, dans son esprit et dans ses applications *concrètes* (même les plus avancées), le calcul des infiniment petits ou des fonctions continues. L'auteur espère, en conduisant son lecteur *pas à pas* par les voies les plus intuitives, les mieux appropriées à notre sentiment naturel de la graduelle variation des choses, le familiariser entièrement avec les idées et les méthodes qui ont valu à ce puissant instrument intellectuel, toujours en voie d'accroissement depuis le XVIIe siècle, sa *merveilleuse* coopération aux progrès des Sciences de la nature.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Octobre 1904.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

HALPHEN (G.-H.), Membre de l'Institut. — **Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.** 3 volumes grand in-8, se vendant séparément.

Ire Partie : *Théorie des fonctions elliptiques et de leur développement en séries*; 1886.................................. 15 fr.

IIe Partie : *Applications à la Mécanique, à la Physique, à la Géodésie, à la Géométrie et au Calcul intégral*; 1888.............. 20 fr.

IIIe Partie : *Fragments.* (*Quelques applications à l'Algèbre et en particulier à l'équation du 5e degré. Quelques applications à la théorie des nombres. Questions diverses.*) Publié par les soins de la Section de Géométrie de l'Académie des Sciences; 1891.............. 8 fr. 50 c.

LUCAS (Édouard), Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis. — **Théorie des nombres.** *Le calcul des nombres entiers. Le calcul des nombres rationnels. La divisibilité arithmétique.* Grand in-8, avec figures; 1891.. 15 fr.

34577 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.

Digitized by Google

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,

Docteur ès Sciences,

Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

C. BOURLET,

Docteur ès Sciences.

Professeur au lycée Saint-Louis

R. BRICARD,

Ingénieur des Manufactures de l'État,

Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME IV.

NOVEMBRE 1904.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris,
à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,
ou à M. BOURLET, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,
ou à M. BRICARD, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.

(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Digitized by Google

Rédacteur de service : M. R. Bricard.

Liste des Correspondants des NOUVELLES ANNALES dans les villes où siègent les Facultés des Sciences

Besançon : M. Ét. Delassus. — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Duport. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. — Montpellier M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers : M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

CAHEN (E.), ancien Élève de l'École Normale supérieure, Professeur de mathématiques spéciales au Collège Rollin. — **Éléments de la Théorie des nombres.** *Congruences. Formes quadratiques. Nombres incommensurables. Questions diverses.* Grand in-8; 1900............... 12 fr.

INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS (L'), dirigé par *C.-A. Laisant*, Docteur ès Sciences, Examinateur à l'École Polytechnique, et *Émile Lemoine*, Ingénieur civil, ancien Élève de l'École Polytechnique, avec la collaboration de *Ed. Maillet*, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique, et de *A. Grévy*, Docteur ès Sciences, ancien Élève de l'École Normale, Professeur au Lycée Saint-Louis. In-8, mensuel. Tome XII; 1905.

L'abonnement est annuel et part de Janvier.

Prix pour un an (12 numéros) :

Paris, 7 fr. — Départements et Union postale, 8 fr. 50.

Les années précédentes sauf le Tome I (1894) se vendent chacune. 7 fr.

MM. Laisant et Lemoine ont eu l'heureuse idée de mettre en rapport scientifique les mathématiciens, au moyen d'un organe international dont le titre, *Intermédiaire des Mathématiciens*, indique le but. Ce recueil mensuel, qui paraît depuis janvier 1894, n'admet d'autres articles que des questions posées par les mathématiciens à leurs collègues, soit pour en indiquer l'intérêt général, soit pour les besoins de leurs recherches personnelles, et les réponses à ces questions. La Mathématique est si vaste maintenant que nul n'en connaît complètement même une des branches, et qu'une question de détail (science, histoire, bibliographie) peut arrêter longtemps un savant de premier ordre, si ce détail sort du cadre de ses études ordinaires, tandis qu'elle ne serait qu'un jeu pour un autre.

Cette publication répond évidemment à un besoin, car elle a reçu, dès le ... plus empressé dans le monde scientifique.

Digitized by Google

[K14b]

SUR LES POLYÈDRES DE GENRE *un*;

PAR M. A. DELTOUR.

1. Dans un article récemment inséré aux *Nouvelles Annales* ([1]), M. G. Fontené a signalé l'intérêt que présentaient, pour une extension possible à l'espace du théorème de Poncelet, les *polyèdres homogènes de genre* UN, c'est-à-dire ceux dont toutes les faces sont des polygones ayant un même nombre x de côtés, et dont tous les angles solides ont un même nombre y de faces.

Il ne saurait exister, *a priori*, que trois classes de polyèdres de genre *un* homogènes, pour lesquelles on a respectivement

$$x = 4, \quad y = 4,$$
$$x = 3, \quad y = 6,$$
$$x = 6, \quad y = 3.$$

On peut donner aux polyèdres de ces trois classes les noms respectifs de *polyèdres tétragonaux, polyèdres trigonaux, polyèdres hexagonaux,* et la question suivante se pose :

Existe-t-il, dans chaque classe, une infinité de polyèdres?

La réponse est affirmative en ce qui concerne les polyèdres tétragonaux, ainsi que l'a montré M. Fontené (*loc. cit.*). Quant aux polyèdres trigonaux et aux po-

([1]) Même Tome, p. 433.

Digitized by Google

lyèdres hexagonaux, la question ne paraît pas avoir été traitée jusqu'ici, et le but de la présente Note est de combler cette lacune.

Je vais montrer que, *pour toute valeur de* $S \geqq 7$, *on peut construire au moins un polyèdre trigonal à* S *sommets*. Il en résultera immédiatement, par corrélation, que l'on peut construire, pour les mêmes valeurs de S, au moins un polyèdre hexagonal à S faces.

2. Soient donnés S points, dont quatre quelconques ne sont pas dans un même plan, et que je désignerai par les nombres

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_S.$$

Considérons les deux triangles

$$a_1 a_2 a_4 \quad \text{et} \quad a_1 a_3 a_4,$$

et tous ceux que l'on peut en déduire par permutation circulaire des sommets.

Je forme ainsi 2S triangles (T) (S dans chaque catégorie). *Je dis que ce sont les* 2S *faces d'un polyèdre trigonal, ayant pour sommets les* S *points donnés.*

Pour le démontrer, il faut d'abord reconnaître que chaque côté d'un triangle (T) quelconque appartient à un second triangle (T) et à un seul.

Considérons, par exemple, le triangle quelconque de la première catégorie

$$a_h a_{h+1} a_{h+3}.$$

(Il est bien clair que, dans cette notation, un indice qui dépasse S doit être remplacé par cet indice diminué de S.)

Le côté $a_h a_{h+1}$ de ce triangle appartient au triangle

$$a_{h-2} a_h a_{h+1}$$



de la seconde catégorie et n'appartient à aucun autre triangle (T).

Le côté $a_h a_{h+3}$ du même triangle appartient au triangle

$$a_h a_{h+2} a_{h+3}$$

de la seconde catégorie et n'appartient à aucun autre triangle (T).

Enfin, le côté $a_{h+1} a_{h+3}$ appartient au triangle

$$a_{h+1} a_{h+3} a_{h+4}$$

de la seconde catégorie et n'appartient à aucun autre triangle (T).

On reconnaîtra de même que chaque côté d'un triangle de la seconde catégorie appartient à un triangle et à un seul de la première catégorie.

Il faut ensuite vérifier que chaque point a_h est sommet de six triangles, et que ces six triangles sont les faces d'un véritable angle hexaèdre (non décomposé en deux angles trièdres).

Or, on le voit immédiatement : les six triangles en question sont les suivants :

$$a_h a_{h+1} a_{h+3}, \quad a_{h-1} a_h a_{h+2}, \quad a_{h-3} a_{h-2} a_h \qquad \text{(1}^{\text{re}} \text{ catégorie)}$$

et

$$a_h a_{h+2} a_{h+3}, \quad a_{h-2} a_h a_{h+1}, \quad a_{h-3} a_{h-1} a_h \qquad \text{(2}^{\text{e}} \text{ catégorie)};$$

ils sont les faces de l'angle hexaèdre

$$a_h(a_{h+1} a_{h+3} a_{h+2} a_{h-1} a_{h-3} a_{h-2}).$$

C. Q. F. D.

Digitized by Google

[A3aα]

SUR L'EXISTENCE DES RACINES DE L'ÉQUATION ALGÉBRIQUE;

PAR M. S. STAMATIADIS.

1. Soit le polynome

$$f(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0.$$

En posant

$$A_n = a_n(\cos\omega_n + i\sin\omega_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_0 = a_0(\cos\omega_0 + i\sin\omega_0)$$

et

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

le polynome devient

$$f(z) = a_n r^n[\cos(\omega_n + n\varphi) + i\sin(\omega_n + n\varphi)] + \ldots$$
$$+ a_1 r[\cos(\omega_1 + \varphi) + i\sin(\omega_1 + \varphi)] + a_0(\cos\omega_0 + \sin\omega_0).$$

Les coordonnées du point M, qui représente sur le plan la valeur du polynome, sont

$$x = a_n r^n \cos(\omega_n + n\varphi) + \ldots + a_1 r\cos(\omega_1 + \varphi) + a_0\cos\omega_0,$$
$$y = a_n r^n \sin(\omega_n + n\varphi) + \ldots + a_1 r\sin(\omega_1 + \varphi) + a_0\sin\omega_0.$$

Considérons la courbe décrite par ce point, lorsque, r ayant une valeur constante, φ augmente de o à 2π, et soit θ l'accroissement que prend l'argument Θ du polynome sur cette courbe.

2. *Pour une valeur de r suffisamment petite, et pour toute valeur inférieure à elle, on a* $\theta = 0$.

Digitized by Google

En effet, le module du polynome

$$f(z) - A_0 = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z$$

peut devenir aussi petit que l'on veut. Prenons r assez petit pour avoir

$$|f(z) - A_0| < \mu < |A_0|,$$

pour toute valeur de φ, et écrivons un cercle de rayon μ avec le point A_0 pour centre; toute la courbe sera comprise dans ce cercle, qui ne comprend pas l'origine; par suite on aura $\theta = 0$.

3. *Pour une valeur de r suffisamment grande, et pour toute valeur supérieure, on a* $\theta = 2n\pi$.

1° Nous allons montrer d'abord que, pour une telle valeur de r, φ augmentant de 2π, *chacune des fonctions x et y s'annule $2n$ fois.*

En posant

$$\delta = \frac{a_{n-1} r^{n-1} \sin(\omega_{n-1} + \overline{n-1}\,\varphi) + \ldots + a_0 \sin \omega_0}{a_n r^n},$$

$$\varepsilon = \frac{a_{n-1} r^{n-1} \cos(\omega_{n-1} + \overline{n-1}\,\varphi) + \ldots + a_0 \cos \omega_0}{a_n r^n},$$

on a

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin(\omega_n + n\varphi) + \delta}{\cos(\omega_n + n\varphi) + \varepsilon}.$$

On peut prendre r assez grand pour avoir

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} a_n r^n > a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0;$$

on aura alors, à plus forte raison,

$$|\delta| < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad |\varepsilon| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

pour toute valeur de φ.

Digitized by Google

Les valeurs de φ qui rendent $\sin(\omega_n + n\varphi)$ alternativement égal à $+1$ et à -1 sont distantes de $\frac{\pi}{n}$. A ces valeurs correspondent des valeurs de $\sin(\omega_n + n\varphi) + \delta$ alternativement positives et négatives et, comme cette fonction est continue, elle s'annule chaque fois entre deux de ces valeurs consécutives. Par conséquent, φ augmentant de 2π, cette fonction s'annule bien $2n$ fois.

Elle ne s'annule que $2n$ *fois.* — En effet, soient φ_1, φ_2 deux valeurs consécutives de φ pour lesquelles $\sin(\omega_n + n\varphi)$ est respectivement égal à $+1$ et à -1.

Tant qu'on a

$$|\sin(\omega_n + n\varphi)| > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$\sin(\omega_n + n\varphi) + \delta$ ne peut s'annuler, puisque $|\delta|$ est $< \frac{1}{\sqrt{2}}$; cela ne pourrait donc arriver que lorsque $\sin(\omega_n + n\varphi)$ varie de $+\frac{1}{\sqrt{2}}$ à $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Nous allons montrer que, dans cet intervalle, $\sin(\omega_n + n\varphi) + \delta$ a sa dérivée $n\cos(\omega_n + n\varphi) + \frac{d\delta}{d\varphi}$ constamment négative, d'où l'on déduira que cette fonction ne peut s'annuler plus d'une fois.

En effet, de

$$|\sin(\omega_n + n\varphi)| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

on tire

$$|\cos(\omega_n + n\varphi)| > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et

$$|n\cos(\omega_n + n\varphi)| > \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

Digitized by Google

D'autre part

$$\frac{d\delta}{d\varphi} = \frac{\left\{\begin{array}{c}(n-1)a_{n-1}r^{n-1}\cos(\omega_{n-1}+\overline{n-1}\,\varphi)\\ +(n-2)a_{n-2}r^{n-2}\cos(\omega_{n-2}+\overline{n-2}\,\varphi)+\ldots+a_1 r\cos(\omega_1+\varphi)\end{array}\right\}}{a_n r^n};$$

par conséquent

$$\left|\frac{d\delta}{d\varphi}\right| < \frac{(n-1)a_{n-1}r^{n-1}+(n-2)a_{n-2}r^{n-2}+\ldots+a_1 r}{a_n r}.$$

Or, l'inégalité (α) donne, *a fortiori*,

$$\frac{(n-1)a_{n-1}r^{n-1}+(n-2)a_{n-2}r^{n-2}+\ldots+a_1 r}{na_n r^n} < \frac{1}{\sqrt{2}},$$

d'où

$$\left|\frac{d\delta}{d\varphi}\right| < \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

Donc la dérivée $n\cos(\omega_n+n\varphi)+\frac{d\delta}{d\varphi}$ a le signe de son premier terme; d'ailleurs ce premier terme est négatif; car, l'arc augmentant de φ_1 à φ_2, $\sin(\omega_n+n\varphi)$ décroît de $+1$ à -1, par conséquent $\cos(\omega_n+n\varphi)$ est négatif dans tout l'intervalle $\varphi_1\ldots\varphi_2$.

On conclut que, φ augmentant de 2π, la fonction $\sin(\omega_n+n\varphi)+\delta$, par conséquent aussi y, qui a toujours le même signe qu'elle, s'annule $2n$ fois et ne s'annule que $2n$ fois.

On démontrera la même chose pour x.

2° *Les zéros de x et de y alternent.* — Il s'agit de montrer que, entre deux zéros de x, il y a toujours un zéro de y, et inversement.

Soient φ_1, φ_2, φ_3 trois valeurs consécutives de φ qui rendent $\sin(\omega_n+n\varphi)$ respectivement égal à $+1$, -1, $+1$. Entre ces trois valeurs il y a deux valeurs φ', φ'' qui annulent la fonction $\sin(\omega_x+n\varphi)+\delta$, et qui font

Digitized by Google

par conséquent

$$|\sin(\omega_n + n\varphi)| = |\delta|,$$

c'est-à-dire

$$|\sin(\omega_n + n\varphi)| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Mais alors on a, pour les mêmes valeurs φ', φ'',

$$|\cos(\omega_n + n\varphi)| > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

donc aussi

$$|\cos(\omega_n + n\varphi)| > |\varepsilon|.$$

Donc, pour ces valeurs φ', φ'', la fonction

$$\cos(\omega_n + n\varphi) + \varepsilon$$

a le signe de son premier terme. D'ailleurs ce premier terme est négatif pour φ', positif pour φ''. Car dans l'intervalle $\varphi_1 \ldots \varphi_2$, qui comprend φ', l'arc croissant de φ_1 à φ_2, $\sin(\omega_n + n\varphi)$ décroît de $+1$ à -1, donc $\cos(\omega_n + n\varphi)$ est négatif; on voit de même qu'il est positif pour φ''. Donc $\cos(\omega_n + n\varphi) + \varepsilon$, par conséquent aussi x, prend, pour φ', φ'', deux valeurs de signe contraire, et, par suite, s'annule pour une valeur intermédiaire de φ.

On voit de même que, entre deux zéros de x, il y en a un de y; donc les zéros alternent.

3° On voit en outre que, *lorsque y arrive à zéro par des valeurs positives, x est négatif*. En effet, pour la valeur φ', y arrive à zéro par des valeurs positives, et l'on vient de voir que, pour cette valeur φ', x est négatif. On verra de même que, lorsque y arrive à zéro par des valeurs négatives, x est positif. Inversement, lorsque x est positif avant de s'annuler pour

Digitized by Google

une certaine valeur de φ, y est positif pour cette valeur de φ et, si y est négatif, x est aussi négatif.

On conclut en somme que, φ augmentant de 2π, le point $M(x, y)$ rencontre les axes des coordonnées dans l'ordre suivant : la partie positive de l'axe des x, la partie positive de l'axe des y, la partie négative de l'axe des x, la partie négative de l'axe des y. Et, comme M rencontre chacun des axes $2n$ fois, on voit qu'il accomplit autour de l'origine n circonvolutions dans le sens positif; par conséquent :

Pour r assez grand, et pour toute valeur supérieure, on a $\theta = 2n\pi$.

4. Supposons que r, en partant de zéro, croît d'une manière continue, et considérons les valeurs correspondantes de θ.

Si entre deux valeurs r_1, r_2 de r il n'y a aucune racine du polynome, θ conserve dans cet intervalle une valeur constante.

On a, en effet,

$$\theta = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}$$

et

$$\theta = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\,\text{arc tang}\,\frac{y}{x}$$

ou bien

$$\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\varphi}\sigma(\varphi, r)\,d\varphi,$$

en posant

$$\sigma(\varphi, r) = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}.$$

Considérons la fonction $\frac{\partial}{\partial\varphi}\sigma(\varphi, r) = \frac{yx' - xy'}{x^2 + y^2}$. Comme

Digitized by Google

on a par supposition $x^2+y^2 \neq 0$ pour toute valeur de φ dans l'intervalle $r_1 \ldots r_2$, et comme x, y, x', y' sont des fonctions continues de φ, la fonction est elle-même finie et continue dans cet intervalle; par conséquent l'intégrale

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\partial}{\partial\varphi}\sigma(\varphi, r)\,d\varphi$$

est fonction continue de sa limite φ. Or cette intégrale, à la constante près, n'est autre chose que $\sigma(\varphi, r)$; donc $\sigma(\varphi, r)$ est fonction continue de φ dans l'intervalle. Il s'ensuit que la valeur de l'intégrale θ est bien représentée par la différence

$$\theta = \sigma(2\pi, r) - \sigma(0, r),$$

dans le même intervalle. Or cette différence est constante; en effet, sa dérivée par rapport à r est

$$\left(\frac{x\dfrac{\partial y}{\partial r} - y\dfrac{\partial x}{\partial r}}{x^2+y^2}\right)_{2\pi} - \left(\frac{x\dfrac{\partial y}{\partial r} - y\dfrac{\partial x}{\partial r}}{x^2+y^2}\right)_0,$$

les indices signifiant la valeur qu'il faut donner à φ dans chaque parenthèse. Cette dérivée est égale à o, car les dénominateurs sont constamment différents de o, tandis que d'autre part chacune des fonctions x, y, $\frac{\partial x}{\partial r}$, $\frac{\partial y}{\partial r}$ prend, pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$, les mêmes valeurs.

5. *Si entre les valeurs r_1, r_2 il y a une racine du polynome, r augmentant de r_1 à r_2, l'angle θ augmente de 2π.*

Soit p la racine, le polynome s'écrit

$$f(z) = f_1(z)(z-p),$$

Digitized by Google

le polynome $f_1(z)$ n'ayant aucune racine entre r_1 et r_2. Donc, en appelant θ_1 l'accroissement que prend l'argument de ce polynome $f_1(z)$, lorsque φ croît de 2π, d'après le n° 4, θ_1 aura une valeur constante entre r_1 et r_2. Mais, d'autre part, l'accroissement de l'argument du binome $z - p$, r augmentant de r_1 à r_2, augmentera de 2π.

En effet, les valeurs de $z - p$, pour une valeur constante de r et pour $\varphi = 0, \ldots, 2\pi$, sont représentées par une circonférence décrite autour du point $-p$ avec un rayon égal à la valeur de r.

Comme on a, par supposition,

$$r_1 < |p| < r_2,$$

on voit que, pour $r = r_1$, cette circonférence ne comprend pas l'origine, tandis que pour $r = r_2$ elle comprend l'origine. Donc, pour r_1 l'accroissement de l'argument de $z - p$ est égal à 0, tandis que pour r_2 il est égal à 2π. D'ailleurs, l'argument de $f(z)$ étant égal à la somme des arguments de ces facteurs $f_1(z)$ et $(z - p)$, on conclut que θ augmente de 2π.

On démontrerait de même que, si entre r_1, r_2 il y a m racines du polynome, r variant de r_1 à r_2, θ augmente de $2m\pi$.

S'il y a des racines égales, on voit qu'elles compteront comme autant de racines distinctes.

Il est clair aussi que, inversement, si, r variant de r_1 à r_2, θ augmente de $2m\pi$, il y a m racines du polynome dans cet intervalle.

Des n°s 3 et 5 on conclut que le polynome a n racines.

Digitized by Google

[K1, K13]

SUR LA DISTINCTION ANALYTIQUE DES RÉGIONS DÉTERMINÉES PAR UN TRIANGLE OU PAR UN TÉTRAÈDRE;

PAR M. CH. BIOCHE.

Étant données les équations des côtés d'un triangle il est facile de former les équations qui déterminent les centres des cercles tangents aux trois côtés. J'ai été conduit à chercher comment on pouvait distinguer les équations qui correspondent au centre du cercle *inscrit*, ou celles qui correspondent au centre d'un cercle *exinscrit* déterminé. Le caractère que j'ai obtenu est assez simple et me semble tout au moins peu connu.

Je me sers de cette remarque évidente que le centre de gravité est dans la région *intérieure;* or si les équations des côtés du triangle sont

$$D_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$$
$$D_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,$$
$$D_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 = 0,$$

et si l'on désigne par $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ les déterminants mineurs qui multiplient c_1, c_2 et c_3 dans le développement de

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire si l'on pose

$$\Delta = \delta_1 c_1 + \delta_2 c_2 + \delta_3 c_3,$$

Digitized by Google

les équations qui déterminent le centre de gravité peuvent s'écrire

$$D_1\delta_1 = D_2\delta_2 = D_3\delta_3.$$

On voit alors que dans la région *intérieure* D_1, D_2, D_3 prennent les signes de δ_1, δ_2, δ_3 ou ceux de $-\delta_1$, $-\delta_2$, $-\delta_3$.

Si l'on désigne par ε_1, ε_2, ε_3 des nombres algébriques ayant pour valeur absolue 1 et ayant les signes de δ_1, δ_2, δ_3, les équations qui déterminent le centre du cercle *inscrit* sont

$$\frac{D_1}{\varepsilon_1\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{D_2}{\varepsilon_2\sqrt{a_2^2+b_2^2}} = \frac{D_3}{\varepsilon_3\sqrt{a_3^2+b_3^2}};$$

le centre du cercle exinscrit situé, par rapport à D_1, du côté où n'est pas le sommet opposé à D_1, est donné par

$$\frac{D_1}{-\varepsilon_1\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{D_2}{\varepsilon_2\sqrt{a_2^2+b_2^2}} = \frac{D_3}{\varepsilon_3\sqrt{a_3^2+b_3^2}}.$$

Plus généralement, il est facile d'obtenir, connaissant les signes de δ_1, δ_2, δ_3, le système des signes que prennent D_1, D_2, D_3 dans une région déterminée.

Il est naturel de se poser, pour le tétraèdre, des questions analogues aux précédentes. Si les faces du tétraèdre sont données par des équations

$$P_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

et si l'on pose

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \delta_1 d_1 + \delta_2 d_2 + \delta_3 d_3 + \delta_4 d_4,$$

on voit facilement que le centre de gravité est donné

Digitized by Google

par les équations

$$P_1\delta_1 = P_2\delta_2 = P_3\delta_3 = P_4\delta_4,$$

et la considération des signes de δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 permet de distinguer les systèmes de signes que prennent P_1, P_2, P_3, P_4 dans les différentes régions déterminées dans l'espace par les faces du tétraèdre.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1904).

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. A. VACQUANT,
Professeur au lycée de Nancy.

On donne un cylindre défini en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y^2 - 2px = 0$$

et un plan dont l'équation est

$$z - by + \lambda(x - ay) = 0.$$

1° *Calculer les coordonnées du sommet* S *de la parabole section du cylindre par le plan. Trouver la courbe* C, *lieu géométrique de ce sommet quand* λ *varie, a et b restant fixes. Montrer que cette courbe possède en général deux points doubles et peut être placée sur deux cônes du troisième ordre.*

2° *On considère la courbe particulière* C′ *obtenue en posant*

$$a = 1, \qquad b = 0.$$

Digitized by Google

Quelles sont les relations qui existent entre les valeurs de λ qui correspondent aux points de rencontre de C′ *avec un plan arbitraire?*

Discuter la réalité des points de rencontre de cette courbe avec un plan osculateur quelconque.

3° *Démontrer que, par toute droite tangente en un point* A *à* C′, *on peut mener trois plans qui lui soient tangents chacun en un point autre que* A; *réalité de ces plans.*

Les plans bitangents à la courbe C′ *se partagent en deux familles; démontrer que les plans de l'une des familles sont tangents au cylindre parabolique et ceux de l'autre famille tangents à une surface du second ordre dont on déterminera le genre.*

1. Soient (x_0, y_0, z_0) les coordonnées du sommet S de la parabole section du cylindre

$$y^2 - 2px = 0$$

par le plan P

$$z - by + \lambda(x - ay) = 0.$$

Le point S sera sommet de la parabole si la tangente ST en ce point est perpendiculaire au diamètre SM de la parabole. Les équations de ST et de SM sont respectivement

$$yy_0 - p(x + x_0) = 0,$$
$$z - by + \lambda(x - ay) = 0$$

et

$$y - y_0 = 0,$$
$$z - by + \lambda(x - ay) = 0.$$

Les paramètres directeurs de ST sont

$$-y_0, \quad -p, \quad -p(b + a\lambda) + \lambda y_0;$$

Digitized by Google

ceux de SM sont

$$-1, \quad 0, \quad \lambda.$$

Pour que ces deux droites soient perpendiculaires, il faut

$$y_0 + \lambda[\lambda y_0 - p(b + a\lambda)] = 0.$$

Les coordonnées du sommet de la parabole sont définies par les équations suivantes, dans lesquelles on a enlevé l'indice o :

$$(1) \qquad \begin{cases} y(1+\lambda^2) - p\lambda(b+a\lambda) = 0, \\ z - by + \lambda(x - ay) \qquad = 0, \\ y^2 - 2px \qquad\qquad\qquad = 0. \end{cases}$$

On en déduit

$$y = \frac{p\lambda(b+a\lambda)}{1+\lambda^2},$$

$$x = \frac{y^2}{2p} = \frac{p\lambda^2(b+a\lambda)^2}{2(1+\lambda^2)^2},$$

$$z = by - \lambda\left(\frac{y^2}{2p} - ay\right) = y\left(b + a\lambda - \frac{\lambda y}{2p}\right),$$

$$z = y\left(b + a\lambda - \frac{\lambda^2(b+a\lambda)}{2(1+\lambda^2)}\right),$$

$$z = \frac{p\lambda(b+a\lambda)^2(2+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)^2}.$$

Les coordonnées du sommet S de la parabole sont donc

$$(\mathrm{C}) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{p\lambda^2(b+a\lambda)^2}{2(1+\lambda^2)^2}, \\ y = \dfrac{p\lambda(b+a\lambda)}{1+\lambda^2} = \dfrac{2p\lambda(b+a\lambda)(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)^2}, \\ z = \dfrac{p\lambda(b+a\lambda)^2(2+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)^2}. \end{cases}$$

Quand λ varie, a et b restant fixes, ces équations montrent que S décrit une courbe unicursale C d'ordre 5.

Digitized by Google

Si l'on élimine λ entre les deux premières équations (1), on obtient l'équation

$$(S_3)\quad \begin{cases} y[(x-ay)^2+(z-by)^2] \\ \quad +p(z-by)[b(x-ay)-a(z-by)]=0, \end{cases}$$

représentant une surface réglée du troisième ordre S_3 admettant pour droite double la droite D

$$z-by=0,$$
$$x-ay=0,$$

autour de laquelle tournent les plans P, et pour génératrice la droite, parallèle au plan zOx, définie par les deux premières équations (1). S_3 est donc un conoïde d'axe D, de plan directeur zOx. La surface S_3 et le cylindre parabolique ont en commun la droite de l'infini du plan zOx, et le reste de l'intersection est la courbe C.

La droite double D de S_3 rencontre le cylindre au point O et en un deuxième point O'; les points O et O' sont, par suite, points doubles de C. Les coordonnées de O' sont

$$x=2a^2p, \qquad y=2ap, \qquad z=2abp.$$

On peut retrouver ces points doubles à l'aide des équations (C). En effet, on a le même point O pour les valeurs différentes $\lambda=0$, $\lambda=-\frac{b}{a}$ du paramètre λ, et l'on a le point O' pour les valeurs de λ, racines de l'équation

$$2ap=\frac{p\lambda(b+a\lambda)}{1+\lambda^2}$$

ou

$$a(2+\lambda^2)=b\lambda.$$

Pour ces valeurs, x et z prennent les mêmes valeurs $2a^2p$ et $2abp$. Le point double O' ne correspond à des

Digitized by Google

branches réelles que si l'on a

$$b^2 - 8a^2 \geqq 0.$$

Si l'on considère le cône Γ de sommet O, de directrice C, il sera du troisième ordre, car tout plan mené par le point double O de C coupe cette courbe en trois autres points et, par suite, coupe Γ suivant trois génératrices. De même, le cône Γ', ayant pour sommet le deuxième point double O' et pour directrice C, est du troisième ordre.

L'équation du cône Γ s'obtient immédiatement en remplaçant, dans l'équation (S_3), y par $\frac{2px}{y}$; d'où

$$(\Gamma) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2x[(x-ay)^2+(z-by)^2] \\ & \quad + y(z-by)[b(x-ay)-a(z-by)] = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} x - 2a^2p &= X, \\ y - 2ap &= Y, \\ z - 2abp &= Z, \end{aligned}$$

les équations (1) s'écrivent

$$(1)' \qquad \left\{ \begin{aligned} & (Y+2ap)(1+\lambda^2) - p\lambda(b+a\lambda) = 0, \\ & Z - bY + \lambda(X - aY) = 0, \\ & (Y+2ap)^2 - 2p(X+2a^2p) = 0. \end{aligned} \right.$$

En faisant une combinaison linéaire et homogène en X, Y avec la première et la troisième de ces équations, puis, remplaçant, dans l'équation obtenue, λ par sa valeur tirée de la deuxième, on obtient l'équation du cône Γ', savoir :

$$(\Gamma') \quad \left\{ \begin{aligned} & 2(X-aY)[(X-aY)^2+(Z-bY)^2] \\ & \quad + Y(Z-bY)[b(X-aY)-a(Z-bY)] = 0. \end{aligned} \right.$$

Les deux cônes Γ et Γ' admettent pour génératrice double la droite D.

Digitized by Google

2. Si l'on suppose $a = 1$, $b = 0$, les équations (C) deviennent

$$(\text{C}')\quad \begin{cases} x = \dfrac{p\lambda^4}{2(1+\lambda^2)^2}, \\ y = \dfrac{p\lambda^2}{1+\lambda^2} = \dfrac{2p\lambda^2(1+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)^2}, \\ z = \dfrac{p\lambda^3(2+\lambda^2)}{2(1+\lambda^2)^2}. \end{cases}$$

Elles définissent une courbe C′ de cinquième ordre et unicursale. Les valeurs du paramètre λ correspondant aux points d'intersection de C′ avec un plan quelconque

$$ux + vy + wz + h = 0$$

sont les racines de l'équation du cinquième degré

$$pu\lambda^4 + 2pv\lambda^2(1+\lambda^2) + pw\lambda^3(2+\lambda^2) + 2h(1+\lambda^2)^2 = 0$$

ou

$$pw\lambda^5 + (pu + 2pv + 2h)\lambda^4 + 2pw\lambda^3 + (2pv + 4h)\lambda^2 + 2h = 0.$$

En désignant les racines par λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 et posant

$$S_1 = \Sigma\lambda_1, \qquad S_2 = \Sigma\lambda_1\lambda_2, \qquad \ldots,$$

on a les relations

$$(2)\quad \begin{cases} S_1 pw + pu + 2pv + 2h = 0, \\ S_2 pw - 2pw = 0, \\ S_3 pw + 2pv + 4h = 0, \\ S_4 pw = 0, \\ S_5 pw + 2h = 0. \end{cases}$$

La deuxième et la quatrième de ces relations, savoir

$$pw(S_2 - 2) = 0,$$
$$pw S_4 = 0,$$

Digitized by Google

équivalent, en supposant $w \neq 0$, aux relations

$$S_2 - 2 = 0,$$
$$S_4 \quad = 0;$$

ce sont les relations demandées, le plan (u, v, w, h) étant quelconque.

Si $w = 0$, le plan donné est parallèle à Oz et les valeurs de λ correspondant aux points d'intersection de ce plan avec C' sont racines de l'équation bicarrée

$$(pu + 2pv + 2h)\lambda^4 + 2(pv + 2h)\lambda^2 + 2h = 0,$$

et les valeurs de λ sont deux à deux égales et de signes contraires.

Les relations

$$S_2 - 2 = 0,$$
$$S_4 \quad = 0$$

peuvent s'écrire

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1(\lambda_4 + \lambda_5) + \lambda_2(\lambda_4 + \lambda_5) + \lambda_3(\lambda_4 + \lambda_5) + \lambda_4\lambda_5 - 2 = 0,$$
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_5 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4\lambda_5 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4\lambda_5 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 = 0.$$

Si le plan sécant est osculateur à C' en un point de paramètre λ, on aura

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda,$$

et les relations deviennent

$$3\lambda^2 + 3\lambda(\lambda_4 + \lambda_5) + \lambda_4\lambda_5 - 2 = 0,$$
$$\lambda^3(\lambda_4 + \lambda_5) + 3\lambda^2\lambda_4\lambda_5 = 0$$

ou

$$3\lambda(\lambda_4 + \lambda_5) + \lambda_4\lambda_5 + 3\lambda^2 - 2 = 0,$$
$$\lambda(\lambda_4 + \lambda_5) + 3\lambda_4\lambda_5 = 0.$$

De ces équations linéaires en $\lambda_4 + \lambda_5$ et $\lambda_4\lambda_5$, on

déduit

$$\lambda_4 + \lambda_5 = \frac{3(2 - 3\lambda^2)}{8\lambda},$$

$$\lambda_4 \lambda_5 = \frac{3\lambda^2 - 2}{8}.$$

Les valeurs λ_4, λ_5 correspondant aux points de rencontre d'un plan osculateur λ avec la courbe C′ sont donc racines de l'équation

$$u^2 + \frac{3(3\lambda^2 - 2)}{8\lambda} u + \frac{3\lambda^2 - 2}{8} = 0.$$

Elles sont réelles si

$$\frac{9(3\lambda^2 - 2)^2}{64\lambda^2} - \frac{4(3\lambda^2 - 2)}{8} \geqq 0$$

ou

$$(3\lambda^2 - 2)[9(3\lambda^2 - 2) - 32\lambda^2] \geqq 0,$$

$$(3\lambda^2 - 2)(-5\lambda^2 - 18) \geqq 0,$$

ou

$$3\lambda^2 - 2 \leqq 0,$$

c'est-à-dire

$$-\sqrt{\frac{2}{3}} \leqq \lambda \leqq +\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

3. Soient λ le paramètre du point de contact A, μ celui du deuxième point de contact B et λ_5 celui du troisième point de rencontre E d'un plan bitangent à C′ avec la courbe C′. On aura

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \mu,$$

et les relations trouvées précédemment deviennent

$$\lambda^2 + \mu^2 + 4\lambda\mu + 2\lambda_5(\lambda + \mu) - 2 = 0,$$

$$\lambda\mu[\lambda\mu + 2\lambda_5(\lambda + \mu)] = 0.$$

La solution

$$\mu = 0, \qquad \lambda_5 = \frac{2 - \lambda^2}{2\lambda}$$

Digitized by Google

donne le plan mené par la tangente en A à C′ et le point double O; cette solution est singulière. Restent les solutions définies par les relations

$$\lambda^2 + \mu^2 + 4\lambda\mu + 2\lambda_3(\lambda + \mu) - 2 = 0,$$
$$\lambda\mu + 2\lambda_3(\lambda + \mu) = 0.$$

En éliminant λ_3 on a l'équation en μ

$$\mu^2 + 3\lambda\mu + \lambda^2 - 2 = 0,$$

qui a toujours ses racines réelles, car on a

$$9\lambda^2 - 4(\lambda^2 - 2) = 5\lambda^2 + 8 > 0.$$

Il faut maintenant examiner le cas où le plan mené par la tangente en A à C′ est parallèle à Oz, c'est-à-dire où $w = 0$. Ce plan sera bitangent à C′ si l'équation bicarrée

$$(pu + 2pv + 2h)\lambda^4 + 2(pv + 2h)\lambda^2 + 2h = 0,$$

donnant les λ des points de rencontre de ce plan avec C′, a deux racines doubles, ce qui exige

$$(pv + 2h)^2 - 2h(pu + 2pv + 2h) = 0$$

ou

$$pv^2 - 2hu = 0,$$

équation qui exprime que le plan (u, v, o, h), bitangent à C′, est tangent au cylindre parabolique.

Ce résultat s'apercevait sur les équations (1), car, y étant donné, il lui correspond deux valeurs de λ et, par suite, deux points de C situés sur la génératrice du cylindre parabolique définie par cette valeur de y; en ces deux points, le plan tangent au cylindre le long de cette génératrice est tangent à C. La même propriété existe pour la courbe C′.

Les plans bitangents à C′ forment donc deux familles;

Digitized by Google

l'une se compose des plans tangents au cylindre et l'autre famille est telle que, par toute tangente à C', il passe deux de ces plans; d'ailleurs les plans de la seconde famille enveloppent une surface développable, car leurs coordonnées (u, v, w, h) sont liées par deux relations qu'on obtiendrait en éliminant λ, μ et λ_5 entre les cinq équations (2). Cette surface développable a pour directrices la courbe C' et une surface qui sera du second ordre, puisque par toute droite tangente à C' on peut mener deux plans tangents à cette surface.

On peut trouver l'équation tangentielle de cette quadrique de la manière suivante.

Dans le cas actuel les équations (2) deviennent

$$[2(\lambda+\mu)+\lambda_5]pw + pu + 2pv + 2h = 0,$$
$$[\lambda_5(\lambda^2+\mu^2+4\lambda\mu)+2\lambda\mu(\lambda+\mu)]pw + 2pv + 4h = 0,$$
$$\lambda^2\mu^2\lambda_5 pw + 2h = 0,$$
$$\lambda^2+\mu^2+4\lambda\mu+2\lambda_5(\lambda+\mu)-2 = 0,$$
$$[\lambda\mu+2\lambda_5(\lambda+\mu)]\lambda\mu = 0.$$

En éliminant λ_5 entre ces équations on obtient

$$(\lambda+\mu)^2+\lambda\mu-2 = 0,$$
$$[4(\lambda+\mu)^2-\lambda\mu]pw + 2(pu+2pv+2h)(\lambda+\mu) = 0,$$
$$[-\lambda\mu(\lambda\mu+2)+4\lambda\mu(\lambda+\mu)^2]pw + 2(2pv+4h)(\lambda+\mu) = 0,$$
$$-\lambda^3\mu^3 pw + 4h(\lambda+\mu) = 0.$$

En remplaçant $(\lambda+\mu)^2$ par $2-\lambda\mu$ et en résolvant les trois dernières équations par rapport à u, v, w, on trouve

$$\frac{u}{2\lambda^3\mu^3-10\lambda^2\mu^2+22\lambda\mu-16}$$
$$=\frac{v}{-2\lambda^3\mu^3+5\lambda^2\mu^2-6\lambda\mu}=\frac{w}{4(\lambda+\mu)}=\frac{h}{p\lambda^3\mu^3},$$

de sorte que, en posant

$$\lambda\mu = \alpha,$$

Digitized by Google

on peut prendre pour nouvelles coordonnées homogènes d'un plan bitangent à C', de la deuxième famille, les quantités (u, v, w, h) définies par

$$\begin{aligned}
h &= p\alpha^3,\\
u &= 2\alpha^3 - 10\alpha^2 + 22\alpha - 16,\\
v &= -2\alpha^3 + 5\alpha^2 - 6\alpha,\\
w^2 &= 16(2-\alpha).
\end{aligned}$$

On a ainsi une représentation paramétrique de la surface développable engendrée par les plans bitangents à C' de la seconde famille. D'ailleurs sur les équations (C') on voit que la courbe C' est symétrique par rapport au plan $z=0$; par suite si (u, v, w, h) est une solution de l'équation de la quadrique cherchée, $(u, v, -w, h)$ en est une autre; l'équation de cette quadrique ne contiendra pas de termes en w. Donc, si l'on considère les équations

$$\begin{aligned}
h^2 &= p^2\alpha^6,\\
u^2 &= (2\alpha^3 - 10\alpha^2 + 22\alpha - 16)^2,\\
v^2 &= (-2\alpha^3 + 5\alpha^2 - 6\alpha)^2,\\
w^2 &= 16(2-\alpha),\\
uh &= p\alpha^3(2\alpha^3 - 10\alpha^2 + 22\alpha - 16),\\
vh &= p\alpha^3(-2\alpha^3 + 5\alpha^2 - 6\alpha),\\
uv &= (2\alpha^3 - 10\alpha^2 + 22\alpha - 16)(-2\alpha^3 + 5\alpha^2 - 6\alpha),
\end{aligned}$$

on doit pouvoir déterminer les multiplicateurs m_1, $m_2, \ldots, m_6$ de façon à obtenir, quel que soit α, l'équation

$$\frac{h^2}{p^2} + m_1 u^2 + m_2 v^2 + m_3 w^2 + m_4 u\frac{h}{p} + m_5 v\frac{h}{p} + m_6 uv = 0.$$

En annulant les coefficients de $\alpha^6, \alpha^5, \ldots, \alpha$ dans le second membre de la combinaison linéaire à établir, on obtient six équations linéaires pour déterminer les mul-

Digitized by Google

tiplicateurs. On trouve ainsi par un calcul facile mais assez long

$$m_1 = \frac{1}{7}, \qquad m_2 = \frac{13}{7}, \qquad m_3 = -\frac{8}{7},$$
$$m_4 = -\frac{9}{14}, \qquad m_5 = \frac{15}{7}, \qquad m_6 = \frac{6}{7}.$$

Il faut ensuite vérifier que le terme indépendant de α dans la combinaison linéaire est nul, c'est-à-dire il faut vérifier l'égalité

$$16^2 m_1 + 32 m_3 = 0$$

ou

$$16^2 - 32 \times 8 = 0,$$

ce qui est.

L'équation tangentielle de la quadrique demandée est

$$u^2 + 13v^2 - 8w^2 + 6uv + \frac{h}{p}\left(-\frac{9}{7}u + 15v\right) + \frac{h^2}{p^2} = 0;$$

elle représente une surface à centre unique qui est un hyperboloïde à deux nappes, car l'équation s'écrit

$$\left[\frac{h}{p} + \frac{1}{2}\left(-\frac{9}{7}u + 15v\right)\right]^2$$
$$- \frac{1}{4}\left(-\frac{9}{7}u + 15v\right)^2 + u^2 + 13v^2 - 8w^2 + 6uv = 0$$

ou

$$\left[\frac{h}{p} + \frac{1}{2}\left(-\frac{9}{7}u + 15v\right)\right]^2 + \frac{115}{14^2}u^2 + \frac{219}{14}uv - \frac{173}{4}v^2 - 8w^2 = 0,$$

équation de la forme

$$A^2 + B^2 - k^2v^2 - 8w^2 = 0,$$

B désignant une fonction linéaire en u et v, et k un coefficient numérique.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1904).

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

Par M. C. CLAPIER.

On donne, dans un plan, deux points A *et* A′ *et une droite* D *menée par* A; *un cercle variable* Γ, *situé dans ce plan, passe constamment par* A *et* A′. *Autour du point variable* M *où ce cercle rencontre* D, *on fait tourner la tangente en ce point à* Γ *d'un angle donné* α *dans le plan orienté; soit* Δ *la droite ainsi obtenue.*

1° *La droite* Δ *rencontre* Γ *en un point* M′ *autre que* M; *le lieu des points* M′ *est une droite* D′ *que l'on construira.*

Trouver le lieu géométrique de la projection orthogonale du point A′ *sur* Δ.

2° *Démontrer que le lieu géométrique du pôle* P *de* Δ *par rapport à* Γ *est une droite* d.

3° *Soit* d_1 *une droite donnée dans le plan; chercher si cette droite peut être regardée comme lieu* d *du point* P, *en choisissant convenablement la droite* D *et l'angle* α.

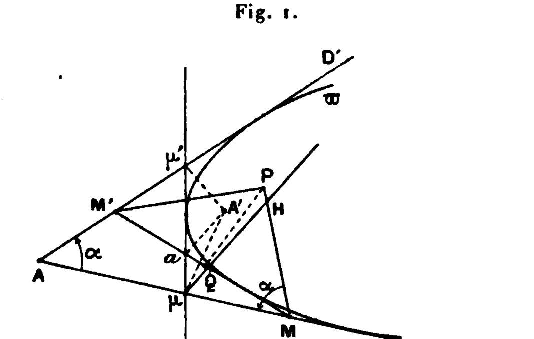
4° *Trouver l'enveloppe de* d *lorsque* D *tourne autour du point* A, *l'angle* α *restant constant.*

5° *Soit* T *le triangle dont les sommets sont le point* P *et les points de rencontre de* Δ *et* Γ : *étudier le déplacement du cercle circonscrit à ce triangle.*

Digitized by Google

I. Si l'on fait tourner la droite D d'un angle α autour du point A, dans le sens de l'orientation du plan, on obtiendra la droite D'. Le cercle variable Γ, qui passe par les points donnés A et A', rencontre les droites D et D', aux points M et M'; les projections orthogonales du point A' sur les côtés du triangle AMM' sont sur une droite de Simpson $\overline{\mu\mu'}$ (*fig.* 1). Ainsi la projection a

Fig. 1.



du point A' sur la corde variable $\overline{MM'}$ ou Δ est une droite; il en résulte que Δ enveloppe une parabole ϖ admettant cette droite comme tangente au sommet et le point A' comme foyer.

Remarques. — 1° Projetons le point A' en H sur la tangente MP au cercle Γ; les points a, μ, H sont sur le cercle décrit sur A'M comme diamètre. L'angle $\widehat{a\mu H}$ est égal à α; il en résulte que MP enveloppe une parabole confocale à la première, ayant avec celle-ci la tangente commune D. D'ailleurs, en général, si un angle fixe se meut de manière que son sommet décrive une tangente à une parabole et que l'un de ses côtés touche cette

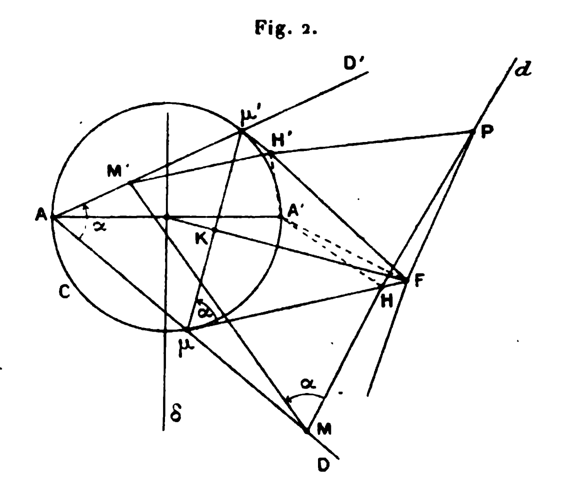
Digitized by Google

parabole, l'autre côté enveloppe une parabole ayant même foyer que la première.

2° Le milieu Q de la tangente MM' à la parabole ϖ inscrite dans l'angle DAD', décrit une droite, qui est la tangente à la parabole ϖ parallèle à la polaire du point A. Donc la perpendiculaire PQ à Δ enveloppe une parabole ϖ' confocale à la précédente; la tangente au sommet s'obtiendra en menant une perpendiculaire à $\overline{\mu\mu'}$ en son milieu.

II. Supposons que le cercle Γ (*fig.* 2) prenne

Fig. 2.



la position C, qui admet pour diamètre AA'; le triangle MM'P devient le triangle μμ'F. Nous avons vu que la projection H de A' sur MP est sur la droite μF, faisant avec μμ' l'angle α; de même la projection H' du point A' sur M'P décrit le côté μ'F. Mais, d'autre part, l'angle $\widehat{HFH'}$ est égal à l'angle $\widehat{HPH'}$ ou 180° — 2α; il en résulte que la circonférence décrite sur A'P comme

Digitized by Google

diamètre passe par H, H′ et F. L'angle $A'FP$ est droit et le lieu du point P est une droite d qu'il est facile de placer lorsqu'on a déterminé le point fixe F.

III. Inversement, si le point F est donné sur la droite d, en menant par ce point les tangentes $F\mu$, $F\mu'$ au cercle C, on en déduira sans ambiguïté la droite D et l'angle α.

Pour qu'une droite d_1 donnée dans le plan puisse être envisagée comme lieu géométrique du pôle P par rapport à Δ, il faut et il suffit que le point F_1, obtenu en projetant le point A′, soit en dehors du cercle C; en d'autres termes la droite d_1 devra rencontrer la ligne indéfinie AA′ en un point qui soit en dehors du segment $\overline{AA'}$.

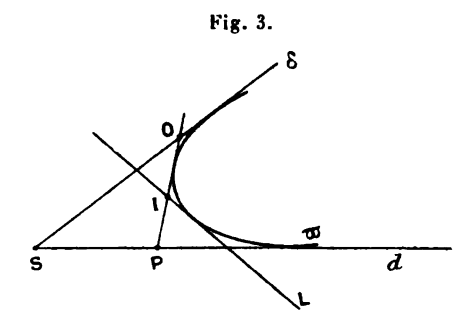
IV. Lorsque D tourne autour du point A, l'angle α restant constant, l'angle $\widehat{\mu F \mu'}$ reste fixe et le point F décrit une circonférence C′ concentrique au cercle C. La droite d se meut de manière que la projection orthogonale du point A′ décrive un cercle C′ extérieur à ce point; elle enveloppe une ellipse ayant les points A et A′ comme foyers.

V. Nous avons vu que les côtés et la hauteur $\overline{PQ}$ variable du triangle T enveloppaient quatre paraboles confocales; le centre O du cercle Γ est situé à l'intersection de PQ avec la perpendiculaire δ au milieu de AA′. Le cercle circonscrit au triangle T est décrit sur OP comme diamètre; il se déplace de manière que ce diamètre enveloppe une parabole ϖ' et que ses extrémités O et P décrivent respectivement deux droites δ et d.

Digitized by Google

Cette parabole ϖ' admet comme tangente au sommet la perpendiculaire KF à $\mu\mu'$; comme les projections du foyer A' sur d et δ sont situées sur cette droite, elle est inscrite dans l'angle formé par les droites respectivement lieux du pôle P et du centre O (*fig.* 3). Le point I

Fig. 3.



milieu de OP décrit une tangente IL à la parabole ϖ'; c'est le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle T. Deux pareils cercles infiniment voisins se couperont en deux points sur une perpendiculaire à L et réciproquement sur toute normale à L existeront deux points de leur enveloppe; celle-ci est une conique admettant comme axe de symétrie la ligne L qu'il est facile de placer en prenant deux positions particulières du triangle T.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Paris.

Épreuve écrite. — *Une plaque rectangulaire (homogène) pesante* ABCD *repose par un de ses côtés* AB *sur un plan horizontal fixe* $\xi O \eta$, *sur lequel elle peut glisser sans frottement; trouver le mouvement de cette plaque*

Digitized by Google

en la supposant placée dans des conditions initiales quelconques. Examiner en particulier le cas où la plaque part du repos.

NOTATIONS. — *On appellera* $2a$ *et* $2b$ *les côtés* AB *et* CD *de la plaque;* M *sa masse;* ξ, η *les coordonnées de la projection du centre de gravité sur le plan fixe* $\xi O \eta$; θ *l'inclinaison de la plaque sur le plan;* ψ *l'angle du côté* AB *avec* $O\xi$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un vase ouvert a, à sa partie supérieure, la forme d'un quart de sphère. Ce vase est limité en avant par une portion de surface sphérique de centre* O *et de* $0^m,25$ *de rayon, en arrière par une paroi plane ayant la forme d'un demi-grand cercle vertical, en haut par une demi-circonférence de grand cercle horizontale. Ce vase est rempli d'eau jusqu'aux bords.*

1° *Calculer en dynes la résultante des pressions de l'eau sur le vase entier.*

2° *Calculer de même la résultante des pressions sur la paroi verticale.*

3° *Déterminer en grandeur et direction la résultante des pressions de l'eau sur la paroi sphérique.*

On négligera l'action de la pression atmosphérique sur la surface libre de l'eau et sur les parois extérieures du vase. (Juillet 1903.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une plaque carrée homogène, pesante,* OABC, *est assujettie à tourner autour d'un des côtés* OC, *supposé vertical et fixe. Une deuxième plaque identique,* OADE, *est articulée à la première le long du côté inférieur* OA *supposé commun aux deux, de telle façon que le mouvement de la deuxième plaque, par rapport à la première, ne peut être qu'une rotation autour de l'horizontale* OA.

Trouver le mouvement de ce système :

1° *En le supposant placé dans des conditions initiales quelconques;*

2° *En supposant qu'il parte du repos, dans une position initiale quelconque.*

On néglige les frottements.

Digitized by Google

Notations. — *On appellera a la longueur d'un côté* OA; ψ *l'angle de* OA *avec une horizontale fixe* Ox; θ *l'angle de la plaque* OADE *avec le plan horizontal fixe* xOy.

Épreuve pratique. — *Un prisme droit homogène, pesant, a pour base un triangle équilatéral* ACD, *dont le côté* $a = 0^m,50$. *La hauteur du prisme* AB *est* $h = 2^m$. *Ce prisme est suspendu par l'arête* AB, *supposée horizontale et fixe : il peut osciller librement autour de cette arête.*

Calculer, en secondes, la durée des oscillations infiniment petites en un lieu où l'accélération g due à la pesanteur est, dans le système C.G.S., *exprimée par le nombre* 980. (Octobre 1903.)

Épreuve écrite. — *Deux barres* AB, CD, *homogènes, pesantes, de même longueur et de même densité, sont articulées en un point* B, *extrémité de l'une des barres et milieu de la seconde barre. L'autre extrémité* A *de la première barre est assujettie à glisser sans frottement sur un plan horizontal* xOy.

1° *On abandonne à l'instant* $t = 0$ *le système dans un plan vertical, avec des vitesses situées aussi dans ce plan. Étudier le mouvement du système en admettant que le point* A *ne puisse quitter d'aucun côté le plan* xOy.

2° *Les conditions initiales étant les mêmes, mais le point* A *pouvant s'élever au-dessus du plan* xOy, *à quelle restriction sont assujetties les conditions initiales pour que le point* A *ne quitte pas immédiatement le plan* xOy?

3° *Quand cette condition n'est pas remplie, étudier le mouvement libre du système.*

Épreuve pratique. — *Une sphère solide, homogène, pesante, de densité* 7 *et de rayon égal à* 5^{cm}, *est lancée dans l'air immobile. Soient* $d\sigma$ *un élément de la surface de la sphère,* V *la vitesse de cet élément à l'instant* t, *et* V_n *la composante de* V *normale à* $d\sigma$. *On admet que la réaction de l'air sur cet élément est normale à* $d\sigma$, *directement opposée à* V_n *et que sa valeur absolue en unités* C.G.S. *est égale à*

$$d\sigma\left(2,3 + \frac{8V_n^2}{10^4}\right).$$

Digitized by Google

1° *Calculer, en unités* C.G.S., *la force unique* R, *qui équivaut, à un instant* t, *à la résistance de l'air sur la sphère, connaissant, à cet instant* t, *la vitesse* W *du centre* C *de la sphère. Quelle est la valeur numérique de* R, *si l'on prend comme unité de force le kilogramme-poids et si* W *désigne la vitesse de* C *en mètres? (L'unité de temps reste la seconde et l'accélération* g *de la pesanteur est prise égale à* $9^m,81$.)

2° *La sphère étant abandonnée sans vitesse initiale dans l'air à l'instant* $t = 0$, *calculer son mouvement. Vers quelle limite tend la vitesse* W *de* C? *A quoi est égale cette vitesse au bout de* 20 *secondes?* (Juillet 1904.)

CERTIFICATS D'ASTRONOMIE.

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Mesure du temps. Le candidat devra définir les diverses unités (jours et années) employées en Astronomie, décrire les moyens de les déterminer, préciser leurs durées et leurs variations s'il y a lieu, leurs rapports et les origines à partir desquelles on les compte, enfin la conversion de ces unités les unes dans les autres.*

2° *Théorie et emploi du niveau à bulle d'air*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On a observé le centre de la Lune, en un lieu donné de la surface de la Terre; l'ascension droite observée est*

$$\alpha' = 15^h 22^m 0^s,56;$$

la déclinaison observée est

$$\delta' = -14^\circ 54' 36'',0;$$

le temps sidéral local au moment de l'observation est

$$t = 8^h 35^m 39^s,02;$$



la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune au même moment est

$$\pi = 55'50'',3;$$

la latitude géocentrique du lieu d'observation est

$$\varphi = 51^\circ 17' 24'',6,$$

et le rayon vecteur de ce point est

$$\rho = 0,99796,$$

le rayon équatorial de la Terre étant pris pour unité.

On demande de calculer l'ascension droite α *et la déclinaison géocentrique* δ *du centre de la Lune au même instant.*

Logarithmes à cinq décimales. (Juillet 1903.)

Épreuve écrite. — I. *Aberration de la lumière : définition générale; effet particulier de chacun des mouvements de la Terre. Étude spéciale de l'aberration des fixes. Détermination de la constante d'aberration.*

II. *Mesure d'une distance zénithale à l'aide du théodolite.*

Épreuve pratique. — *Dans un lieu dont la latitude boréale est* 50°, *on a observé au théodolite une étoile dont la hauteur est de* 70° *et l'azimut de* 300°; *le temps sidéral local de l'observation est de* 20^h.

Calculer la longitude et la latitude de cette étoile, en supposant l'obliquité de l'écliptique égale à 23° 27'.

(Octobre 1903.)

Épreuve écrite. — I. *Expliquer et calculer l'influence de la parallaxe diurne sur les observations d'un astre.* (*On calculera simplement les corrections qu'il faut faire subir à l'ascension droite et à la déclinaison observées pour les ramener au centre de la Terre. On suppose d'ailleurs la parallaxe de l'astre assez petite pour que l'on puisse négliger son carré.*)

II. *Expliquer les principes de quelques méthodes employées pour la détermination de la parallaxe du Soleil.*

Digitized by Google

Épreuve pratique. — *On trouve dans la* Connaissance des Temps pour 1903 *que le 1er novembre, à midi moyen, temps de Paris, les coordonnées géocentriques du Soleil étaient :*

Longitude..............	217°53′25″,4
Latitude................	0″,55
Log du rayon vecteur....	$\bar{1}$,99663

On trouve de plus qu'à la même date les coordonnées héliocentriques vraies de Mercure étaient :

Longitude..............	171°18′19″,6
Latitude................	5°48′25″,2
Log du rayon vecteur...	$\bar{1}$,57716

On demande de calculer, pour la même date, avec la précision des Tables à cinq décimales, la longitude et la latitude géocentriques de Mercure, ainsi que le logarithme de la distance de Mercure à la Terre.

(Juillet 1904.)

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES PRÉPARATOIRES A L'ÉTUDE DES SCIENCES PHYSIQUES.

ANALYSE ET MÉCANIQUE.

Lyon.

Épreuve écrite. — I. *Vérifier que l'intégrale générale de*

$$(1)\qquad x(x-a)\,dy + b^2\,dx - y(x+a)\,dx = 0$$

est

$$(2)\qquad 2xy - b^2 - m(x-a)^2 = 0 \qquad (m = \text{param. arbitr.})$$

et construire les courbes (2) *en coordonnées rectangulaires* x *et* y.

Digitized by Google

II. *Établir, pour* $0 < x < 1$, *la convergence de la série où le terme général*

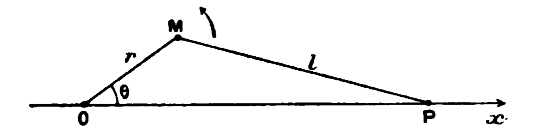
$$u_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}$$

et calculer, pour $x = \frac{1}{3}$, *la valeur de la série à* 10^{-4} *près.*

(Novembre 1903.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On considère une manivelle* OM *de longueur* r *animée d'un mouvement uniforme de* f *tours par seconde autour de* O *et une bielle* MP *de longueur* l



articulée en M *à la manivelle et dont l'extrémité* P *est guidée par une glissière rectiligne* Ox.

1° *Montrer qu'en supposant* $\frac{r}{l}$ *assez petit, le mouvement du point* P *est la résultante de deux mouvements harmoniques simples* (A) *et* (B), (B) *étant à l'octave de* (A). *Trouver les amplitudes, les fréquences et le décalage relatif de ces deux mouvements* (A) *et* (B).

2° *Trouver la vitesse et l'accélération de* P *et montrer que l'octave* (B) *a quatre fois plus d'influence sur l'accélération que sur le déplacement de* P. *Étudier l'influence sur l'accélération de la vitesse de rotation de la manivelle. Construire les diagrammes du déplacement et de l'accélération dans le cas où l'on a*

$$r = 0^{m},2, \qquad l = 0^{m},5, \qquad f = 1.$$

N. B. — *On comptera le déplacement de* P *positivement dans le sens* Ox *à partir du milieu de la course du point* P *et le temps à partir du moment où la manivelle* OM *est perpendiculaire à* Ox.


Digitized by Google

Épreuve pratique. — *Évaluer par la méthode de Simpson, en divisant l'intervalle d'intégration en six intervalles partiels, l'intégrale*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(Novembre 1903.)

Paris.

Épreuve écrite. — I. *Dans le plan* xOy *on prend sur les parties positives des axes triangulaires* Ox, Oy *deux points* A *et* B, *situés à l'unité de distance de l'origine. Calculer les valeurs de l'intégrale curviligne*

$$\int x^2\,dy - y^2\,dx,$$

prise de A *en* B, *d'abord le long de la droite* AB, *ensuite le long de l'arc de cercle* AMB *décrit de* O *comme centre avec l'unité pour rayon.*

II. *Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} - 3\frac{y}{x} = x,$$

et construire celle des courbes intégrales qui passe par le point de coordonnées $x = 1$, $y = 0$.

III. *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy. Oz *on prend sur* Ox *et* Oy *deux points* A *et* B *tels que* $OA = OB = 1$ *et l'on construit le prisme droit ayant pour base inférieure le triangle* OAB *et ayant ses arêtes parallèles à* Oz. *Calculer le volume limité en bas par le triangle* OAB, *latéralement par les faces du prisme, en haut par la surface qui a pour équation*

$$z = x^2 + y^2.$$

Épreuve pratique. — I. *Étudier le mouvement d'un pendule simple dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la vitesse. On admettra que les oscillations*

Digitized by Google

ont une amplitude assez faible pour qu'en appelant θ *l'angle d'écart exprimé en parties du rayon, on puisse remplacer* $\sin\theta$ *par* θ.

II. *La Terre étant regardée comme une sphère immobile de rayon* $R = 6366^{km}$, *on admet que son attraction sur un point extérieur* M, *de masse* m, *varie en raison inverse du carré de la distance* x *du point au centre et que, sur la surface de la Terre, cette attraction se confond sensiblement avec le poids* mg. *Le point* M *étant abandonné* SANS VITESSE INITIALE *dans une position* M_0 *à la distance* x_0 *du centre, on demande de calculer la vitesse qu'il acquiert dans sa chute et de déterminer, en particulier, la vitesse avec laquelle il tombe sur le sol en* A. *Calculer numériquement cette vitesse dans le cas où* x_0 *est très grand par rapport à* R. (Juillet 1904.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1862.

(1900, p. 384.)

Soient α, β, γ *trois points animés de mouvements uniformes sur les côtés d'un triangle abc. Les trois cercles analogues au cercle* $a\beta\gamma$ *se coupent en un point d'un cercle fixe.* (E. DUPORCQ.)

SOLUTION

Par M. THIÉ.

Soit m le point commun aux cercles $a\beta\gamma$, $b\gamma\alpha$. On a

$$\widehat{\beta m\gamma} = \pi - a, \qquad \widehat{\gamma m\alpha} = \pi - b,$$

d'où

$$\widehat{\alpha m\beta} = \pi - c,$$

ce qui montre bien que le point m appartient au cercle $c\alpha\beta$.

Remarquons ensuite que la droite $\beta\gamma$ enveloppe une parabole P, tangente à ab et ac. Le cercle $a\beta\gamma$ passe donc par le foyer f de P. Le cercle $b\gamma\alpha$ passe de même par un point

Digitized by Google

fixe g. L'angle $\widehat{fmg}$ est donc égal à la somme ou à la différence des angles $\widehat{fm\gamma}$, $\widehat{\gamma mg}$, égaux respectivement aux angles fixes $\widehat{fa\gamma}$, $\widehat{fb\gamma}$ ou à leurs supplémentaires.

L'angle $\widehat{fmg}$ est donc constant. Par suite, etc.

1926.

(1902, p. 287.)

Les parallèles aux normales d'un paraboloïde, menées par les projections de leurs pieds sur le plan tangent au sommet, forment une congruence linéaire dont les directrices sont les axes de courbure des sections principales répondant au sommet.

(*Ce théorème permet d'obtenir simplement la direction de la normale en un point donné et, réciproquement, le point où la normale a une direction donnée.*)

(M. D'OCAGNE.)

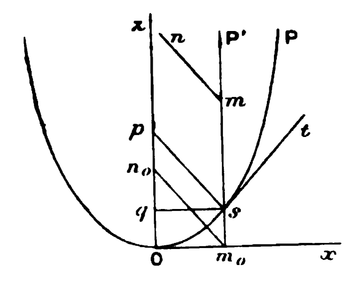
SOLUTION

Par M. R. B.

Soient

(Π) le paraboloïde;
Oz son axe;
O son sommet;
Ox et Oy les tangentes principales au point O.

Prenons comme plan de la figure le plan (xOz), et soit P



la parabole, section de (Π) par ce plan.

m étant un point quelconque de (Π), considérons la parabole P', intersection de (Π) et d'un plan parallèle à (yOz),

Digitized by Google

mené par le point m. Le sommet de P′ est au point s où cette parabole coupe P. Soit st la tangente à P en s. Il existe un cylindre circonscrit à (Π), suivant P, et ayant ses génératrices parallèles à st. La normale mn à (Π) en m est normale à ce cylindre : elle est donc, en projection, perpendiculaire à st, c'est-à-dire parallèle à sp, qui est la normale à P en s.

Soient alors sq, $m_0 n_0$ deux droites dont la figure indique clairement la construction. On a

$$O n_0 = qp = \text{paramètre de la parabole P},$$

en vertu de la propriété classique de la sous-normale. Donc le point n_0 est fixe. Mais $m_0 n_0$ n'est autre que la projection sur le plan (xOz) de la droite considérée dans l'énoncé : cette dernière droite rencontre donc la perpendiculaire menée par n_0 au plan de la figure, c'est-à-dire l'axe de courbure de P.

On verrait de même que la droite en question rencontre l'axe de courbure de la seconde parabole principale de (Π).

1965.

(1903, p. 96.)

Rectifier la courbe représentée par

$$(x^2+y^2)^4 - k^2 a^2 b^2 x^2 y^2 [(a^2-b^2)+(x^2-y^2)] = 0.$$

(E. Renaud.)

SOLUTION

Par M. C. Alasia.

Dans cette question il y a certainement une faute de copie; je crois qu'elle doit s'énoncer : *Rectifier les courbes représentées par l'équation*

$$(x^2+y^2)^4 - k^2 a^2 b^2 x^2 y^2 \left[\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}\right)+\left(\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}\right)\right] = 0,$$

et c'est sous cette forme que je vais la considérer.

J'observe qu'elle peut s'écrire

$$(x^2+y^2)^4 = k^2[(a^2y^2+b^2x^2)(a^2x^2-b^2y^2)]$$

Digitized by Google

et se décomposer en deux facteurs :

$$(1)\qquad (x^2+y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2,$$

$$(2)\qquad (x^2+y^2)^2 = k(a^2y^2 + b^2x^2).$$

J'obtiens donc les équations des deux courbes rapportées au même système de coordonnées. La courbe (1) est celle de la question 1963 (résolue p. 237) : je ne considérerai donc que la courbe (2), en suivant les mêmes notations et la même méthode, indiquées d'ailleurs par M. Booth.

Posant $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, l'équation (2) s'écrira

$$a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi = \rho^2,$$

d'où

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = \frac{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}.$$

Faisant $a^2\operatorname{tang}\varphi = b^2\operatorname{tang}\omega$, on a

$$\frac{ds^2}{d\theta^2} = \frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega};$$

et alors

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\omega} \qquad \text{et} \qquad \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\omega} = \frac{a^4}{a^4\cos^2\omega + b^4\sin^2\omega}.$$

La substitution de ces valeurs nous donne

$$\frac{ds}{d\omega} = \frac{a^3b^3}{a^4\cos^2\omega + b^4\sin^2\omega}(a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega)^{-\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire, en posant

$$\frac{a^2-b^2}{a^2} = p^2, \qquad \frac{a^4-b^4}{a^4} = q,$$

d'où

$$q = \frac{a^2+b^2}{a^2}p^2 \qquad (q > p^2)$$

et

$$s = \frac{b^3}{a^2}\int\frac{d\omega}{1-q\sin^2\omega}(1-p^2\sin^2\omega)^{-\frac{1}{2}},$$

intégrale elliptique à paramètre circulaire.

Note. — La courbe (2) est inverse de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, lorsqu'on prend le centre comme pôle d'inversion.

Digitized by Google

1982.

(1903, p. 480.)

Soient

$$\left\{\begin{matrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{matrix}\right\} \quad et \quad \left\{\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{matrix}\right\}$$

les cosinus directeurs, par rapport à trois axes rectangulaires, des arêtes de deux trièdres trirectangles. Démontrer que le cône ayant pour équation

$$\begin{aligned}(ax + by + cz)(\alpha x + \beta y + \gamma z)& \\ + (a'x + b'y + c'z)(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)& \\ + (a''x + b''y + c''z)(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z) &= 0\end{aligned}$$

est de révolution.

Définir géométriquement l'axe du cône.

(R. Bricard.)

SOLUTION

Par M. Letierce.

Soit $M(x, y, z)$ un point du cône; posons

$$X = ax + by + cz, \qquad Y = a'x + b'y + c'z, \qquad Z = a''x + b''y + c''z,$$
$$X' = \alpha x + \beta y + \gamma z, \qquad Y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \qquad Z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z;$$

(X, Y, Z) sont les coordonnées de M par rapport au premier trièdre, (X', Y', Z') les coordonnées du même point par rapport au second et l'équation s'écrit

$$(1) \qquad XX' + YY' + ZZ' = 0.$$

L'équation du cône ne changeant pas quand on remplace un des trièdres par son symétrique par rapport à l'origine, nous pouvons supposer que les deux trièdres sont directs.

Cela étant, soit OA l'axe de rotation qui amène le second trièdre sur le premier par une rotation θ; après la rotation, M vient en M' et la relation (1) montre que OM' est perpendiculaire à OM. Si m est le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur OA, l'examen des triangles MmM', MOM', MOm

montre immédiatement que, si V est l'angle de OM et de OA, l'on a

$$\sin V = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Le lieu de M est donc un cône de révolution dont on connaît l'axe OA et le demi-angle au sommet.

Le cône est réel si $\theta \geqq \frac{\pi}{2}$, imaginaire dans le cas contraire.

1994.

(1904, p. 144.)

La normale au point M *d'une conique de centre* O *a pour pôle le point* N. *On projette orthogonalement* M *en* P *sur la droite* ON. *Le cercle mené par* N, P, *et un point fixe quelconque, passe par un autre point fixe lorsqu'on fait varier* M *sur la conique.* (*Canon.*)

SOLUTION ANALYTIQUE

Par M. E.-N. Barisien.

Supposons que la conique donnée soit l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

Si φ est l'angle d'anomalie excentrique en M, l'équation de la normale en M est

$$(1) \qquad ax\sin\varphi - by\cos\varphi = c\sin\varphi\cos\varphi.$$

Les coordonnées du pôle N de cette normale sont

$$(2) \qquad x_1=\frac{a^3}{c^2\cos\varphi}, \qquad y_1=-\frac{b^3}{c^2\sin\varphi}.$$

La droite ON a donc pour équation

$$(3) \qquad \frac{y}{x}=-\frac{b^3\cos\varphi}{a^3\sin\varphi}.$$

Digitized by Google

La perpendiculaire abaissée de M sur ON a pour équation

$$y - b\sin\varphi = \frac{a^3 \sin\varphi}{b^3 \cos\varphi}(x - a\cos\varphi)$$

ou

$$(4) \qquad a^3 x \sin\varphi - b^3 y \cos\varphi = (a^4 - b^4)\sin\varphi\cos\varphi.$$

Les coordonnées du point P s'obtiennent en résolvant (3) et (4) par rapport à x et à y.

On obtient ainsi

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_2 &= \frac{a^3(a^4 - b^4)\sin^2\varphi\cos\varphi}{a^6\sin^2\varphi + b^6\cos^2\varphi}, \\ y_2 &= -\frac{b^3(a^4 - b^4)\sin\varphi\cos^2\varphi}{a^6\sin^2\varphi + b^6\cos^2\varphi}. \end{aligned} \right.$$

Remarquons que

$$\overline{\mathrm{ON}}^2 = x_1^2 + y_1^2 = \frac{a^6\sin^2\varphi + b^6\cos^2\varphi}{c^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi},$$

$$\overline{\mathrm{OP}}^2 = x_2^2 + y_2^2 = \frac{(a^4 - b^4)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{a^6\sin^2\varphi + b^6\cos^2\varphi}.$$

Il en résulte

$$(6) \qquad \mathrm{ON}.\mathrm{OP} = \frac{a^4 - b^4}{c^2} = a^2 + b^2.$$

Donc, la puissance d'un cercle quelconque passant par P et N est $(a^2 + b^2)$.

Il en résulte que, si A est un point fixe du plan, le second point B d'intersection de la droite OA avec le cercle passant par P, N et A, satisfait à la relation

$$\mathrm{OB}.\mathrm{OA} = a^2 + b^2.$$

B est donc le second point fixe par lequel passent tous les cercles APN.

Remarques :

I. *La droite* ON *coupe le cercle orthoptique de l'ellipse en deux points qui sont conjugués harmoniques des points* P *et* N.

Digitized by Google

II. *La droite* MP *est normale à l'ellipse*

$$\frac{x^2}{a^6}+\frac{y^2}{b^6}=\left(\frac{a^4-b^4}{a^6-b^6}\right)^2.$$

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Par M. Thié.

Il suffit visiblement d'établir la constance du produit OP.ON. Or considérons le cercle (MNP), qui a pour diamètre MN. On peut dire que ce cercle est circonscrit à un triangle ayant un sommet en N, et deux sommets confondus en M, le côté qui joint ces sommets étant la normale en M, et ce triangle est visiblement autopolaire par rapport à la conique donnée. Il en résulte (théorème de Faure) que le cercle (MNP) coupe orthogonalement le cercle orthoptique de la conique, et l'on a

$$\text{OP}.\text{ON}=a^2+b^2,$$

en désignant par a et b les demi-axes de cette conique.

1999.

(1904, p. 336.)

On considère une ellipse, un foyer F, *un point variable* M *de l'ellipse, le cercle décrit sur* FM *comme diamètre et un cercle fixe. Le lieu des centres de similitude de ces deux cercles se compose de deux coniques. Cas où le cercle fixe est le cercle principal de l'ellipse.*

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. H. Lez.

Soient deux cercles

(1) $$(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2=r^2,$$

(2) $$(x-\lambda')^2+(y-\mu')^2=r'^2;$$

les coordonnées des centres de similitude extérieur et intérieur seront données par les formules

(3) $$x=\frac{\lambda' r-\lambda r'}{r-r'},\qquad y=\frac{\mu' r-\mu r'}{r-r'},$$

(4) $$x=\frac{\lambda' r+\lambda r'}{r-r'},\qquad y=\frac{\mu' r+\mu r'}{r+r'}.$$

Digitized by Google

Or, si x', y' sont les coordonnées du point M, elles satisferont à l'équation de l'ellipse, c'est-à-dire qu'on aura

(5) $$b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2,$$

et les coordonnées du centre du cercle mobile seront

$$\lambda' = \frac{c+x'}{2}, \qquad \mu' = \frac{y'}{2}, \qquad r' = \frac{\text{FM}}{2} = \frac{a-ex'}{2}.$$

Par suite, l'équation (2) devient

$$\left(x - \frac{c+x'}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y'}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-ex'}{2}\right)^2$$

ou

(6) $$x^2 + y^2 - (c+x')x - y'y + cx' = 0,$$

cercle qui est constamment tangent au cercle principal

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Mais les formules (3) et (4) deviennent aussi

$$x = \frac{(c+x')r - \lambda(a-ex')}{2r-(a-ex')}, \qquad y = \frac{y'r - \mu(a-ex')}{2r-(a-ex')},$$

$$x = \frac{(c+x')r + \lambda(a-ex')}{2r+(a-ex')}, \qquad y = \frac{y'r + \mu(a-ex')}{2r+(a-ex')};$$

des deux premières, on tire

(7) $$\begin{cases} x' = \dfrac{(2r-a)x + a\lambda - cr}{r+(\lambda-x)e}, \\ y' = \dfrac{(2r-a+2\lambda e-ce)y + (a+ce-2xe)\mu}{r+(\lambda-x)e}; \end{cases}$$

des deux autres, on tire aussi

(8) $$\begin{cases} x' = \dfrac{(2r+a)x - a\lambda - cr}{r-(\lambda-x)e}, \\ y' = \dfrac{(2r+a-2\lambda e+ce)y - (a+ce-2xe)\mu}{r-(\lambda-x)e}. \end{cases}$$

Ces dernières égalités se déduisent également des premières en faisant

$$r = -r.$$

Digitized by Google

Les valeurs (7) et (8) étant des fonctions linéaires, transportées dans la relation (5), elles donneront évidemment des coniques pour le lieu des centres de similitude extérieur et intérieur des deux cercles.

Dans le cas où le cercle fixe (1) se confond avec le cercle principal,

$$\mu = \lambda = 0 \quad \text{et} \quad r = a;$$

alors les formules (7) et (8) se transforment en

$$(9)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{a(x-c)}{a-ex} = \dfrac{a(x-ae)}{a-ex}, \\ y' = \dfrac{(a-ce)y}{a-ex} = \dfrac{b^2 y}{a(a-ex)} \end{cases}$$

et

$$(10)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{a(3x-c)}{a+ex} = \dfrac{a(3x-ae)}{a+ex}, \\ y' = \dfrac{(3a+ce)y}{a+ex} = \dfrac{a(3+e^2)y}{a+ex}. \end{cases}$$

Portant les valeurs (9) dans la relation (5), on trouve, pour le lieu des centres de similitude extérieurs, le cercle principal

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

ce qui était à prévoir, puisqu'il enveloppe tous les cercles mobiles.

De même, dans la relation (5), remplaçant x', y' par les valeurs (10), on obtient, pour le lieu des centres de similitude intérieurs, l'ellipse

$$(4a^2 - b^2)^2 y^2 + b^2(8a^2 + b^2)x^2 - 8a^2b^2cx - a^2b^4 = 0,$$

ayant son centre sur le grand axe en $x = \dfrac{4a^2c}{8a^2+b^2}$ et pour foyers l'origine O et le point $x = \dfrac{4a^2c}{8a^2+b^2}$.

Autres solutions de M. Tabakoff, de M. Alvarez Ude et de M. Letierce.

QUESTIONS.

2001. L'hyperboloïde déterminé par l'axe d'une quadrique de révolution et par deux droites conjuguées par rapport à cette quadrique est équilatère. (R. BRICARD.)

2002. On considère dans un plan un quadrilatère ABCD circonscrit à un cercle de centre O. On mène, par les points A, B, C, D, ... des perpendiculaires aux droites OA, OB, OC, OD. Le point O est sur la directrice de la parabole qui touche les quatre droites ainsi obtenues.

(R. BRICARD.)

2003. On sait que les permutations différentes de m lettres dans lesquelles il y en a p égales à a, q à b, r à c, ..., t à l sont au nombre de

$$\frac{m!}{p!\,q!\,r!\ldots t!}.$$

S'il s'agit de combinaisons n à n de m lettres distinctes, leur nombre est donné par la formule

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}.$$

Que devient ce nombre lorsqu'on a aussi p lettres égales à a, q à b, ..., t à l? (AUDIBERT.)

2004. Soit une ellipse de foyers F, F'. En chaque point M de l'ellipse on prend sur la normale en M deux points N et N' tels que

$$MN = MN' = \sqrt{MF.MF'}.$$

On considère les cercles de centres N et N' et de rayons NM et N'M. Les tangentes communes à chacun de ces cercles et à l'ellipse rencontrent la tangente en M à l'ellipse en quatre points P, Q, P', Q' dont le lieu se compose d'une ellipse et d'une hyperbole. (E.-N. BARISIEN.)

Digitized by Google

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

DA CUNHA (A.), Ingénieur des Arts et Manufactures. — **L'année technique (1903-1904)**. *Locomotion et moyens de transport. Applications de la Physique expérimentale. Travaux publics et Architecture. Éclairage et chauffage. Physiologie et Hygiène*, avec une Préface de H. Moissan, Membre de l'Institut. Grand in-8 (28 × 18) de VIII-303 pages avec 142 figures; 1904 .... 3 fr. 50 c.

NIEWENGLOWSKI (B.), Inspecteur de l'Académie de Paris, Docteur ès Sciences, et **GÉRARD (L.)**, Professeur au Lycée Ampère, Docteur ès Sciences. — **Cours de Géométrie élémentaire** à l'usage des élèves de **Mathématiques élémentaires**, de **Mathématiques spéciales**, des candidats aux Écoles du Gouvernement et des candidats à l'agrégation.

I. *Géométrie plane*. In-8 (23 × 14) de XX-362 pages, avec 289 figures, cartonné; 1898 .... 5 fr.
Broché .... 4 fr.

II. *Géométrie dans l'espace*. In-8 (23 × 14) de 496 pages, avec 363 fig., cartonné; 1899 .... 6 fr.
Broché .... 5 fr.

— **Cours de Géométrie élémentaire** à l'usage du Premier Cycle (section B), du Second Cycle (section C et D) et des Mathématiques A et B.

I. *Géométrie plane*. In-8 (23 × 14) de XX-251 pages, avec 226 figures, cartonné; 1903 .... 3 fr. 50 c.
Broché .... 2 fr. 50 c.

II. *Géométrie dans l'espace*. In-8 (23 × 14) de 263 pages, avec 208 fig., cartonné; 1903 .... 3 fr. 50 c.
Broché .... 2 fr. 50 c.

— **Cours de Géométrie élémentaire** à l'usage du Premier Cycle (section A) et du Second Cycle (sections A et B).

I. *Géométrie plane*. In-8 (23 × 14) de XVI-163 pages, avec 182 figures, cartonné; 1903 .... 3 fr.
Broché .... 2 fr.

II. *Géométrie dans l'espace*. In-8 (23 × 14) de 122 pages, avec 93 fig., cartonné; 1903 .... 3 fr.
Broché .... 2 fr.

ROUCHÉ (Eugène), Membre de l'Institut, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, Examinateur de sortie à l'École Polytechnique, et **DE COMBEROUSSE (Charles)**, Professeur à l'École Centrale et au Conservatoire des Arts et Métiers. — **Traité de Géométrie**. 7e édition, revue et augmentée par Eugène Rouché. Fort in-8 de LX-1212 pages, avec 703 fig. dans le texte et 1175 questions proposées; 1900 .. 17 fr.

Ire Partie. — *Géométrie plane*; 1900 .... 7 fr. 50 c.

IIe Partie. — *Géométrie de l'espace; Courbes et Surfaces usuelles* .... 9 fr. 50 c.

Digitized by Google

TABLE DES MATIERES.

Novembre 1904.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

LAURENT (**H.**), Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique et ancien Élève de cette École. — **Traité d'Algèbre**, à l'usage des candidats aux Écoles du Gouvernement. Revu et mis en harmonie avec les derniers programmes, par *Marchand*, ancien Élève de l'École Polytechnique. 4 volumes in-8.

Ire Partie. — *Algèbre élémentaire*, à l'usage des Classes de Mathématiques élémentaires. 4e édition; 1887........................ 4 fr.

IIe Partie. — *Analyse algébrique*, à l'usage des Classes de Mathématiques spéciales. 5e édition; 1894........................ 4 fr.

IIIe Partie. — *Théorie des équations*, à l'usage des Classes de Mathématiques spéciales. 5e édition; 1894........................ 4 fr.

IVe Partie. — Compléments : *Théorie des polynomes à plusieurs variables*; 1894........................ 1 fr. 50 c.

34577 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : Gauthier-Villars.

Digitized by Google

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique,

C. BOURLET,
Docteur ès Sciences,
Professeur au lycée Saint-Louis

R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI ET DUPORCQ.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME IV.

DÉCEMBRE 1904.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris,
à M. LAISANT, 162, avenue Victor-Hugo, 16e,
ou à M. BOURLET, 22, avenue de l'Observatoire, 14e,
ou à M. BRICARD, 295, boulevard Raspail, 14e.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1904

Les manuscrits non insérés ne sont pas rendus.
(Ce Recueil paraît chaque mois.)

Digitized by Google

Rédacteur de service : M. R. Bricard.

Liste des Correspondants des **NOUVELLES ANNALES** dans les villes où siègent les Facultés des Sciences

Besançon : M. Ét. Delassus. — Bordeaux : M. Padé. — Caen : M. A. de Saint-Germain. — Clermont-Ferrand : M. C. Guichard. — Dijon : M. Duport. — Grenoble : M. J. Collet. — Lille : M. Boulanger. — Lyon : M. L. Autonne. — Marseille : M. Sauvage. — Montpellier : M. E. Fabry. — Nancy : M. H. Vogt. — Paris : M. Raffy. — Poitiers : M. Maillard. — Rennes : M. Le Roux. — Toulouse : M. Cosserat.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

DUPORCQ (Ernest), ancien Élève de l'École Polytechnique, Ingénieur des Télégraphes. — **Premiers principes de Géométrie moderne,** *à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales et des candidats à la Licence et à l'Agrégation*. In-8, avec figures; 1899 .... 3 fr.

FREYCINET (C. de), de l'Institut. — **De l'expérience en Géométrie.** Volume in-8 de XX-175 pages; 1903 .... 4 fr.

JOUFFRET (E.), Lieutenant-Colonel d'Artillerie en retraite, ancien Élève de l'École Polytechnique. — **Traité de Géométrie à quatre dimensions et Introduction à la Géométrie à *n* dimensions.** Grand in-8 de XXV-261 pages avec 65 figures; 1903 .... 7 fr. 50 c.

LAGUERRE. — **Œuvres de Laguerre**, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par MM. Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché, Membres de l'Institut, 2 volumes grand in-8, se vendant séparément.

Tome I : *Algèbre, Calcul intégral*; 1898 .... 15 fr.

Tome II : *Géométrie*; 1905 .... (*Sous presse.*)

MANNHEIM (Colonel A.), Professeur à l'École Polytechnique. — **Principes et développements de la Géométrie cinématique.** *Ouvrage contenant de nombreuses applications à la Théorie des surfaces.* In-4 avec 86 figures, 1894 .... 25 fr.

VIVANTI (G.). — **Leçons élémentaires sur la Théorie des groupes de transformations** *professées à l'Université de Messine.* Traduites par A. Boulanger, Maître de Conférences à l'Université de Lille. Grand in-8 (25 × 16) de VII-296 pages; 1904 .... 8 fr.

Digitized by Google

[D2b, 19a]

SUR LES SÉRIES DE LA FORME $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$;

PAR M. HADAMARD.

En reprenant une démonstration relative aux propriétés de la fonction de Riemann

$$\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \ldots + \frac{1}{n^z} + \ldots,$$

j'ai été conduit à en examiner de plus près le mécanisme. Je suis arrivé ainsi, relativement aux séries de la forme

$$F(z) = \sum_n a_n e^{-\lambda_n z}, \tag{1}$$

où les λ_n sont des nombres réels et les a_n des nombres *positifs*, à quelques remarques qui peuvent avoir leur utilité.

1. Soit A la valeur de $F(p)$, p étant un nombre réel (compris, bien entendu, dans la région de convergence de la série). Donnons à z la valeur complexe $p+iq$ et considérons la quantité

$$\frac{1}{A} F(p+iq) = f(q) + i\varphi(q) = \xi + i\eta.$$

On a

$$(2) \quad \begin{cases} A f(q) = \sum a_n e^{-\lambda_n p} \cos(\lambda_n q) = \sum \alpha_n \cos\theta_n, \\ A\varphi(q) = -\sum a_n e^{-\lambda_n p} \sin(\lambda_n q) = \sum \alpha_n \sin\theta_n, \end{cases}$$

Digitized by Google

en désignant par α_n la quantité $a_n e^{-\lambda_n p}$ et par θ_n l'argument $-\lambda_n q$. On a d'ailleurs visiblement

$$\sum \alpha_n = \text{A},$$

$$|f(q) + i\varphi(q)| < \text{A}.$$

Changeons q en $2q$ et comparons aux expressions (2) les suivantes :

$$f(2q) = \xi_1 = \sum \frac{\alpha_n}{\text{A}} \cos 2\theta_n,$$

$$\varphi(2q) = \eta_1 = \sum \frac{\alpha_n}{\text{A}} \sin 2\theta_n.$$

Pour cela, nous considérerons la quantité

$$\frac{1}{\text{A}} \sum \alpha_n (h \cos\theta_n + k \sin\theta_n + l)^2,$$

où h, k, l sont trois nombres réels quelconques. Si l'on remarque que l'on a

$$k^2 \cos^2\theta_n + k^2 \sin^2\theta_n = \frac{h^2 + k^2}{2} + \frac{h^2 - k^2}{2} \cos 2\theta_n,$$

cette quantité s'écrira

$$l^2 + \frac{h^2 + k^2}{2} + \frac{h^2 k^2}{2} \xi_1 + hk\eta_1 + 2hl\xi + 2kl\eta$$

$$= (l + h\xi + k\eta)^2 + \left(\frac{1 + \xi_1}{2} - \xi^2\right) h^2$$

$$+ (\eta_1 - 2\xi\eta) hk + \left(\frac{1 - \xi_1}{2} - \eta^2\right) k^2.$$

Or, la quantité précédente est essentiellement positive. Donc, il faut que cette forme quadratique soit définie ; par conséquent, que l'on ait

(3) $$\xi_1 > 2\xi^2 - 1,$$

(4) $$\left(\frac{1 + \xi_1}{2} - \xi^2\right)\left(\frac{1 - \xi_1}{2} - \eta^2\right) - \left(\frac{\eta_1}{2} - \xi\eta\right)^2 \geqq 0.$$

Digitized by Google

La première inégalité, qui est d'ailleurs comprise dans la seconde, exprime le résultat suivant :

Si ξ est positif, et que l'on pose

$$\xi = \cos\psi \qquad \left(0 < \psi < \frac{\pi}{2}\right),$$
$$\xi_1 = \cos\psi_1 \qquad (0 < \psi_1 \leqq \pi),$$

on aura

$$(5) \qquad \psi_1 \leqq 2\psi.$$

2. Quant à l'inégalité (4), elle nous montre que, le point (ξ, η) étant donné, le point (ξ_1, η_1) est intérieur au cercle C dont un diamètre est situé suivant la droite $\eta_1 = 2\xi\eta$, les abscisses de ses extrémités étant $2\xi^2 - 1$, $1 - 2\eta^2$.

Considérons le module $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ de $\frac{1}{A}F(p + iq)$ et le module $\rho_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}$ de $\frac{1}{A}F(p + 2iq)$.

Le centre du cercle C, à savoir le point $(\xi^2 - \eta^2, 2\xi\eta)$, est situé à une distance ρ^2 de l'origine; le rayon du même cercle est $1 - \rho^2$.

Si donc ρ^2 est plus petit que $\frac{1}{2}$, le cercle C contient l'origine à son intérieur; mais si $\rho > \frac{\sqrt{2}}{2}$, tout point de ce cercle est à une distance de l'origine au moins égale à $2\rho^2 - 1$. On arrive donc à l'énoncé suivant :

Si l'on pose

$$\rho = |\xi + i\eta| = \cos\chi,$$
$$\rho_1 = |\xi_1 + i\eta_1| = \cos\chi_1$$

et que l'angle χ soit inférieur à $\frac{\pi}{4}$, on aura

$$\chi_1 \leqq 2\chi.$$

Digitized by Google

3. Il est clair maintenant qu'on peut appliquer à plusieurs reprises les deux propositions que nous venons d'énoncer et qu'on obtient ainsi les suivantes :

Si l'on pose

$$f(q) = \cos[\psi(q)],$$
$$|f(q) + i\varphi(q)| = \cos[\chi(q)],$$

on a

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \psi(q) \leqq 2^k \psi\left(\dfrac{q}{2^h}\right), \\ \chi(q) \leqq 2^h \chi\left(\dfrac{q}{2^h}\right), \end{array}\right.$$

la première inégalité supposant toutefois que le second membre est plus petit que π; la seconde, que son second membre est plus petit que $\frac{\pi}{2}$.

Enfin, dans les deux inégalités précédentes, on peut faire grandir h indéfiniment. On a sensiblement, pour q très petit,

$$f(q) = 1 - \frac{q^2}{2A} F''(p) = 1 - \frac{1}{2}\psi^2(q), \qquad \varphi(q) = \frac{q}{A} F'(p),$$

$$|f(q) + i\varphi(q)| = 1 - \frac{q^2}{2}\left(\frac{F''(p)}{A} - \frac{F'^2(p)}{A^2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\chi^2(q),$$

et, par suite,

$$\psi(q) = q\sqrt{\frac{F''(p)}{F(p)}}, \qquad \chi(q) = q\sqrt{\frac{F''(p)}{F(p)} - \frac{F'^2(p)}{F^2(p)}}.$$

Si, dans ces relations, on change q en $\frac{q}{2^h}$, pour reporter le résultat obtenu dans les inégalités (6), *on a*

$$f(q) \geqq \cos\left(q\sqrt{\frac{F''(p)}{F(p)}}\right),$$

$$|f(q) + i\varphi(q)| \geqq \cos\left(q\sqrt{\frac{F''(p)}{F(p)} - \left(\frac{F'(p)}{F(p)}\right)^2}\right),$$

Digitized by Google

pourvu que l'argument du cosinus soit plus petit que π *dans la première inégalité, plus petit que* $\frac{\pi}{2}$ *dans la seconde.*

[R9b]

SUR UN POINT DE LA THÉORIE DES PERCUSSIONS;

PAR M. HADAMARD.

Lorsqu'un point matériel vient choquer élastiquement une surface fixe, le nouveau mouvement qu'il prend est donné par la règle classique relative à la réflexion. La composante tangentielle de la vitesse ne change pas; la composante normale change de sens en gardant sa valeur absolue.

Les choses se passent d'une manière notablement plus compliquée dans le choc de deux solides quelconques. On peut se demander cependant s'il n'existe pas, là encore, une relation simple correspondant à celles que nous venons de rappeler.

Ce rôle est joué par la proposition suivante :

La percussion normale qui s'exerce entre deux corps qui se choquent élastiquement est double de celle qui s'exercerait si les corps étaient mous.

Pour démontrer qu'il en est ainsi, désignons par (u_i, v_i, w_i) la vitesse d'un point quelconque M_i de l'un ou de l'autre des deux solides; désignons, d'autre part, par $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ l'augmentation que subirait cette vitesse si l'on appliquait, au solide qui contient ce point suivant la normale au point de choc A et dans le sens

Digitized by Google

intérieur, une percussion égale à l'unité (les percussions subies par les deux corps étant, par conséquent, en sens opposés). La vitesse consécutive à l'application, dans les mêmes conditions, d'une percussion P sera

$$(u_i + \alpha_i P,\ v_i + \beta_i P,\ w_i + \gamma_i P).$$

Dans le choc élastique, la percussion P devra être telle que l'on ait

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum m_i[(u_i+\alpha_i P)^2 + (v_i+\beta_i P)^2 + (w_i+\gamma_i P)^2] \\ &\quad = \sum m_i(u_i^2 + v_i^2 + w_i^2), \end{aligned} \right.$$

la sommation étant étendue à tous les points des deux corps et les m_i désignant les masses. Ceci donne

$$(2)\qquad P = -\frac{2\sum m_i(\alpha_i u_i + \beta_i v_i + \gamma_i w_i)}{\sum m_i(\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2)}.$$

Pour calculer la valeur de P si le choc a lieu à la façon des corps mous, nous appliquerons le théorème de Carnot. La perte de force vive [c'est-à-dire la différence des deux membres de la relation (1)] sera égale à la force vive due aux vitesses perdues, c'est-à-dire à

$$P^2 \sum m_i(\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2).$$

Or le terme ainsi décrit vient doubler le terme en P^2 de l'équation (1). Il vient bien

$$P = -\frac{\sum m_i(\alpha_i u_i + \beta_i v_i + \gamma_i w_i)}{\sum m_i(\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2)},$$

valeur qui est la moitié de la précédente.

Digitized by Google

Il est clair que le même raisonnement s'applique toutes les fois que, dans un système quelconque, il y a *choc simple,* c'est-à-dire que toutes les percussions qui prennent naissance sont, *a priori,* proportionnelles les unes aux autres.

Or, c'est ce qui arrive dans tous les problèmes où la définition du choc élastique peut être donnée sans sortir du point de vue où se place la théorie des percussions.

Donc, dans tous ces cas, l'énoncé donné plus haut répond à la question.

[M²1b]

SURFACES ALGÉBRIQUES : POINTS SINGULIERS;

Par M. LANCELOT,
Professeur au lycée de Bastia (Corse).

Soit une surface algébrique S de degré m, représentée, en coordonnées cartésiennes, par l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

et un point $M(x, y, z)$ de cette surface.

Une droite D passant par ce point a pour équations

$$\frac{X-x}{u} = \frac{Y-y}{v} = \frac{Z-z}{w} = \lambda$$

ou

$$X = x + \lambda u, \qquad Y = y + \lambda v, \qquad Z = z + \lambda w,$$

et les λ des points où elle coupe la surface S sont les racines de l'équation

$$f(x + \lambda u, y + \lambda v, z + \lambda w) = 0.$$

Digitized by Google

Développons cette équation par la formule de Taylor. En coordonnées homogènes, les coordonnées courantes d'un point de la droite peuvent s'écrire, uv et w étant les paramètres directeurs de la droite D,

$$x+\lambda u,\quad y+\lambda v,\quad z+\lambda w,\quad t+\lambda.o.$$

D'où l'équation en λ,

$$f(x+\lambda u, y+\lambda v, z+\lambda w, t+\lambda.o)=o$$

ou

$$f(x,y,z,t)+\frac{\lambda}{1}(uf'_x+vf'_y+wf'_z+o.f'_t)+\dots \\ +\frac{\lambda^p}{p!}(uf'_x+vf'_y+wf'_z+o.f'_t)_{(p)}+\dots=o.$$

Revenons aux coordonnées cartésiennes

$$f(x,y,z)+\frac{\lambda}{1}(uf'_x+vf'_y+wf'_z) \\ +\frac{\lambda^2}{1.2}(uf'_x+vf'_y+wf'_z)_{(2)}+\dots \\ +\frac{\lambda^p}{p!}(uf'_x+vf'_y+wf'_z)_{(p)}+\dots=o.$$

Le point M étant sur la surface, $f(x,y,z)=o$; l'équation en λ a donc toujours au moins une racine nulle.

Points simples. — Supposons que les coordonnées du point M considéré sur la surface n'annulent pas les trois dérivées premières; c'est-à-dire que l'on n'ait pas simultanément

$$f'_x=o,\qquad f'_y=o,\qquad f'_z=o.$$

Dans ce cas, pour une droite quelconque passant par ce point, le coefficient de λ

$$uf'_x+vf'_y+wf'_z$$

n'est pas nul. Une seule des racines de l'équation en λ est nulle et un seul des points d'intersection de la droite et de la surface se trouve situé en M. Le point M est dit *point simple* de la surface.

Si l'on prend pour u, v, w un système de solutions de l'équation linéaire

$$u f'_x + v f'_y + w f'_z = 0,$$

le coefficient de λ^2 est nul. Deux, au moins, des racines de l'équation en λ sont nulles, et deux des points d'intersection de la droite et de la surface sont confondus avec le point M. La droite est dite alors *tangente à la surface au point* M.

Il y a, en un point M, une infinité de tangentes, ayant pour paramètres directeurs les systèmes de l'équation linéaire homogène à trois inconnues

$$u f'_x + v f'_y + w f'_z = 0.$$

Pour avoir le lieu de ces droites, éliminons u, v, w entre cette équation et celles de la droite

$$\frac{X - x}{u} = \frac{Y - y}{v} = \frac{Z - z}{w}.$$

Il vient

$$(X - x) f'_x + (Y - y) f'_y + (Z - z) f'_z = 0.$$

Le lieu des tangentes à une surface en un point simple xyz est donc un plan, que l'on nomme *plan tangent en ce point*.

Théorème. — *La tangente à une courbe quelconque tracée sur la surface et passant par* M, *ayant* M *pour point de contact, est tangente à la surface.*

Car, les coordonnées courantes d'une courbe tracée sur la surface étant exprimées en fonction d'un para-

Digitized by Google

mètre t, $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ satisfont, quel que soit t, à l'équation

$$(1) \qquad f(X, Y, Z) = 0.$$

La courbe passant par le point M, on aura, pour une valeur t_0 du paramètre,

$$X(t_0) = x, \qquad Y(t_0) = y, \qquad Z(t_0) = z,$$

et la tangente à la courbe en ce point est la droite

$$(D) \qquad \frac{X - x}{X'(t_0)} = \frac{Y - y}{Y'(t_0)} = \frac{Z - z}{Z'(t_0)}.$$

Mais, la fonction de t, $f(X, Y, Z)$, est identiquement nulle; il en est de même de sa dérivée; donc

$$f'_x X'_t + f'_y Y'_t + f'_z Z'_t = 0.$$

Les paramètres directeurs de la droite D satisfont donc à l'équation

$$u f'_x + v f'_y + w f'_z = 0,$$

obtenue en faisant $t = t_0$ dans la précédente.

La tangente en M à une courbe tracée sur la surface et passant par M est donc tangente à la surface.

Le plan tangent à une surface en un point simple M *est donc le lieu des tangentes en* M *aux courbes tracées sur la surface et passant par ce point.*

Tangentes osculatrices. Points ordinaires, paraboliques. — Soient u, v, w les paramètres directeurs d'une tangente. On a

$$(1) \qquad u f'_x + v f'_y + w f'_z = 0.$$

En général, ils n'annulent pas le coefficient de λ^2,

$$(u f'_x + v f'_y + w f'_z)_{(2)}$$

Digitized by Google

et la tangente coupe, en général, la surface en deux points seulement confondus en M.

Trois de ces points d'intersection avec la surface seront confondus en M si les trois quantités u, v, w satisfont de plus à l'équation

$$(2) \qquad (u f'_x + v f'_y + w f'_z)_{(2)} = 0$$

ou

$$u^2 f''_{x^2} + v^2 f''_{y^2} + w^2 f''_{z^2} + 2uv f''_{xy} + 2vw f''_{yz} + 2wu f''_{xy} = 0.$$

De telles tangentes sont dites *osculatrices. Elles coupent la surface en trois points au moins confondus avec le point* M.

On a, pour déterminer les paramètres directeurs des tangentes osculatrices, les deux équations (1) et (2) respectivement du premier et du second degré, et homogènes.

En général, ces équations ont deux systèmes de solutions. Le point M est dit alors *point ordinaire*, et il y a, en un point ordinaire, *deux tangentes osculatrices*.

Considérons u, v, w comme les coordonnées homogènes d'un point d'un plan : la détermination des tangentes osculatrices revient à celle des points d'intersection d'une conique et d'une droite. Pour déterminer les conditions de réalité, on forme l'équation tangentielle de la conique ; elle est

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} & u \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} & v \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

1° Les tangentes osculatrices sont donc imaginaires

Digitized by Google

si l'on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} & f'_x \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} & f'_y \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} & f'_z \\ f'_x & f'_y & f'_z & 0 \end{vmatrix} > 0.$$

La surface est dite alors *concave au point* M, ou le point M *point elliptique*.

2° Les tangentes osculatrices sont réelles si ce déterminant est négatif; la surface est dite *avoir des courbures opposées au point* M, ou le point M *point hyperbolique*.

3° *Les tangentes osculatrices sont confondues* si l'on a

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} & f'_x \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} & f'_y \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} & f'_z \\ f'_x & f'_y & f'_z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Le point M est dit alors *point parabolique*.

Sur toute surface, il existe une courbe lieu de points paraboliques, déterminée par l'équation de la surface à laquelle on joint l'équation précédente. Cette courbe s'appelle *ligne parabolique*.

L'équation de la ligne parabolique peut être développée; elle s'écrit alors

$$(f''_{y^2}f''_{z^2} - f''^2_{yz})f'^2_x + \ldots + 2(f''_{y^2}f''_{z^2} - f''_{zx}f''_{zy})f'_x f'_y + \ldots = 0.$$

Soit m, le degré de la surface S. Cette seconde équation représente une surface Σ, dont le degré est

$$2(m-2) + 2(m-1) = 2(2m-3),$$

et par suite la ligne parabolique, qui est l'intersection des surfaces S et Σ, est de degré (*en général*)

$$2m(2m-3).$$

Digitized by Google

La ligne parabolique sépare, sur une surface, les points elliptiques de points hyperboliques.

Exemples. — Soit une quadrique à centre

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \qquad (A > B > C).$$

On a

$$f'_x = 2Ax, \quad f'_y = 2By, \quad f'_z = 2Cz,$$
$$f''_{x^2} = 2A, \quad f''_{y^2} = 2B, \quad f''_{z^2} = 2C,$$
$$f''_{xy} = 0, \quad f''_{yz} = 0, \quad f''_{zx} = 0.$$

D'où le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2A & 0 & 0 & 2Ax \\ 0 & 2B & 0 & 2By \\ 0 & 0 & 2C & 2Cz \\ 2Ax & 2By & 2Cz & 0 \end{vmatrix}$$

ou

$$16(A^2BCx^2 + B^2ACy^2 + C^2BAz^2),$$
$$16ABC(Ax^2 + By^2 + Cz^2).$$

La surface auxiliaire ε [de degré $2(2m-3) = 2$] est le cône asymptote de la quadrique. La ligne parabolique est donc la conique à l'infini de la quadrique. [Elle doit être comptée deux fois, les deux surfaces étant tangentes le long de cette courbe, et est alors de degré $2m(2m-3) = 4$]. Ici

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Le déterminant a donc toujours le signe de ABC. Donc :

1° $ABC > 0$:

Ellipsoïde.................. $(A > 0, B > 0, C > 0)$
Hyperboloïde à deux nappes. $A > 0, \quad B < 0, \quad C < 0$

Tous les points sont alors des points elliptiques.

Digitized by Google

2° ABC < 0 :

Hyperboloïde à une nappe... A > 0, B > 0, C < 0

Tous les points sont hyperboliques.

Autre forme de la condition pour qu'un point soit parabolique. — Supposons l'équation de la surface résolue par rapport à une des variables z

$$\varphi(x, y) - z = 0.$$

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y} = 0.$$

On a le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} & 0 & \frac{\partial z}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Développons par rapport aux éléments de la troisième colonne :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Développons par rapport aux éléments de la dernière ligne :

$$\Delta = -\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix},$$

Digitized by Google

ou, en posant $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = s$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$,

$$\Delta = -(rt - s^2).$$

1° $\Delta > 0$:

$$rt - s^2 < 0 \qquad \text{(point elliptique)}.$$

2° $\Delta < 0$:

$$rt - s^2 > 0 \qquad \text{(point hyperbolique)}.$$

3° $\Delta = 0$:

$$rt - s^2 = 0 \qquad \text{(point parabolique)}.$$

Remarque. — Peut-il arriver que les deux équations de la ligne parabolique se réduisent à une seule, ou que tous les points d'une surface soient paraboliques?

On aurait alors

$$rt - s^2 = 0,$$

identiquement. C'est l'équation aux dérivées partielles des surfaces dont tous les points sont paraboliques. On sait que c'est celle des surfaces développables. *Donc tous les points des surfaces développables sont paraboliques; et les surfaces développables sont les seules dont tous les points soient paraboliques.*

Intersection d'une surface et d'un plan passant au point ordinaire M *de la surface.* — Soient la surface S :

$$f(X, Y, Z) = 0;$$

$M(x, y, z)$ un de ses points. On a

$$f(x, y, z) = 0,$$

f'_x, f'_y, f'_z ne sont pas tous nuls, et soit

$$\alpha(X - x) + \beta(Y - y) + \gamma(Z - z) = 0$$

un plan P passant par M.

Digitized by Google

Une droite passant par M et située dans le plan P a pour équations

$$\frac{X-x}{u} = \frac{Y-y}{v} = \frac{Z-z}{w} = \lambda$$

avec la condition

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0,$$

et coupe la courbe d'intersection aux points dont les λ sont les racines de l'équation

$$f(x+\lambda u, y+\lambda v, z+\lambda w) = 0.$$

Cette équation est celle aux λ des points où la droite coupe la surface. Donc, la droite coupe, en général, la section plane en un point, et un seul, situé en M : *Le point* M *est un point simple de l'intersection.*

Si l'on choisit la droite telle que

$$uf'_x + vf'_y + wf'_z = 0,$$

elle coupe l'intersection en deux points confondus en M : elle est alors située dans le plan tangent et est tangente à l'intersection.

Comme, en général, le coefficient suivant

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(2)}$$

n'est pas nul, le point M est un point ordinaire de l'intersection. La tangente en ce point est déterminée par les deux équations :

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0, \qquad uf'_x + vf'_y + wf'_z = 0.$$

Si les paramètres directeurs de la tangente en M à l'intersection annulent

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(2)},$$

c'est-à-dire si, u, v, w étant les paramètres directeurs

Digitized by Google

d'une tangente osculatrice, on a

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0,$$

ou, si le plan sécant passe par une des deux tangentes osculatrices, la tangente à la section plane coupe la section en trois points confondus, et le point M est un point d'inflexion sur la section.

Ainsi, *en un point ordinaire, un plan sécant coupe la surface suivant une courbe ayant ce point pour point ordinaire.*

Un plan passant par une tangente osculatrice coupe la surface suivant une courbe ayant un point d'inflexion en ce point.

Ces résultats ne s'appliquent pas, si les deux équations linéaires

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0, \qquad u f'_x + v f'_y + w f'_z = 0$$

sont identiques ; ou si

$$\frac{\alpha}{f'_x} = \frac{\beta}{f'_y} = \frac{\gamma}{f'_z},$$

c'est-à-dire si le plan P considéré est le plan tangent à la surface. Dans ce cas, quelle que soit la droite D considérée dans le plan P, le coefficient de s est nul, et une droite quelconque, située dans le plan P, coupe la section de la surface en deux points confondus en M.

Si l'on choisit u, v, w de façon que

$$(u f'_x + v f'_y + w f'_z)_{(2)} = 0,$$

c'est-à-dire si l'on prend pour droite D une tangente osculatrice, un troisième point d'intersection de la droite et de la section est situé en M.

Donc : *La section d'une surface par le plan tangent en un point ordinaire a un point double en ce*

Digitized by Google

point, les deux tangentes étant les tangentes osculatrices à la surface.

Points d'inflexion. Points méplats. — On a vu que les tangentes osculatrices sont données par les deux équations

$$uf'_x + vf'_y + wf'_z = 0,$$
$$u^2 f''_{x^2} + v^2 f''_{y^2} + w^2 f''_{z^2} + 2uvf''_{xy} + 2vwf''_{yz} + 2wvf''_{zx} = 0.$$

Ces équations sont, en général, deux systèmes de solutions réelles, imaginaires ou confondues; et il y a, en général, deux tangentes osculatrices.

Il peut arriver que ces deux équations soient conséquences l'une de l'autre. Il faut pour cela que la forme quadratique (2) contienne la forme linéaire (1) en facteur, ou que

$$u^2 f''_{x^2} + v^2 f''_{y^2} + w^2 f''_{z^2} + 2uvf''_{xy} + 2vwf''_{yz} + 2wuf''_{zx}$$
$$= (uf'_x + vf'_y + wf'_z)(Au + Bv + Cw),$$

ce qui donne

$$Af'_x = f''_{x^2}, \qquad Bf'_y = f''_{y^2}, \qquad Cf'_z = f''_{z^2},$$
$$Af'_y + Bf'_x = f''_{xy}, \qquad Bf'_z + Cf'_y = f''_{yz}, \qquad Cf'_y + Af'_z = f''_{zx}.$$

Éliminons A, B, C, il reste les équations de condition :

$$\frac{f''_{x^2} f'_y}{f'_x} + \frac{f''_{y^2} f'_x}{f'_y} = f''_{xy} \ldots$$

ou

$$f''_{x^2} f'^2_y + f''_{y^2} f'^2_x = f'_x f'_y f''_{xy},$$
$$f''_{y^2} f'^2_z + f''_{z^2} f'^2_y = f'_y f'_z f''_{yz},$$
$$f''_{z^2} f'^2_x + f''_{x^2} f'^2_z = f'_z f'_x f''_{zx}.$$

Soit M un point d'une surface satisfaisant à ces trois relations; et u, v, w les paramètres directeurs d'une tangente en ce point. On a

$$uf'_x + vf'_y + wf'_z = 0,$$

Digitized by Google

et par suite

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(2)} = 0.$$

Dans l'équation aux λ des points d'intersection de la droite avec la surface, le premier coefficient qui ne s'annule pas (en général) est celui de λ^3,

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(3)},$$

de sorte que, en un tel point, une tangente quelconque coupe la surface en trois points confondus.

Si l'on achève de déterminer la tangente par l'équation

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(3)} = 0,$$

la tangente coupera la surface en quatre points confondus.

De telles tangentes, dites *surosculatrices*, étant déterminées par deux équations du premier et du troisième degré, il y a, en général, trois tangentes surosculatrices.

De tels points sont dits *points d'inflexion de la surface*.

Ainsi, soit M un point d'inflexion d'une surface; une droite quelconque passant par M coupe la surface en un seul point situé en M. Une tangente à la surface coupe la surface en trois points confondus en M; et il existe trois tangentes surosculatrices coupant la surface en quatre points confondus en M.

Les trois tangentes surosculatrices peuvent être :

1° Réelles et distinctes;
2° Une réelle, deux imaginaires;
3° Une réelle, deux réelles confondues;
4° Trois réelles et confondues.

D'où quatre sortes de points d'inflexion d'une surface.

Digitized by Google

Considérons un plan passant par un point d'inflexion. La même méthode que précédemment montre que :

1° Un plan quelconque passant par M coupe la surface suivant une courbe ayant en M un point d'inflexion ;

2° Un plan quelconque, passant par une des trois tangentes surosculatrices en M, coupe la surface suivant une courbe ayant en M un point méplat du second ordre ;

3° Le plan tangent en M coupe la surface suivant une courbe ayant en M un point triple, les trois tangentes en M étant les trois tangentes surosculatrices.

Autre forme des conditions pour qu'un point soit d'inflexion. — Mettons l'équation de la surface sous la forme

$$\varphi(x, y) - z = 0.$$

Les trois équations qui expriment qu'un point soit un point d'inflexion, deviennent

$$\varphi''_{x^2}\varphi'^2_y + \varphi''_{y^2}\varphi'^2_x = \varphi'_x\varphi'_y\varphi''_{xy},$$
$$\varphi''_{y^2} = 0,$$
$$\varphi''_{x^2} = 0$$

ou

$$\varphi''_{x^2} = 0, \qquad \varphi''_{y^2} = 0, \qquad \varphi'_x\varphi'_y\varphi''_{xy} = 0,$$
$$p = 0, \qquad t = 0, \qquad pqs = 0.$$

Les solutions $p = 0$ et $q = 0$ ont été introduites par le fait qu'on a multiplié, pour les rendre entières, les équations par

$$f'_x = p, \qquad f'_y = q, \qquad f'_z = r.$$

Il reste donc les conditions

$$r = 0, \qquad s = 0, \qquad t = 0$$

pour exprimer qu'un point est un point d'inflexion.

Digitized by Google

Remarque. — On voit ainsi que tout point d'inflexion satisfait à la relation

$$rt - s^2 = 0$$

ou que *tout point d'inflexion se trouve sur la ligne parabolique.*

Théorème. — *Tout point d'inflexion est un point double de la ligne parabolique.*

Remarquons d'abord que, en un point simple (ordinaire, parabolique ou d'inflexion) les trois dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z de l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

de la surface ne sont pas nulles : soit

$$f'_z \neq 0.$$

Or, en décrivant l'équation successivement par rapport à x et à y, on a

$$f'_x + \frac{\partial z}{\partial x} f'_y = 0, \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_z},$$

$$f'_y + \frac{\partial z}{\partial y} f'_z = 0, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_z},$$

p et q sont donc finis; on peut donc développer x par la formule de Taylor.

Prenons le point (x, y, z) pour origine, et le plan tangent en ce point pour plan des xy. Le plan tangent ayant pour équation

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

ou, comme $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$,

$$Z = pX + qY;$$

Digitized by Google

il s'ensuit qu'alors

$$p = 0, \qquad q = 0;$$

de sorte que l'équation de la surface se met alors sous la forme

$$z = \frac{1}{1.2}(rx^2 + 2sxy + ty^2)$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\partial r}{\partial x}x^3 + 3\frac{\partial r}{\partial y}x^2y + 3\frac{\partial t}{\partial x}xy^2 + \frac{\partial t}{\partial y}y^3\right) + \ldots.$$

Les deux tangentes osculatrices sont les droites

$$z = 0, \qquad rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0.$$

Si le point est d'inflexion,

$$r = 0, \qquad s = 0, \qquad t = 0,$$

et il reste

$$y = \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\partial r}{\partial x}x^3 + 3\frac{\partial r}{\partial y}x^2y + 3\frac{\partial t}{\partial x}xy^2 + \frac{\partial t}{\partial y}y^3\right) + \ldots,$$
$$z = (ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3) + \ldots.$$

Mais

$$p = 3ax^2 + 6bxy + 3cy^2 + \ldots,$$
$$q = 3bx^2 + 6cxy + 3dy^2 + \ldots,$$
$$r = 6ax + 6by + \ldots,$$
$$s = 6bx + 6cy + \ldots,$$
$$t = 6cx + 6dy + \ldots.$$

L'origine est point d'inflexion ($r = 0$, $s = 0$, $t = 0$ pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$); alors la ligne parabolique a pour équation

$$rt - s^2 = 0,$$

et l'ensemble des termes du plus bas degré est

$$36(ax + by)(cx + dy) - 36(bx + cy)^2.$$

Digitized by Google

Donc *la ligne parabolique a l'origine pour point double.*

Remarque. — Pour qu'un point soit d'inflexion, il faut que ses coordonnées satisfassent aux quatre équations

$$f(x, y, z) = 0,$$

et aux trois équations

$$f''_{x^2} f'^2_y + f''_{y^2} f'^2_x = f'_x f'_y f''_{xy},$$
$$f''_{y^2} f'^2_z + f''_{z^2} f'^2_y = f'_y f'_z f''_{yz},$$
$$f''_{z^2} f'^2_x + f''_{x^2} f'^2_z = f'_z f'_x f''_{zx}.$$

En général, étant donnée une surface algébrique par son équation ponctuelle, ces quatre équations sont incompatibles. *En général, une surface algébrique n'a pas de points d'inflexion.*

Exemple. — Soit la surface

$$x^m + y^m + z^m = a^m.$$

Ligne parabolique. — On a

$$f'_x = m x^{m-1}, \qquad f'_y = m y^{m-1}, \qquad f'_z = m z^{m-1},$$
$$f''_{x^2} = m(m-1) x^{m-2}, \qquad f''_{y^2} = m(m-1) y^{m-2}, \qquad f''_{z^2} = m(m-1) z^{m-2},$$
$$f''_{yz} = 0, \qquad f''_{zx} = 0, \qquad f''_{xy} = 0.$$

L'équation de la ligne parabolique est

$$\begin{vmatrix} m(m-1)x^{m-2} & 0 & 0 & mx^{m-1} \\ 0 & m(m-1)y^{m-2} & 0 & my^{m-1} \\ 0 & 0 & m(m-1)z^{m-2} & mz^{m-1} \\ mx^{m-1} & my^{m-1} & mz^{m-1} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Digitized by Google

ou

$$m^4(m-1)^2 x^{2m-2} y^{m-2} z^{m-2} + m^4(m-1)^2 x^{m-2} y^{2m-2} z^{m-2} + m^4(m-1)^2 x^{m-2} y^{m-2} z^{2m-2} = 0,$$

ou

$$x^{m-2} y^{m-2} z^{m-2}(x^m + y^m + z^m) = 0.$$

Supposons $m = 3$:

$$xyz(x^3 + y^3 + z^3) = 0.$$

La ligne parabolique se compose des sections de la surface par les plans de coordonnées, plus de la ligne à l'infini de la surface.

Points d'inflexion. — On a, pour rechercher les points d'inflexion, les quatre équations

$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3, \qquad xy(x+y) = 0,$$
$$xy^2 + yx^2 = 0, \qquad yz(y+z) = 0,$$
$$zx(z+x) = 0;$$

on trouve trois points d'inflexion réels

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = a,$$
$$x = 0, \quad y = a, \quad z = 0,$$
$$x = a, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Points méplats. — Il peut arriver, plus généralement, qu'en un point simple (f'_x, f'_y, f'_z n'étant pas tous nuls), toute solution de l'équation

$$uf'_x + vf'_y + wf'_z = 0$$

annule non seulement

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(2)} = 0,$$

mais encore les coefficients suivants jusque (et y com-

Digitized by Google

pris)

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(p)} = 0,$$

coefficient de λ.

Le point est dit alors *point méplat d'ordre* $p - 2$. *En un tel point, une tangente quelconque coupe la surface en* $(p - 2)$ *points confondus.*

Si l'on achève de déterminer la tangente par l'équation

$$(uf'_x + vf'_y + wf'_z)_{(p+1)} = 0,$$

on obtient ainsi $(p+1)$ *tangentes surosculatrices, coupant la surface en* $(p+1)$ *points confondus.*

Comme dans le cas des points ordinaires, on démontre que :

1° Un plan quelconque passant par un point méplat M d'ordre $p - 2$ coupe la surface suivant une courbe ayant en M un point méplat du même ordre $p - 2$;

2° Un plan quelconque passant par une des $(p+1)$ tangentes surosculatrices en un point méplat M d'ordre $p - 2$ coupe la surface suivant une courbe ayant un point méplat d'ordre $p - 1$;

3° Le plan tangent à une surface en un point méplat d'ordre $p - 2$ la coupe suivant une courbe ayant, en un point multiple d'ordre $p + 1$, les tangentes à cette courbe étant les $p + 1$ tangentes surosculatrices.

Exemple. — Soit la surface

$$x^m + y^m + z^m = a^m.$$

Le même calcul que pour la surface $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ montre qu'elle a pour points d'inflexion les points

$$\begin{array}{lll} x = 0, & y = 0, & z^m - a^m = 0, \\ x = 0, & y^m - a^m = 0, & z = 0, \\ x^m - a^m = 0, & y = 0, & z = 0, \end{array}$$

Digitized by Google

qui sont tous des points méplats d'ordre $m-3$. Le plan tangent au point $x=0$, $y=0$, $z=a$, par exemple, coupe en effet la surface suivant la courbe

$$z=a,$$
$$x^m+y^m=0,$$

qui a un point multiple d'ordre m au point

$$(x=0,\ y=0,\ z=0)$$

de contact.

Cet exemple montre l'existence de points méplats d'ordre aussi élevé que l'on veut.

[L²17eα]

SUR L'EXTENSION A L'ESPACE DU THÉORÈME DE PONCELET;

Par M. R. BRICARD.

1. Dans un article récemment inséré aux *Nouvelles Annales* (¹), M. G. Fontené a signalé l'intérêt que paraissent devoir présenter les polyèdres homogènes de genre *un*, pour l'extension à l'espace du théorème de Poncelet, relatif aux polygones inscrits et circonscrits à des quadriques.

M. Fontené, à l'appui de ses vues, a considéré des polyèdres *tétragonaux*, ayant un nombre de sommets

(¹) Même Tome, p. 433.
Consulter aussi l'article de M. Deltour (même Tome, p. 481) pour le sens des expressions employées dans la présente Note.

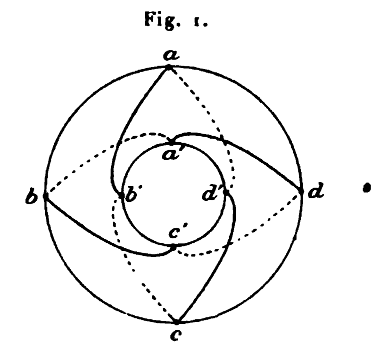
Digitized by Google

égal à pq (p et q étant deux nombres entiers dont chacun est au moins égal à 3).

J'envisagerai un polyèdre tétragonal à huit sommets, dans cette Note qui a pour but, moins d'avancer la question que de montrer, par la considération d'un exemple particulier, la nature des difficultés auxquelles on doit s'attendre, et dont le théorème plan de Poncelet ne pouvait donner idée.

Il faut d'abord établir l'existence d'un tel polyèdre. Considérons, à cet effet, la figure 1 qui représente un

Fig. 1.



tore, projeté orthogonalement sur son plan équatorial. Marquons, respectivement sur le parallèle maximum et sur le parallèle minimum, les quatre points a, b, c, d et les quatre points a', b, c', d'. Menons, à la surface du tore, les huit lignes suivantes :

$$ab',\quad bc',\quad cd',\quad da'$$

et

$$ad',\quad ba',\quad cb',\quad dc';$$

les quatre premières (traits pleins) étant tracées sur le demi-tore supérieur, et les quatre autres (traits ponctués) étant tracés sur le demi-tore *inférieur*). Il est

Digitized by Google

visible que ces huit lignes, et les parallèles maximum et minimum, décomposent la surface du tore en huit quadrilatères curvilignes, assemblés quatre par quatre autour de chaque sommet.

Ces quadrilatères sont

$$(\mathrm{T}) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} abc'b', & bcd'c', & cda'd', & dab'a', \\ aba'd', & bcb'a', & cdc'b', & dad'c'. \end{array} \right.$$

Cherchons maintenant à construire un polyèdre tétragonal organisé, au point de vue de la connexion, comme la figure précédente. Désignons encore par a, a', ..., d, d' les sommets de ce polyèdre. Ses huit faces seront les quadrilatères du Tableau (T). *Il faut que ces quadrilatères soient tous plans.*

Considérons une arête quelconque du polyèdre, ab, par exemple. Elle appartient aux deux faces planes

$$abc'b', \quad aba'd'.$$

Donc ab rencontre $a'd'$ et $b'c'$; ab rencontre de plus, évidemment, ad et bc. On voit de même que chacune des droites cd, $a'b'$, $c'd'$ rencontre les quatre droites

$$ad, \quad bc, \quad a'd', \quad b'c',$$

et l'on parvient à cette conclusion :

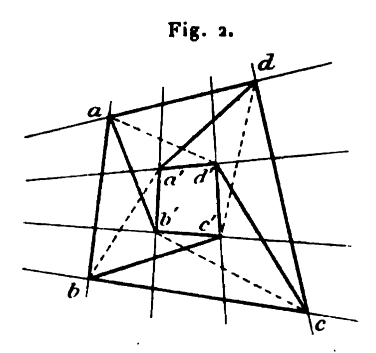
ad, bc, $a'd'$, $b'c'$ sont quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde (H); *ab, cd, $a'b'$, $c'd'$ sont quatre génératrices du même hyperboloïde et de l'autre système.*

Réciproquement, traçons sur un hyperboloïde (H) quatre génératrices quelconques d'un même système et quatre génératrices quelconques de l'autre système

Digitized by Google

(*fig.* 2). Parmi les seize points de rencontre de ces génératrices, prises deux à deux, marquons-en huit, a, a', ..., d, d', telles que chaque génératrice en contienne deux et deux seulement. Les huit quadrilatères du Tableau (T) sont tous visiblement plans et constituent les huit faces du polyèdre tétragonal à huit sommets (¹).

Fig. 2.



2. *Le problème de construire un tel polyèdre inscrit à une quadrique* (Q) *et circonscrit à une quadrique* (Q′) *paraît au moins triplement indéterminé.* En effet, le polyèdre dépend de 17 paramètres [9 correspondant au choix de l'hyperboïde (H), 8 au choix des huit génératrices]. En outre, *ses sommets forment un système ponctuel de Lamé, et ses faces un système tangentiel de Lamé,* c'est-à-dire que toute quadrique contenant sept sommets contient le huitième, et que toute quadrique tangente à sept faces est tangente à la huitième. On le voit immédiatement, en

(¹) Ce polyèdre, inscrit à l'hyperboloïde (H), lui est également circonscrit : en effet, toutes les faces contiennent deux génératrices de (H).

Digitized by Google

remarquant que les sommets peuvent être, de diverses manières, répartis quatre par quatre sur deux plans, et que l'on peut énoncer, pour les faces, un fait corrélatif.

Le problème de construire un tel polyèdre inscrit à une quadrique (Q) et circonscrit à une autre quadrique (Q′) paraît donc bien triplement indéterminé, quelles que soient (Q) et (Q′), parce qu'il ne fait entrevoir que quatorze conditions distinctes entre les 17 paramètres dont dépend le polyèdre. Il y aurait lieu d'examiner si, contrairement à la vraisemblance, les quadriques (Q) et (Q′) ne satisfont pas à une relation, et si, dans certains cas particuliers, l'indétermination ne peut pas être plus grande que dans le cas général.

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons d'électricité; par *E. Carvallo*. — In-8°. Paris, Librairie Polytechnique, 1904.

Dans ses Leçons, comme dans son Livre de la collection *Scientia,* M. Carvallo s'est inspiré de Maxwell : « Mon but, dit-il, est de répandre une méthode d'enseignement que je crois être celle de l'avenir; cette méthode cherche la clarté dans une exposition bien ordonnée des lois expérimentales *et dans leur identification avec les lois de la Mécanique.* »

Chapitre I : *Le courant.* — La formule mécanique

$$W = F\delta, \qquad (1)$$

où F est la force, δ le déplacement, W l'énergie, a-t-elle son équivalent en électricité? La loi de l'équivalence le long du circuit (expériences de Favre) donne d'abord la notion de la quantité W. La loi de Faraday introduit la quantité δ : un circuit contenant uniquement des générateurs et des récepteurs chimiques offre en effet le caractère d'une machine à

Digitized by Google

liaisons complètes comme le treuil, et le nombre de valences rompues ou établies depuis le début de l'expérience, nombre qui est le même dans tous les appareils, est à tout instant une véritable *coordonnée* électrochimique; la variation de cette coordonnée pendant un temps donné est le *déplacement* électrochimique. On peut d'ailleurs définir ce déplacement par l'ampèremètre; on cesse de le qualifier d'*électrochimique*, et l'on dit simplement *le déplacement électrique q*. On écrit alors

$$(1') \qquad E = \frac{W}{q} \qquad \text{ou} \qquad W = Eq,$$

et l'on donne à E le nom de *force électromotrice*.

La loi de Joule introduit l'idée de résistance, et conduit à la formule

$$E - Ri = 0;$$

comme dans son Livre de *Scientia* (n° 16) l'auteur considère $-Ri$ comme une force de frottement, dont le travail résistant, $-Ri \times q$ ou $-Ri^2 t$, est dégradé en chaleur de Joule.

Chapitre II : *Distribution des courants.* — Les problèmes de dynamique sont ramenés par le théorème de d'Alembert à des problèmes de statique, et ceux-ci se résolvent par le théorème des travaux virtuels; si le degré de liberté du système est *p*, on obtiendra *p* équations permettant de calculer les *p* coordonnées du système en fonction du temps, les conditions initiales étant connues. Si l'on prend en particulier pour l'un des mouvements virtuels le mouvement réel, on a l'équation des forces vives; cette équation suffit lorsque le degré de liberté du système est *un;* dans le cas général, il faut y joindre $p - 1$ équations obtenues au moyen de $p - 1$ mouvements vraiment virtuels.

Dans le domaine de la Physique, on appellera *coordonnées d'un système* toutes les grandeurs variables qui contribuent à définir son état à chaque instant; le *déplacement du système* sera l'ensemble des changements de ses coordonnées. Et de même que, pour les problèmes où le degré de liberté est *un,* les physiciens emploient avec succès le principe de la conservation de l'énergie, légitimé par la vérification expérimentale des conséquences que l'on en tire, de même, pour

Digitized by Google

les problèmes de la nature où le degré de liberté est p, on peut essayer de généraliser la méthode des travaux virtuels, sauf à soumettre les conclusions obtenues au contrôle de l'expérience.

C'est dans cet ordre d'idées que M. Carvallo expose la solution du problème des réseaux conducteurs. La loi des bifurcations de Faraday, connue sous le nom de premier théorème de Kirchhoff,

$$\sum i = 0 \quad \textit{autour d'un point},$$

montre que l'établissement d'un pont dans un réseau conducteur introduit un degré de liberté dans le système, et cette remarque donne le moyen d'organiser un système de coordonnées non surabondant. Le second théorème de Kirchhoff,

$$\sum (e - ri) = 0 \quad \textit{sur un contour fermé},$$

regardé comme loi des travaux virtuels pour le système particulier des courants, donne p équations si le degré de liberté du système est p : on les écrit à mesure que l'on introduit les p coordonnées dont on vient de parler.

Ces théorèmes de Kirchhoff, joints à la loi de Joule, donnent la formule de Ohm pour l'expression de la résistance. Mieux encore, les deux lois de Kirchhoff se généralisent pour des plaques, pour des corps dont les trois dimensions sont sensibles; il devient possible d'étudier la distribution des courants dans des conducteurs de forme quelconque, et l'auteur établit à ce sujet les équations de Kirchhoff qui, complétées par les forces électromotrices d'induction, conduisent à celles de Maxwell.

Chapitre III : *Électromagnétisme.* — Vecteurs, cycles, flux. Loi élémentaire de l'électromagnétisme (forme de Maxwell). Loi de Pouillet. Formule de Laplace. Travail et fonction des forces électromagnétiques. Les aimants.

Chapitre IV : *Induction électromagnétique.* — Tandis que, dans ce qui précède, on suppose atteint l'état de régime, de sorte qu'aucune force d'inertie n'apparaît, il en apparaît une dans le phénomène de la self-induction. Considérons le

Digitized by Google

courant d'une pile dans un circuit dont le coefficient de self-induction est L; le travail total de la force électromotrice de self-induction, $-L\frac{di}{dt}$, comparable à $-m\frac{dv}{dt}$, depuis l'établissement des contacts jusqu'au moment où le régime est établi, est $-\frac{1}{2}Li^2$: ce travail résistant est emprunté à la pile et diminue d'autant la chaleur de Joule; quand on arrête le courant, l'énergie $+\frac{1}{2}Li^2$ est restituée en chaleur de Joule; $\frac{1}{2}Li^2$ est l'énergie propre du courant comme la force vive est l'énergie propre du volant. Plus loin la force électromagnétique est comparée à la force centrifuge.

Les deux lois de Kirchhoff sont étendues au circuit magnétique.

Hystérésis.

CHAPITRE V : *Électrostatique.* — Extension des théorèmes de Kirchhoff aux réseaux contenant des condensateurs. Diélectriques. Énergie électrostatique, comparable à celle d'un ressort bandé. Induction et potentiel électrostatiques.

Théorie de Maxwell : le diélectrique doit propager des ondes de déplacements électriques comme l'air propage les ondes sonores; expériences de Hertz; télégraphie sans fil. Vitesse de propagation des ondes électromagnétiques; expériences de M. Blondlot. Théorie électromagnétique de la lumière.

On voit assez, par ce compte rendu, que l'auteur s'est efforcé surtout de faire comprendre l'électricité en s'aidant de la mécanique. « Je veux montrer, dit-il, que l'application des mots *déplacement* et *force* aux phénomènes électriques est légitime; que leur usage et l'adaptation de la loi des travaux virtuels ne consacrent pas l'illusion d'une analogie purement formelle. C'est l'idée de ce cours. Vous la trouverez dans Maxwell. » Et plus loin : « La signification du mot *moment* a été malheureusement restreinte depuis Galilée. La protestation de Lagrange a été impuissante à combattre cette diminution de la pensée de Galilée, pensée qu'il faut au contraire rendre universelle, car elle embrasse l'ensemble des phénomènes

Digitized by Google

náturels, pourvu que le mot *déplacement* soit entendu dans son sens le plus large. »

Je puis assurer à ceux qui liront ce Livre qu'ils y trouveront ample matière à réflexion : ce n'est pas un mince éloge.

G. Fontené.

Leçons élémentaires sur la théorie des groupes de transformations, professées à l'Université de Messine, par M. *G. Vivanti;* traduites par A. Boulanger. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

La théorie des groupes occupe, dans tous les périodiques mathématiques, une place importante et bien justifiée. Elle n'avait pourtant pas été, jusqu'à ce jour, présentée au public français sous une forme didactique. Le livre que nous annonçons vient ainsi combler une lacune regrettable. Il remplacera avantageusement une traduction. à première vue plus désirable, du grand Traité de Sophus Lie : *Theorie der Transformationsgruppen*. Je dis avantageusement, car l'Ouvrage de Lie, évidemment plus complet, est malheureusemont trop touffu et parfois prolixe. Au contraire, M. Vivanti a su condenser dans son petit livre presque toute la matière des 2000 pages de Lie, sans jamais tomber pour cela dans l'obscurité.

Je n'aurais à faire que quelques critiques de détails. L'expression, malheureusement aujourd'hui classique, de *transformation infinitésimale,* ne me paraît pas répondre à la tendance générale qui consiste à remplacer l'emploi des infiniment petits par celui des différentielles ou des dérivées. De même que l'on parle du mouvement hélicoïdal tangent à un mouvement donné, pourquoi ne pas adopter l'expression de *transformation linéaire tangente à un groupe donné.* Les équations

$$\begin{gathered} X_1 = x_1 + t f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n = x_n + t f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{gathered}$$

déterminent pour t très petit la transformation infinitésimale du groupe dont les trajectoires Γ sont définies par les équations :

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Digitized by Google

Mais elles représentent aussi, quel que soit l'ordre de grandeur de t, un ensemble de transformations dont les trajectoires sont des *droites, tangentes* aux courbes Γ, ce qui justifierait notre dénomination.

A l'exemple de Lie, M. Vivanti a cru devoir se restreindre aussi à la considération des fonctions analytiques. La facilité qui en résulte pour quelques démonstrations est évidente. Il me semble qu'on a cependant un peu abusé de ce prétexte dans un grand nombre de sujets touchant à la Géométrie et à la Physique mathématique. En dépit du vieil adage que « la nature ne fait pas de sauts », il n'est déjà pas certain (comme l'a fort bien fait remarquer M. Baire) qu'on soit en droit de se limiter dans ces sortes de questions à l'usage des fonctions continues et dérivables.

A plus forte raison ne doit-on pas étudier exclusivement le cas où les fonctions que l'on considère sont holomorphes; c'est à peu près comme si l'on voulait supprimer de la Géométrie l'étude du cercle sous prétexte que son ordonnée n'est pas partout une fonction holomorphe de l'abscisse.

Ces observations une fois faites, nous ne saurions trop insister sur le grand mérite de M. Vivanti qui est d'avoir pu rendre claire et accessible une théorie dont les parties élevées ne semblaient pouvoir être abordées qu'après un long effort.

L'habile traduction de M. Boulanger doit prendre aussi sa part de nos louanges. MAURICE FRÉCHET.

CERTIFICATS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE.

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Énoncer et démontrer la propriété fondamentale d'une série uniformément convergente dont les termes sont des fonctions analytiques d'une variable complexe, holomorphes à l'intérieur d'une aire donnée.*

II. *On considère les courbes* (Γ) *jouissant de la propriété qu'en chacun de leurs points* $M(x, y, z)$ *elles soient*

Digitized by Google

tangentes à l'une des arêtes du cône (C) *dont l'équation est*

$$(1)\qquad (Z - z)^2 - 4z(X - x)(Y - y) = 0;$$

1° *Montrer que la recherche de ces courbes se ramène à l'intégration du système*

$$(2)\qquad \begin{cases} dy - A\,dx = 0, \\ dz - u\,dx = 0, \end{cases}$$

où u est une variable auxiliaire nouvelle et A *une fonction à déterminer de x, y, z, u. En déduire, sans aucun signe d'intégration, les équations de la courbe* (Γ) *la plus générale.*

2° *Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces jouissant de la propriété que le plan tangent en l'un quelconque de leurs points est tangent au cône* (C) *correspondant à ce point. Démontrer que les courbes caractéristiques de cette équation aux dérivées partielles sont définies par les solutions singulières du système* (2).

Épreuve pratique. — *Calculer la valeur de l'intégrale*

$$\int \frac{\sqrt{9z^4+11}\,(4z+1)^2}{(3z^2+5z-2)^2}\,dz:$$

1° *Le long de la circonférence de centre* O *et de rayon* 1;
2° *Le long de la circonférence de centre* O *et de rayon* 3.

(Juillet 1904.)

Épreuve écrite. — I. *Série de Laurent.*

II. *Étant donnée une fonction analytique $f(z) = u + iv$ de la variable complexe $z = x + iy$, telle qu'on ait*

$$v = \frac{(u + 8x^3)y}{3x},$$

calculer les dérivées partielles du premier ordre de u et de v, et en déduire $f(z)$.

Digitized by Google

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dz}{2\cos^2 z + 4\cos z + 3}$$

par la méthode des résidus. (Novembre 1904.)

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPÉRIEURE.

Nancy.

Épreuve écrite. — *On donne une équation irréductible* $F(z, u) = 0$, F *étant un polynome entier en* z *et* u, *de degré* m *par rapport à* u. *Soit* T *la surface de Riemann correspondante, qui sera supposée à connexion multiple.*

1° *Trouver l'expression du genre* p *de cette surface;*

2° *Transformer* T *en une surface simplement connexe à l'aide de* $2p$ *coupures;*

3° *Soit*

$$v = \int_{z_0, u_0}^{z, u} \varphi(z, u)\, dz$$

une intégrale abélienne quelconque attachée à la relation donnée; trouver les diverses valeurs que prend cette intégrale lorsque, les deux points (z_0, u_0) *et* (z, u) *restant fixes, on fait varier le chemin d'intégration sur la surface* T; *définir les modules de périodicité de l'intégrale* v.

Épreuve pratique. — z *et* u *étant liés par la relation*

$$u^2 = z^4 - 1,$$

on considère la fonction rationnelle de z *et de* u

$$v = \frac{1}{u} \frac{u + \sqrt{15}}{z - 2};$$

on demande de la représenter par une somme d'intégrales de première et de deuxième espèces, c'est-à-dire de la décomposer en éléments simples.

(Juillet 1904.)

Digitized by Google

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Soit* $f(z, u) = 0$ *une équation irréductible qui définit* u *comme fonction algébrique de* z, $F(z, u)$ *désignant un polynome de degré* m *en* z *et* u. *On suppose que les* m *directions asymptotiques de la courbe représentée sont distinctes et qu'aucune n'est parallèle à l'axe des* u; *on suppose de plus que la courbe n'a d'autres singularités que des points doubles à tangentes distinctes :*

1° *Trouver l'expression générale des intégrales abéliennes de première espèce attachées à la courbe;*

2° *Démontrer que le nombre de ces intégrales qui sont linéairement indépendantes est égal au genre* p;

3° *Définir les intégrales normales de première espèce; montrer qu'elles sont au nombre de* p *distinctes, établir la propriété de leurs modules de périodicité relatifs aux coupures* b *de la surface de Riemann.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne l'équation*

$$u^3 - 3u + 2z(z-2) = 0,$$

qui définit u *comme fonction algébrique de* z:

1° *Trouver les points singuliers de la fonction* u;

2° *Déterminer la forme des développements de ses branches dans le domaine de chacun de ces points;*

3° *Calculer les premiers coefficients de chacun de ces développements.* (Novembre 1904.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Étant donnée la fonction* pu, *d'invariants* $4a^2$ *et* 0, *on considère les courbes* (C) *définies par*

$$x = \frac{1}{pu - pa}, \qquad y = \frac{p'u}{pu - pa},$$

pa *étant réel :*

1° *Indiquer sommairement les différentes formes des courbes* (C).

2° *Points d'inflexion d'une courbe* (C); *réalité; équation donnant les valeurs de* pu, u *étant l'argument d'un point d'inflexion; montrer que le lieu des points d'inflexion, quand* a *varie, se compose de droites.*

Digitized by Google

3° *Asymptotes d'une courbe* (C); *à quelle condition doit satisfaire* p*a* *pour que les asymptotes soient d'inflexion? Pour combien de courbes* (C) *a-t-on des asymptotes réelles?*

4° M *étant un point d'argument u d'une courbe* (C), *on considère l'aire balayée par* OM *lorsque u varie de zéro à une limite réelle u : méthode pour calculer cette aire lorsque a est une demi-période. Calcul de cette aire pour a quelconque.*

5° *L'aire obtenue étant représentée par* $\varphi(u)$, *pour quelle valeur de a la fonction* $\varphi(u)$ *est-elle uniforme? Pôles de* $\varphi(u)$.

Épreuve pratique. — *Exprimer, à l'aide des fonctions elliptiques, les coordonnées d'un point variable de la courbe*

$$xy^2 + 3x^3 - y^2 - 2x^2 - 5x = 0,$$

en se servant successivement des notations de Weierstrass et de Jacobi. Cette courbe comprend un ovale : aire de cet ovale. (Juillet 1904.)

Paris.

Épreuve écrite. — I. *Étant donné le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 x_1 + \ldots, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = \lambda_n x_n + \ldots,$$

où les seconds membres sont des séries entières à coefficients réels en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *et où les termes non écrits sont de degrés supérieurs à* un, *qu'entend-on en disant que la position* $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$, $x_n = 0$ *est* stable *ou* instable? *Montrer que, si les* λ *sont tous négatifs, il y a stabilité et que, au contraire, il y a instabilité si, parmi les* λ, *il en est de positifs.*

II. *On considère l'équation fonctionnelle*

$$\varphi(y) = \int_0^y f(x)\,\psi(x, y)\,dx,$$

où $\varphi(y)$ *et* $\psi(x, y)$ *sont des fonctions continues, données*

Digitized by Google

quand x et y varient de o à a, et où l'on suppose $\varphi(o) = o$. *Montrer qu'il existe une fonction* $f(x)$ *continue de* o *à* a *et une seule, satisfaisant à cette équation fonctionnelle.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On demande de trouver le volume limité par la surface fermée*

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

On se servira, pour faire le calcul, des coordonnées polaires de l'espace. (Octobre 1904.)

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET CALCUL INTÉGRAL.

Nancy.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère l'intégrale curviligne*

$$I = \int (y^2 + z^2)\,dx + (z^2 + x^2)\,dy,$$

prise le long d'une courbe (C) *partant de l'origine des coordonnées et aboutissant au point* (x, y); z *désigne une fonction de* x *et* y.

Déterminer la fonction z *la plus générale telle que l'intégrale* I *ne dépende pas de la courbe* (C), *mais seulement de son extrémité* (x, y). *Déterminer, en particulier, parmi toutes ces fonctions, celle qui se réduit à* y^2 *pour* $x = o$. *Calculer la valeur de l'intégrale curviligne* I *correspondante.*

II. *On considère en coordonnées rectangulaires la surface dont l'équation est*

$$z = \frac{x^2 - y^2}{2a}.$$

Calculer l'aire de la portion de cette surface qui se projette sur le plan des xy à l'intérieur de la courbe dont

Digitized by Google

l'équation en coordonnées polaires rapportée à Ox *comme axe polaire est*

$$r = a\sqrt{\cos\theta}.$$

III. *On considère la surface représentée par l'équation*

$$(1) \qquad zx^2 - py^2 = 0,$$

où p *est une constante.*

1° *Déterminer sur cette surface le lieu des points où la normale fait un angle donné avec* Oz.

2° *Déterminer sur la surface une courbe telle qu'en chacun de ses points le plan formé par la tangente à la courbe et la normale à la surface soit parallèle à* Oz.

3° *Trajectoires orthogonales aux surfaces représentées par l'équation* (1) *quand* p *varie.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x\cos\varphi + x^2}} \qquad \text{pour} \qquad \varphi = 32°46'.$$

(Novembre 1904.)

Marseille.

Épreuve écrite. — *Trouver toutes les surfaces telles que le plan tangent en chaque point* M *rencontre un axe* OZ *en un point équidistant du point de contact* M *et d'un point fixe* O *pris sur* OZ.

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation*

$$(x + 15y)\,dx + (2y - 15x)\,dy = 0,$$

en employant un facteur intégrant.

(Novembre 1904.)

Grenoble.

Épreuve écrite. — *Sur la normale principale, en chaque point* M *d'une hélice circulaire* S, *et dans le sens de la concavité, on porte une longueur constante* $MM_1 = l$ *et l'on considère la courbe* S_1, *lieu du point* M_1.

Digitized by Google

On demande de déterminer l de façon que les courbes S *et* S_1 *jouissent de l'une des quatre propriétés suivantes :*

1° *Les courbes* S *et* S_1 *ont même courbure;*

2° *Elles ont même torsion absolue;*

3° *Les tangentes* MT *et* M_1T_1 *aux points correspondants sont rectangulaires;*

4° *La tangente* M_1T_1 *à* S_1 *en* M_1 *est parallèle à la binormale* MH *à la courbe* S *en* M.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° *Intégrer l'équation*

$$2x^3\,dy = y^3\,dx + 3x^2y\,dx.$$

2° *Intégrer l'équation*

$$x(x^2+y^2)p + 2y^2(px+qy-z) = 0,$$

et déterminer une surface intégrale passant par le cercle

$$x^2+y^2 = R^2, \qquad z = c.$$

(Juillet 1904.)

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant donné un système de deux équations différentielles du premier ordre*

$$(A) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z),$$

énoncer et démontrer le théorème fondamental de Cauchy, relatif à l'existence des intégrales de ce système.

Qu'entend-on par INTÉGRALE GÉNÉRALE *et par* INTÉGRALE PREMIÈRE *du système* (A)?

II. *Soit* $y = \varphi(x, C)$ *l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} + y^2 + ay + b = 0,$$

où a *et* b *sont des fonctions de* x. *Démontrer que l'on a, quelle que soit la constante* C,

$$\int \varphi(x, C)\,dx = -\frac{1}{2}\log\frac{\partial\varphi}{\partial C} - \frac{1}{2}\int a\,dx.$$

Digitized by Google

Application. — *Soient* y_1, y_2, y_3 *trois intégrales particulières de l'équation* (1); *en déduire une formule donnant l'intégrale générale de l'équation linéaire*

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + a\frac{dz}{dx} + bz = 0. \tag{2}$$

Épreuve pratique. — *Soit* R *le quadrilatère curviligne* ABCD, *limité par les arcs* AB, BC, CD, DA *appartenant respectivement à quatre paraboles* P_1, P_2, P_3, P_4 *ayant pour foyer l'origine et représentées en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$(P_1) \qquad y^2 - 4x - 4 = 0,$$
$$(P_2) \qquad y^2 - 2x - 1 = 0,$$
$$(P_3) \qquad y^2 + 6x - 9 = 0,$$
$$(P_4) \qquad y^2 + 4x - 4 = 0.$$

On demande de calculer l'intégrale double

$$\iint \frac{y\,dx\,dy}{(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+y^2}}$$

étendue à la région R.

N. B. — *On peut, par exemple, remplacer l'intégrale double par une intégrale curviligne, ou employer le changement de variables défini par les formules*

$$x = u^2 - v^2, \qquad y = 2uv.$$

(Octobre 1904.)

Poitiers.

Épreuve écrite. — I. *Déterminer la fonction* $f(x, y)$ *de manière que, en éliminant* α *et* β *de l'équation*

$$z = \alpha x + \beta y + f(x, y),$$

on obtienne

$$z = px + qy + f(x, y).$$

II. *Trouver l'équation aux dérivées partielles du second ordre, indépendante des constantes* α *et* β *de la fonction* F

Digitized by Google

à laquelle satisfait la fonction z définie par

$$z = \alpha x + \beta y + F\left(\frac{y}{x}\right).$$

III. *Trouver la surface* S *la plus générale satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles*

$$z = px + qy + a\,\frac{y}{x},$$

et déterminer la surface particulière Σ *contenant la courbe*

$$z = 0, \qquad x^3 + y^3 + 3axy = 0.$$

IV. *Chercher les projections sur le plan* xOy *des lignes asymptotiques de la surface* S *et de la surface* Σ.

V. *Dans ce dernier cas on obtient des lignes droites et des coniques. Déterminer le cercle osculateur à l'une de ces coniques, le point de contact étant l'origine des coordonnées.*

Épreuve pratique. — I. *A tout point* (x, y) *du plan correspondent* λ, μ, *de façon que l'on ait*

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2 - \mu} + \frac{y^2}{b^2 - \mu} = 1 \qquad (a^2 > b^2).$$

Entre quelles limites sont, en général, λ *et* μ?

Entre quelles limites varient λ *et* μ *quand le point* (x, y) *est à l'intérieur de l'ellipse* E *ayant pour équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

II. *Transformer l'intégrale double*

$$\int\!\!\int F(x, y)\,dx\,dy$$

en prenant pour variables indépendantes λ *et* μ.

III. *Comme application, calculer l'intégrale*

$$\int\!\!\int \frac{dx\,dy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + a^2 + b^2)^2 - 4(a^2 - b^2)x^2}}$$

étendue à tous les points intérieurs à l'ellipse E.

(Juillet 1904.)

Digitized by Google

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1996.

(1904, p. 192.)

La caustique par réflexion d'une ellipse pour des rayons parallèles au grand axe est une sextique unicursale dont l'aire est

$$\frac{3\pi b(5a^2 - b^2)}{16a},$$

a et b étant les demi-axes de l'ellipse.

(E.-N. Barisien.)

SOLUTION

Par M. Letierce.

Soient $M(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ un point de l'ellipse, m le coefficient angulaire du rayon réfléchi en ce point.

On détermine m en écrivant que la direction

$$b\cos\varphi . x + a\sin\varphi . y = 0$$

de la tangente à l'ellipse en M satisfait à l'équation

$$m(y^2 - x^2) + 2xy = 0$$

des bissectrices des droites

$$y = 0, \qquad y - mx = 0,$$

ce qui donne

$$m = \frac{2ab\sin\varphi\cos\varphi}{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}.$$

L'équation du rayon réfléchi en M est donc

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2ab\sin\varphi\cos\varphi . x + (a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi)y \\ \qquad\qquad - b\sin\varphi(a^2 + c^2\cos\varphi) = 0. \end{array} \right.$$

Cette équation, jointe à celle obtenue en la dérivant par rapport à φ, détermine l'enveloppe cherchée. L'équation dérivée est

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2ab(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)x + 2(a^2 + b^2)\sin\varphi\cos\varphi . y \\ \qquad\qquad - b\cos\varphi(a^2 + c^2 - 3c^2\sin^2\varphi) = 0. \end{array} \right.$$

Digitized by Google

(1) et (2) résolus, par rapport à x et y, donnent

$$(3)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\cos\varphi}{2a}[3a^2 - (a^2 + b^2)\cos^2\varphi], \\ y = b\sin^3\varphi. \end{cases}$$

En remplaçant $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ par leurs valeurs en fonction de $t = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$, on voit que la courbe (3) est une sextique unicursale.

Calcul de l'aire :

$$S = \frac{6b}{a}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4\varphi[b^2 - (a^2 + b^2)\sin^2\varphi]\,d\varphi$$

$$= \frac{6b^3}{a}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4\varphi\,d\varphi - \frac{6b(a^2+b^2)}{a}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^6\varphi\,d\varphi.$$

Posant

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4\varphi\,d\varphi,$$

$$I' = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^6\varphi\,d\varphi,$$

on voit que

$$I' = I - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi.$$

Intégrant par parties l'intégrale du second membre, on obtient

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{5}I'.$$

Par suite

$$I' = \frac{5}{6}I,$$

et alors

$$(4)\quad S = \frac{b(b^2 - 5a^2)}{a}I.$$

Digitized by Google

Or

$$\cos 4\varphi = \cos^2 2\varphi - \sin^2 2\varphi = 1 - 4(1 - 2\cos^2\varphi) + 8\sin^4\varphi,$$

d'où

$$\sin^4\varphi = \frac{1}{8}(\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3)$$

et

$$I = \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3)\,d\varphi = -\frac{3\pi}{16};$$

l'équation (4) donne alors

$$S = \frac{3\pi b(5a^2 - b^2)}{16a}.$$

C'est l'expression cherchée.

Les expressions (3) permettent de construire la courbe sans difficulté.

En éliminant $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ entre ces deux équations et

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1,$$

on voit que l'équation cartésienne de la courbe est

$$\begin{aligned}
&27c^6(a^2+b^2)^3 b^2 y^4\\
&\quad + [4a^2b^2x^2 + (a^2+b^2)^2y^2 - b^2(2a^2-b^2)^2]^3\\
&\quad + 27c^2(a^2+b^2)(2a^2-b^2)b^4y^2\\
&\qquad \times [4a^2b^2x^2 + (a^2+b^2)^2y^2 - b^2(2a^2-b^2)^2]\\
&\qquad\qquad - 27b^{10}(2a^2-b^2)^3y^2 = 0.
\end{aligned}$$

1997.

(1903, p. 240.)

Démontrer l'identité

$$\begin{aligned}
&2^n\cos^n\frac{a}{2}\sin\left(x + n\frac{a}{2}\right)\\
&\quad = \sin x + C_n^1\sin(x+a) + C_n^2\sin(x+2a) + \ldots\\
&\qquad + C_n^p\sin(x+pa) + \ldots + C_n^n\sin(x+na),
\end{aligned}$$

où C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n *sont les coefficients binomiaux.*

(C. Bourlet.)

Digitized by Google

SOLUTION

Par M. Letierce.

De

$$\cos^n \frac{a}{2} = \frac{\left(e^{i\frac{a}{2}} + e^{-i\frac{a}{2}}\right)^n}{2^n}$$

et

$$\sin\left(x + n\frac{a}{2}\right) = \frac{e^{ix} e^{in\frac{a}{2}} - e^{-ix} e^{-in\frac{a}{2}}}{2i},$$

on tire

$$2^n \cos^n \frac{a}{2} \sin\left(x + n\frac{a}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left[e^{ix} e^{in\frac{a}{2}}\left(e^{i\frac{a}{2}} + e^{-i\frac{a}{2}}\right)^n - e^{-ix} e^{-in\frac{a}{2}}\left(e^{i\frac{a}{2}} + e^{-i\frac{a}{2}}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[e^{ix}(1 + e^{ia})^n - e^{-ix}(1 + e^{-ia})^n\right]$$

ou

$$2^n \cos^n \frac{a}{2} \sin\left(x + n\frac{a}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\begin{array}{l} e^{ix}\ (1 + C_n^1 e^{ia} + C_n^2 e^{2ia} + \ldots + C_n^p e^{pia} + \ldots + C_n^n e^{nia}) \\ - e^{-ix}(1 + C_n^1 e^{-ia} + C_n^2 e^{-2ia} + \ldots + C_n^p e^{-pia} + \ldots + C_n^n e^{-nia}) \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\begin{array}{l} (e^{ix} - e^{-ix}) + C_n^1 (e^{i(x+a)} - e^{-i(x+a)}) + C_n^2 (e^{i(x+2a)} - e^{-i(x+2a)}) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + C_n^p (e^{i(x+pa)} - e^{-i(x+pa)}) + \ldots + C_n^n (e^{i(x+na)} - e^{-i(x+na)}) \end{array}\right]$$

ou enfin

$$2^n \cos^n \frac{a}{2} \sin\left(x + n\frac{a}{2}\right)$$

$$= \sin x + C_n^1 \sin(x + a) + C_n^2 \sin(x + 2a) + \ldots$$

$$+ C_n^p \sin(x + pa) + \ldots + C_n^n \sin(x + na).$$

C. Q. F. D.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME IV, 4e SÉRIE).

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

A. Algèbre élémentaire; théorie des équations algébriques et transcendantes; groupes de Galois; fractions rationnelles; interpolation.

B. - Déterminants; substitutions linéaires; élimination; théorie algébrique des formes; invariants et covariants; quaternions; équipollences et quantités complexes.

C. - Principes du Calcul différentiel et intégral; applications analytiques; quadratures; intégrales multiples; déterminants fonctionnels; formes différentielles; opérateurs différentiels.

Digitized by Google

D. — Théorie générale des fonctions et son application aux fonctions algébriques et circulaires; séries et développements infinis, comprenant en particulier les produits infinis et les fractions continues considérées au point de vue algébrique; nombres de Bernoulli; fonctions sphériques et analogues.

F. — Fonctions elliptiques avec leurs applications.

I. — Arithmétique et théorie des nombres; analyse indéterminée; théorie arithmétique des formes et des fractions continues; division du cercle; nombres complexes, idéaux, transcendants.

Digitized by Google

J. — Analyse combinatoire; calcul des probabilités; calcul des variations; théorie générale des groupes de transformations [en laissant de côté les groupes de Galois (A), les groupes de substitutions linéaires (B) et les groupes de transformations géométriques (P)]; théorie des ensembles de M. Cantor.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Correspondance.

Bibliographie.

Divers.

Digitized by Google

Questions proposées.

Solutions de questions proposées.

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES NOMS CITÉS

(TOME IV, 4e SÉRIE).

Les noms des AUTEURS sont en PETITES CAPITALES.
Les noms *cités* sont en *italiques*.

Digitized by Google

34577 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Digitized by Google

Digitized by Google

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 1. *SUPPLÉMENT.* Janvier 1904.

CHRONIQUE.

L'Académie royale des Sciences de Belgique annonce pour le concours de 1904 la même question déjà proposée pour 1902 :

« Contribution à la théorie algébrique et géométrique des formes de degré n, $n > 3$. »

La valeur du prix est de 600 francs. Les manuscrits doivent être entre les mains du secrétaire de l'Académie avant le 1er août 1904.

L'Académie décerne tous les cinq ans le prix Charles Lagrange, de 1200 francs, à l'auteur du meilleur Ouvrage mathématique ou expérimental qui contribue, d'une manière importante, à la théorie mathématique du monde. Les manuscrits doivent être déposés avant le 1er janvier 1905.

★

L'Académie américaine des Arts et des Sciences a élu comme membres étrangers honoraires M. Charles-Émile Picard, de Paris, à la place de H.-A.-E.-A. Faye, décédé, et M. Joseph Larmor, de Cambridge, à la place de Sir George-Gabriel Stokes, décédé.

★

Les journaux annoncent que le Comité scientifique du **Congrès des Arts et des Sciences** de l'Exposition de Saint-Louis, composé du Dr Newcomb (Washington), du professeur Hugo Munsterberg (Harvard University) et du professeur Albion Small (Chicago), a fait son rapport le 14 octobre au directeur des Congrès, M. Howard Rogers, et au président M. Nicolas Murroy Butler, président des affaires administratives. Les membres du Comité étaient en Europe il y a cinq mois et 114 des invitations adressées aux notabilités du monde des lettres et des sciences ont été acceptées.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS PÉRIODIQUES RÉCENTS.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, fascicule II ; 1903. — Théorie des formes à coefficients entiers décomposables en facteurs linéaires ; par M. *X. Stouff*. — Exposé de la méthode de M. C. Glasenapp pour la ré-

Digitized by Google

duction des observations des éclipses des satellites de Jupiter; par M. *Nicolas Stoyanoff*. — Recherches sur l'Hydrodynamique, IV[e] Partie; par M. *P. Duhem* (*suite et fin*). — Sur les courbes de traction du caoutchouc vulcanisé; par MM. *H. Bouasse* et *Z. Carrière*. — Étude expérimentale des actions photographiques; par M. *C. Camichel*.

OUVRAGES RÉCENTS.

Robin (G.), Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Paris. — *Théorie nouvelle des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée de nombre*, publiée sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, par *L. Raffy*, Professeur adjoint à la Faculté des Sciences de Paris. 1 volume in-8; 1903 (Paris. Gauthier-Villars).

Les objets, que l'on déduit par abstraction des êtres concrets que nous présente la nature, forment par leurs groupements de nouveaux objets; ces objets sont *équivalents*, c'est-à-dire peuvent se substituer les uns aux autres; si l'on prend l'objet formé de n objets équivalents pour unités, chacun de ces derniers est appelé $\frac{1}{n}$ et l'on admet que tout objet unité peut être considéré comme formé par la réunion d'un nombre illimité d'objets équivalents. Telles sont les conditions imposées aux objets considérés et au moyen desquelles l'auteur constitue la Théorie des fractions; le nombre est ici le nombre entier et la fraction, envisagés comme des noms donnés aux objets; le nombre irrationnel n'intervient jamais dans le développement de l'Analyse, telle qu'elle est exposée dans cet Ouvrage. Les notions de *limite* et d'*infiniment petit* sont également rejetées comme étant des postulats relatifs aux grandeurs, et que la considération du nombre, telle que l'auteur la conçoit, ne permet pas d'accepter quand il s'agit du nombre et non des grandeurs.

Toute la théorie repose sur la notion de *suite convergente;* une telle suite est *rationnelle* si elle a pour limite (au sens ordinaire) un nombre entier ou fractionnaire, *irrationnelle* dans le cas contraire; deux suites sont *équivalentes* si la suite formée par les différences des termes de même rang a pour limite zéro.

Si à un nombre x d'un intervalle (a, b) on fait correspondre une suite convergente connue, ainsi que toutes les suites équivalentes, l'ensemble de ces suites définit une fonction de x dans cet intervalle, et l'on désigne par $f(x)$ un terme *quelconque*, pris à partir d'un rang suffisamment élevé dans l'une des suites qui correspondent à x.

Ce qui précède suffit à indiquer dans quel esprit cette Théorie est constituée: au lieu d'utiliser la notion de nombre irrationnel, l'auteur introduit constamment une quelconque des valeurs suffisamment approchées de ce nombre et il serait aisé de rapprocher cette théorie de la théorie habituelle, en utilisant la définition de Weierstrass; il est intéressant, au point de vue des applications, d'avoir constitué un tel corps de doctrine : si le symbole irrationnel introduit une grande homogénéité dans les démonstrations, il risque de masquer certains détails relatifs aux approximations, qui seules interviennent dans les applications de l'Analyse; ceci, d'ailleurs, est vrai encore du nombre rationnel, qui peut être considéré comme défini par une suite rationnelle. Je ne crois pas, d'autre part, que l'étudiant éprouve la moindre difficulté à s'assimiler les faits analytiques qui sont présentés avec une très grande clarté et une grande précision; quelques énoncés diffèrent de ceux que l'on est accoutumé à rencontrer; il est facile de rétablir l'accord en passant d'une conception à l'autre et, en tout cas, ce désaccord apparent n'offre aucun inconvénient dans les applications.

Digitized by Google

Radikiganto (1).	Indice.	Indice.	Wurzel-index.	Index.
Radika signo.	Radical (le signe).	Segno radicale.	Wurzelzeichen.	Radical sign.
Radiko duuma, ...	Racine deuxième...	Radice seconda, ...	Zweite, ... Wurzel.	Second, ... root.
Radiko kvadrata, kuba.	Racine carrée, cubique, ...	Radice quadrata, cubica, ...	Quadrat, kubik, ... Wurzel.	Square, cube, ... root.
Radikalo.	Radical (expression radicale).	Radicale.	Radikal, Wurzelausdruck.	Radical quantity.

FRAKCIOJ ORDINARAJ.

Frakcio (2).	Fraction quelconque.	Qualunque frazione.	Irgend ein Bruch.	Any fraction.
Partumo.	Fraction < 1.	Frazione < 1.	Echter Bruch.	Proper fraction.
Superpartumo.	Fraction > 1.	Frazione > 1.	Unechter Bruch	Improper fraction.
Partumnombro $\left(n + \frac{p}{q}\right)$.	Nombre fractionnaire.	Numero frazionarie.	Bruchzahl.	Fractional number.
Ono $\left(\frac{1}{n}\right)$.	Partie aliquote de l'unitě.	Unità frazionarie.	Gleicher Teil der Einheit.	Aliquot part of unity.
Onigi (*duonigi*, ...).	Diviser par un entier.	Dividere per uno intero.	Durch ein Ganzes dividieren.	Divide by an integer.
Numeratoro (3) aŭ *onigato.*	Numérateur	Numeratore	Zähler.	Numerator.
Denominatoro (3) aŭ *oniganto.*	Dénominateur.	Denominatore.	Nenner.	Denominator.

(1) Oni rezervas : *indico* por la ordaj signoj de kelkaj kvantoj kune konsiderataj (a_1, a_2, a_3). Al *radikiganto* respondas *radikigato.*

(2) Same en Algebro.

(3) Same por la frakciumoj kaj en Algebro.

La nombranto kaj la nomanto estas *ambaŭ terminoj.*

Digitized by Google

OPERACIOJ DE FRAKCIOJ.

Egalvalora.	Équivalent.	Equivalente	Gleichwertig.	Equivalent.
Reduki.	Réduire.	Riducere.	Reducieren.	Reduce.
Neredukebla.	Irréductible	Irriducibile	Irreduktibel	Irreductible
Plejsimpligi.	Réduire à sa plus simple expression.	Riducere alla sua più semplice espressione.	Voll reducieren.	Reduce to the simplest expression.
Alformigi en.	Convertir.	Convertire.	Verwandeln.	Convert.

DEKUMAJ (1) FRAKCIOJ KAJ NOMBROJ.

Dekuma aŭ *decimala frakcio.*	Fraction décimale.	Frazione decimala.	Decimalbruch.	Decimal fraction.
Dekuma aŭ *decimala nombro* (2).	Nombre décimal.	Numero decimale.	Decimalzahl.	Decimal.
Decimalo aŭ *postfiguro* (3).	Décimale, figure.	Decimale.	Decimale, Decimalstelle.	Figure, place.
Entjera parto aŭ *antaŭparto* (3).	Partie entière.	Parte intera.	Ganzer Teil.	Integer part.
Decimala parto aŭ *postparto* (3).	Partie décimale.	Parte decimale.	Decimaler Teil.	Decimal part.
Konverĝi.	Converger.	Convergere.	Sich nähern, konvergent sein	Converge.
Perioda.	Périodique.	Periodico.	Periodische	Periodic.

(1) *n-umaj*, se la bazo estas *n* (*n*-uma nombrado).
(2) Finata aŭ nefinata, perioda simple aŭ nesimple.
(3) Antaŭ aŭ post la *komo*.

(*Daŭrigota.*)

Digitized by Google

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 2. *SUPPLÉMENT.* Février 1904.

CHRONIQUE.

Il est décidé qu'on élèvera à Rome un monument commémoratif à l'éminent mathématicien **Luigi Cremona**, et l'on espère que toutes les nations voudront y contribuer. Les souscriptions doivent être envoyées à S[r] I. Sonzogno, place San Pietro in Vincoli, 5, à Rome.

★

Le Révérend **George Salmon**, directeur du Trinity College à Dublin et illustré par ses nombreuses publications mathématiques, est mort le 22 janvier à l'âge de 75 ans.

★

Programmes des cours pour le second semestre de 1904.

Université de Göttingen. — Équations différentielles; par le professeur F. Klein. — Théorie des fonctions, exercices sur la théorie des fonctions, la notion de nombre et la quadrature du cercle; par le professeur D. Hilbert. — Géométrie de la droite et de la sphère, mécanique du continu, exercices sur la théorie des fonctions (avec le professeur Hilbert); par le professeur H. Minkowski. — Calculs des assurances. théorie des probabilités, exercices sur les assurances et les probabilités; par le professeur M. Brendel. — Géométrie analytique, exercices de géométrie descriptive et de perspective; par le professeur F. Schilling. — Courbes et surfaces; par le D[r] E. Zermelo. — Calcul différentiel et intégral, exercices; par le D[r] O. Blumenthal.

Université d'Innsbrück. — Calcul différentiel et intégral des fonctions réelles (suite) avec exercices, théorie des fonctions des variables complexes d'après Cauchy et Weierstrass avec exercices; par le professeur Otto Stolz. — Éléments de la théorie des nombres, applications du calcul à la géométrie avec exercices; par le professeur K. Zindler.

Université de Königsberg. — Théorie des nombres; par le professeur Meyer. — Géométrie analytique; par le professeur Schœnflies. — Calcul différentiel; par le professeur Saalschütz. — Algèbre; par le D[r] T. Vahlen.

Université de Würzbourg. — Calcul intégral et exercices; par le professeur F. Prym. — Équations différentielles partielles, mécanique rationnelle; par le professeur F. Selling. — Applications du calcul à la théorie des courbes planes, géométrie analytique et synthétique des coniques, théorie des courbes et des surfaces gauches, théorie des fonctions elliptiques; par le professeur G. Rost.

Digitized by Google

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS PÉRIODIQUES RÉCENTS.

Atti della reale Accademia dei Lincei, Vol. XII, 2ᵉ semestre, nᵒ 4 à 12. — *Fubrini*. Ricerche gruppali sulle equazioni della dinamica.

Pascal. Sulle trasformazioni infinitesime che lesciano invariata una forma o un'equazione di differenziali totali.

Giambelli. Ordine della varietà rappresentata coll'annulare tutti i minori di dato ordine estratti da una data matrice di forme.

Ernesto Pascal. Il secondo dei problemi di riuzione per le forme differenziali di ordine pari. — *Pincherle*. Sulla sviluppabilita di una funzione in serie di fattoriali.

Ernesto Pascal. Il secondo problema di riduzione per le forme differenziali di ordine dispari, e ricerche complementari. — *Pincherle*. Sulle funzioni meromorfi. — *Burgalli*. Sull' inversione degl' integrali.

Bianchi. Sulle superficie a linee di curvatura isoterme. — *Bisconcini*. Sul problemi dei tre corpi. Condizioni d'urto di due di essi.

Burgalli. Sull' inversione degl' integrali definiti. — *Contarini*. Sul moto d'un sistema olonomo di corpi rigidi.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure (numéros d'avril à décembre 1903). — Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques (*suite*); par M. *C. Guichard*. — Les vibrations universelles de la matière; par M. *A. Korn*. — Application de la Géométrie cayleyenne à l'étude géométrique du déplacement d'un solide autour d'un point fixe (*suite*); par M. *Émile Cotton*. — Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques (*suite*); par M. *C. Guichard*. — Sur un cas particulier de l'équation différentielle de Monge; par M. *W. Kapteyn*. — Sur certaines surfaces algébriques dont les intégrales de différentielles totales sont algébrico-logarithmiques; par M. *Émile Picard*. — Détermination des surfaces de Joachimsthal à courbures principales liées par une relation; par M. *L. Raffy*.

Détermination des surfaces de Joachimstahl à courbures principales liées par une relation (*suite et fin*); par M. *L. Raffy*. — Sur la théorie des groupes continus; par M. *E. Vessiot*. — Sur les séries trigonométriques; par M. *H. Lebesgue*. — Sur les séries divergentes et les équations différentielles; par M. *Edmond Maillet*. — Sur les relations entre la théorie des intégrales doubles de seconde espèce et celle des intégrales de différentielles totales; par M. *Émile Picard*.

Journal de Mathématiques pures et appliquées (fascicule II, III et IV, 1903). — Sur l'intégration algébrique des équations linéaires et les périodes des intégrales abéliennes; par M. *H. Poincaré*. — Sur l'application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor; par M. *Ernst Lindelöf*. — Sur la fonction définie par une série de Maclaurin; par M. *Walter-B. Ford*.

Sur la stabilité et les petits mouvements des corps fluides; par M. *P. Duhem*.

Contribution à l'analyse arithmétique du continu; par M. *Émile Borel*. — Extrait d'une lettre de M. *Robert Pech* à M. *Jordan*. — Sur le nombre des classes de formes quadratiques binaires d'un discriminant positif fondamental; par M. *Lerch*. — Recherches sur les équations aux dérivées partielles; par M. *J. Le Roux*.

Digitized by Google

FRAKCIUMOJ.

Frakciumo $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$.	Rapport.	Rapporto.	Verhältnis.	Ratio.
Frakciumo inversa $\left(\frac{\nu}{\mu}\right)$.	Rapport inverse.	Rapporto rovesciato.	Umgekehrtes Verhältnis.	Inverse ratio.
Inverso $\left(\frac{1}{\nu}\right)$ (de nombro ν).	Inverse (d'un nombre).	Numero rovesciato.	Umgekehrte zahl.	Reciprocal.

OPERACIOJ MALLONGIGATAJ KAJ PROKSIMUMIGAJ.

Ekzakta (valoro).	Exact.	Esatto.	Genaŭ.	Exact.
Proksimuma (valoro).	Approché.	Approssimato.	Angenähert.	Approximate.
Proksimumiga (operacio).	Approximatif.	Approssimative.	Näherungs-.	Approximative.
Ekarto (1) (de du valoroj).	Écart, erreur.	Errore.	Fehler.	Fault.

NUMERAJ ESPRIMOJ KAJ RILATAĴOJ.

Esprimo.	Expression.	Expressione.	Ausdruck.	Expression.
Rilataĵo.	Relation.	Relazione.	Beziehung, Relation.	Relation.
Egalaĵo (Ekz: $a = b$).	Égalité (concrète).	Eguaglianza.	Gleichung.	Equality.
Neegalaĵo ($a \neq b$).	Inégalité (concrète).	Diseguaglianza.	Ungleichung.	Inequality.
Ambaŭ membroj.	Les deux membres.	Ambidue i membri.	Die beide Glieder.	The two members.
Proporcia.	Proportionnel.	Proporzionale.	Proportionnal.	Proportional.

(1) Absoluta au rilata. Ne eraro.

Digitized by Google

Proporcio.	Proportion.	Proporzione.	Proportion.	Proportion.
Inverse proporcia.	Inversement proportionnel.	Inversamente proporzionale.	Umgekehrt proportional.	Inversely proportional.
Inversa proporcio.	Proportion inverse.	Proporzione inversa.	Umgekehrte proportion.	Inverse proportion.

SERIOJ, INTERSEKVOJ KAJ PROGRESIOJ (1).

Serio (2).	Série.	Serie.	Reihe.	Series.
Glido.	Terme.	Termine.	Glied.	Term.
Intersekva.	Successif, consécutif.	Successive, consecutive.	Auf einander folgend.	Successive, consecutive.
Intersekvo (3).	Suite.	Successione.	Aufeinanderfolge.	Succession, set.
Indico (signo de la vico de glido).	Indice.	Indice.	Index, Stellenzeiger.	Index.
Progresio (4).	Progression.	Progressione.	Reihe.	Progression.
Raciono.	Raison.	Ragione.	Verhältnis.	Ratio.
Nombro natura, figurata, poligona, piramida.	Nombre naturel, figuré, polygonal, pyramidal.	Numero naturale, figurato, poligonale, piramidale.	» Natürliche, figurirte, polygonal-, pyramidal-zahl.	» Natural, figurate, polygonal, pyramidal, number.

(1) La *rajoj* (germane : Reihe), t. e. la sumijag) intersekvoj ($u_0 + u_1 + u_2 + \dots$) apartenas al la supera matematiko.

(2) Serio estas ordaĵo da glidoj laŭ unu dimensio (unudimensia ordaĵo, ekz^e : $a, b, c, \dots, h, k, l$) aŭ laŭ kelkaj dimensioj (ekz^e laŭ la dama tabulo : dudimensia serio).

(3) T. e. serio direktata (ekz^e : $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$); kontraŭa intersekvo : $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$; ambaŭintersekvo : $\dots a_{-2} a_{-1} a_0 a_1 a_2 \dots$

(4) T. e. unudimensia intersekvo, ekz^e aritmetika progresio aŭ geometria, de unua, dua, ..., vico.

(*Daŭrigota.*)

Digitized by Google

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 3. *SUPPLÉMENT.* Mars 1904.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS PÉRIODIQUES RÉCENTS.

Bulletin de la Société mathématique de France (fascicules II, III et IV, 1903). — Détermination explicite des surfaces qui présentent un réseau doublement cylindré; par M. *L. Raffy*. — Mémoire sur les couples actifs de permutations; par M. *D. André*. — Sur l'hypohermitien; par M. *L. Autonne*. — Sur une propriété des mouvements dus à une force centrale; par M. *C.-A. Laisant*.

Sur l'approximation des nombres réels par les nombres quadratiques; par M. *E. Borel*. — Sur la théorie des fonctions implicites; par M. *E. Goursat*. — Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces; par M. *L. Lecornu*. — Sur le problème des aires; par M. *H. Lebesgue*. — Sur les coefficients des développements en série de tang$x$, sécx, et d'autres fonctions; par M. *E. Estanave*. — Sur un problème mixte aux dérivées partielles; par M. *J. Hadamard*. — Sur l'existence des intégrales d'un système complet d'équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue; par M. *N. Saltykow*. — Comptes rendus des Séances (avril à juillet 1903).

Séparation analytique d'un système de rayons incidents et réfléchis; par M. *M. de Montcheuil*. — Propriétés géométriques des milieux continus; par M. *L. Lecornu*. — Sur quelques propriétés des matrices hypohermitiennes n-aires; par M. *L. Autonne*. — Quelques remarques sur les ensembles de droites ou de plans; par M. *E. Borel*. — Sur les intégrales de l'équation différentielle des coniques et leur interprétation géométrique; par M. *R. Perrin*. — Sur l'emploi simultané de lois de survie distinctes; par M. *A. Quiquet*. — Sur les équations différentielles du troisième ordre, qui admettent un groupe de transformations; par M. *A. Boulanger*. — Sur les surfaces à courbure positive; par M. *J. Hadamard*. — Comptes rendus des Séances (novembre et décembre 1903). — Table des matières.

Bulletin des Sciences mathématiques, numéros d'avril à décembre 1903. — Comptes rendus et Analyses : *Capelli* (*A.*). Istituzioni di Analisi algebrica. Tertia edizione con aggiunte delle Lezioni di Algebra complementare ad uso degli aspiranti alla licenza universitaria in scienze fisiche e matematiche. — *Heronis Alexandrini opera quæ supersunt omnia* (Vol. III). Herons von Alexandria Vermessungslehre und Dioptra, griechisch und deutsch von *Hermann Schöne*. — *Gino Loria*. Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. — *Muller* (*H.*). et *Hupe* (*A.*). Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen. — *Humbert*. Cours d'Analyse professé à l'École Polytechnique. Tome I : Calcul différentiel. Principes du Calcul intégral. Applications géométriques. — Mélanges : *La Chesnais* (*P.-G.*). La représentation proportionnelle. — Correspondance : Extrait d'une lettre de M. H. Poincaré. — Bulletin bibliographique. — Revue des publications académiques et périodiques.

Comptes rendus et Analyses : *Stolz* (*G.*) und *Gmeiner* (*J.-A.*). Theoretische Arithmetik. — *Vallée-Poussin* (*Ch. J. de la*). Cours d'Analyse infinité-


Digitized by Google

simale. — *Whitaker* (*E.-P.*). A Course of modern Analysis. — Compte rendu du deuxième Congrès international des Mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900. — *Freycinet* (*C. de*). De l'expérience en Géométrie. — Mélanges : *Staeckel* (*P.*). Sur la représentation sphérique des surfaces. — Bulletin bibliographique. — Revue des publications académiques et périodiques.

Comptes rendus et Analyses : *Czuber* (*E.*). Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik, Lebensversicherung. — *Kœnigsberger* (*L.*). Hermann von Helmholtz. — Mélanges : *Dolbnia* (*J.*). Recherche analytique sur la réduction des intégrales abéliennes. — Correspondance : Extrait d'une lettre de M. Mathias Lerch à M. Darboux. — Revue des publications académiques et périodiques.

Comptes rendus et Analyses : *Hensel* (*K.*) et *Landsberg* (*G.*). Theorie der algebraischen Functionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abel'sche Integrale. — Mélanges : *Mansion* (*P.*). Sur la représentation proportionnelle. — Revue des publications académiques et périodiques.

Comptes rendus et Analyses : *Jouffret* (*E.*). Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions. — *Burkhardt* (*H.*). Algebraische Analysis. — *Ljubowj Sapolski*. Ueber die Theorie der Relativ Abel'schen cubischen Zahlkörper. — *Rost* (Dr *Georg*). Theorie der Riemann'schen Theta-function. — Mélanges : *Lindelöf* (*Ernst*). — Sur la détermination de la croissance des fonctions entières définies par un développement de Taylor. — *Goursat* (*E.*). Sur quelques développements de $\frac{1}{1-x}$ en séries de polynomes. — Bulletin bibliographique. — Revue des publications académiques et périodiques.

Comptes rendus et Analyses : *Ferrers*. Mathematical Papers of the late Georges Green. — *Gernet*. Untersuchung zur Variationsrechnung. Ueber eine Methode in der Variationsrechnung. — Bulletin bibliographique. — Revue des publications académiques et périodiques.

Comptes rendus et Analyses : *Mach* (*Ernst*), La Mécanique, étude historique et critique de son développement. — Mélanges : *Saltykow* (*N.*). Sur les théorèmes de Jacobi et de Liouville. — Revue des publications académiques et périodiques.

Comptes rendus et Analyses : *Baire* (*R.*). Sur les fonctions de variables réelles. — *Zeuthen* (*H.-G.*). Forelæsninger over Mathematikens Historie, II-T. 16de og 17de Aarhundrede. — *Zeuthen* (*H.-G.*). Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. — Mélanges : *Dolbnia* (*J.*). De quelques points concernant la théorie de la transformation des fonctions elliptiques. — Bulletin bibliographique. — Revue des publications académiques et périodiques.

Comptes rendus et Analyses : *Lamé* (*G.*). Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie. — *D'Ocagne* (*M.*). Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie. — *Fouët* (*A.*). Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques (1re partie). — *Estanave* (*E.*). Essai sur la sommation de quelques séries trigonométriques. — *Rouché* et *Lévy*. Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs. — *Dassen* (*C.*). Étude sur les quantités mathématiques. Grandeurs dirigées. Quaternions. — *Laurent* (*H.*). Petit traité d'Économie politique mathématique. — *Borel* (*E.*). Leçons sur les fonctions méromorphes. — *Wœlfling* (*E.*). Mathematischer Bücherschatz. — *Bauer* (*G.*). Vorlesungen über Algebra. — *Stoffaes*. Cours de Mathématiques supérieures à l'usage des candidats à la licence ès sciences physiques. — *König* (*J.*). — Einleitung in der allgemeine Theorie der algebraischen Grössen. — Revue des publications académiques et périodiques.

Digitized by Google

Rekuranta.	Récurrent.	Ricorrente.	Rekurrierend, Rekursions-.	Recurrent.
Limo.	Limite (exacte).	Limite (esatta).	Grenze, Limes.	Limit.
Superlimo.	Limite supérieure.	Limite superiore.	Oberer Limes.	Superior limit.
Malsuperlimo.	Limite inférieure.	Limite inferiore.	Unterer Limes.	Inferior limit.

LOGARITMOJ KAJ ESPONENCIALOJ.

Logaritmo (1).	Logarithme.	Logaritmo.	Logarithmus.	Logarithm.
Esponencialo.	Nombre (d'un log.) antilogarithme.	Numero.	Numerus, Logarithmand.	Number (ot a logarithm).
Esponenciala.	Exponentiel.	Esponenziale.	Exponential-.	Exponential.
Sistemo (2) *dekuma, e-uma, ...*	Système décimal, naturel, ...	Sistema. a base 10, a base *e*.	System der Basis 10, der Basis *e*.	System to the base 10, the base *e*.
Bazo.	Base.	Base.	Basis.	Base.
Modulo.	Module.	Modulo.	Modul.	Module.
Mantiso.	Mantisse.	Mantissa.	Mantisse.	Mantissa.
Karakteristiko.	Caractéristique.	Caratteristica.	Charakteristik.	Characteristic.

(1) Adicilogaritmo, subtraho-aŭ ordinara logaritmo.
(2) Oni ĉiam uzadu nur la bazon, por difini la sistemon.

METROSISTEMO.

(DEKUMA METRA SISTEMO DA MEZUROJ).

GEOMETRIAJ KAJ MEKANIKAJ ĜENERALAĴOJ.

Punkto.	Point.	Punto.	Punkt.	Point.
Linio.	Ligne.	Linea.	Linie.	Line.
Surfaso.	Surface.	Superficie.	Fläche.	Surface.
Solido (nepezaĵo).	Solide, corps (géométrique).	Solide.	Körper.	Solid.
Korpo (pezaĵo).	Grave, corps (grave).	Corpo.	Körper (schwer).	Body.
Amplekso.	Étendue.	Estensione.	Ausdehnung.	Extent.
Longo (1).	Longueur.	Lunghezza.	Länge.	Length.
Areo (2).	Aire (grandeur), superficie.	Superficie.	Area, Flächeninhalt.	Area.
Volumeno.	Volume.	Volume.	Volumen.	Volume.
Pezo.	Poids.	Peso.	Gewicht.	Weight.
Dimensio.	Dimension.	Dimensione.	Dimension.	Dimension.
Latero (3).	Côté.	Lato.	Seite.	Side.
Eĝo.	Arête.	Spigolo.	Kante.	Edge.

(1) Ekz[e] : *ducent kilometroj da longo.*

(2)	*Areaĵo.*	Aire (portion de surface).	Superficie.	Areal.	Inside.

(3) Devenantaj vortoj : *trilatero, kvarlatero,* k. c.

(*Daŭrigota.*)

Digitized by Google

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 4. *SUPPLÉMENT.* JUIN 1904.

CHRONIQUE.

Le Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts,

Vu la résolution adoptée par la Chambre des députés le 14 février 1902 et l'ordre du jour voté par le Sénat le 10 juillet 1902;
Vu la loi du 27 février 1880;
Vu la loi du 10 juillet 1896;
Vu le décret du 21 juin 1897;
Le Conseil supérieur de l'Instruction publique entendu,

Arrête :

ARTICLE PREMIER. — Il est institué dans les Facultés des Sciences des Universités :

Un diplôme d'études supérieures de Mathématiques;
Un diplôme d'études supérieures de Sciences physiques;
Un diplôme d'études supérieures de Sciences naturelles.

ART. 2. — Les candidats aux diplômes d'études supérieures prévus à l'article premier doivent satisfaire aux épreuves suivantes :

I. — *Diplôme d'études supérieures de Mathématiques.*

a. Composition d'un travail écrit sur un sujet agréé par la Faculté;
b. Interrogation sur ce travail et sur des questions données trois mois au moins à l'avance et se rapportant à la même partie des Mathématiques.

Le travail peut consister soit en recherches originales, soit dans l'exposé partiel ou total d'un Mémoire ou d'un cours d'ordre supérieur. Dans ce dernier cas, par *exposé*, on doit entendre soit le résumé simplifié du Mémoire ou du Cours, soit le développement détaillé de résultats ou de méthodes que l'auteur ou le professeur n'a fait qu'indiquer.

Est tenu pour équivalent du diplôme d'études supérieures de Mathématiques un des certificats suivants délivrés en conformité du décret du 22 janvier 1896 sur la licence ès sciences : Géométrie supérieure, Analyse supérieure, Physique mathématique, Mécanique céleste, Mécanique physique et expérimentale.

II. — *Diplôme d'études supérieures de Sciences physiques.*

a. Composition d'un travail exposant les résultats des expériences faites par le candidat sur un sujet de Physique, de Chimie ou de Minéralogie, choisi par lui et agréé par la Faculté;
b. Interrogation sur ce travail et sur des questions données trois mois



au moins à l'avance et se rapportant à la même partie des Sciences physiques.

Le travail peut consister soit en recherches originales, soit dans l'étude d'un Mémoire, avec reproduction et vérification des expériences, soit dans une étude étendue sur une question de Physique mathématique.

Est tenu pour équivalent du diplôme d'études supérieures de Sciences physiques le certificat d'études supérieures de Physique appliquée.

III. — *Diplôme d'études supérieures de Sciences naturelles.*

a. Composition d'un travail exposant les résultats des expériences ou observations faites par le candidat sur un sujet de Biologie, de Physiologie générale, de Zoologie, de Botanique ou de Géologie, choisi par lui et agréé par la Faculté;

b. Interrogation sur ce travail et sur des questions données trois mois au moins à l'avance et se rapportant à la même partie des Sciences naturelles.

Le travail peut consister soit en recherches originales, soit dans l'étude d'un Mémoire, avec reproduction et vérification des expériences ou observations.

Fait à Paris, le 18 juin 1904. J. Chaumié.

*

Le **Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts,**

Vu la proposition approuvée par la Chambre des députés (résolution en date du 14 février 1902) et par le Sénat (ordre du jour voté le 10 juillet 1902), et ainsi conçue :

« Le titre d'agrégé sera conféré, comme il se fait déjà pour l'agrégation d'Histoire, d'après les résultats de deux catégories d'épreuves : des épreuves scientifiques subies devant les Facultés et l'École Normale, des épreuves professionnelles subies devant les jurys nommés par le Ministre.

» Les candidats feront un stage dans un lycée »;

Vu le statut du 29 juillet 1885 sur l'agrégation;

Vu les arrêtés des 28 juillet 1894, 31 juillet 1896, 16, 18 et 19 janvier 1897, 16 et 17 juillet 1897, 5 août 1898, 24 août 1900 et 3 janvier 1901, relatifs aux divers ordres d'agrégations des lycées;

Vu les arrêtés du 18 juin 1904 instituant des diplômes d'études supérieures dans les Facultés des Sciences et des Lettres des Universités;

Vu la loi du 27 février 1880;

Le Conseil supérieur de l'Instruction publique entendu,

Arrête :

Article premier. — Tout candidat au titre d'agrégé doit produire un certificat du recteur constatant qu'il a satisfait au stage dans les conditions déterminées par les règlements.

Art. 2. — Les autres conditions imposées aux candidats, ainsi que les épreuves du concours dans chaque ordre d'agrégation, sont fixées comme

Digitized by Google

il suit :

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES.

Conditions préalables :

1° Trois certificats de licence : Calcul différentiel et intégral, Mécanique rationnelle, Physique générale;
2° Diplôme d'études supérieures de Mathématiques.

Épreuves d'agrégation.

Épreuves préparatoires :

Deux compositions (problèmes), l'une sur le Calcul différentiel et intégral, l'autre sur la Mécanique. — Durée de chaque composition : 7 heures.

Deux compositions (problèmes) sur les matières du programme des lycées, l'une sur les Mathématiques spéciales, l'autre sur les Mathématiques élémentaires. L'une de ces compositions au moins comporte une application numérique. — Durée de chacune : 7 heures.

Épreuves définitives :

a. Une épreuve de Géométrie descriptive;
b. Un calcul numérique.
La durée de chacune de ces épreuves est fixée par le jury;
c. Une leçon de Mathématiques spéciales après 4 heures de préparation surveillée;
d. Une leçon sur un sujet tiré du programme des classes de seconde, de première (sections C et D) et de Mathématiques, après 4 heures de préparation surveillée.
Les parties des programmes d'où sera tiré le sujet de cette leçon sont indiquées un an à l'avance.

Art. 3. — Les différents programmes prévus aux présents statuts sont arrêtés par le Ministre de l'Instruction publique, sur la proposition des jurys d'agrégation et après avis de la Section permanente du Conseil supérieur de l'Instruction publique.

Art. 4. — Les candidats à l'agrégation pourvus du grade de docteur ès lettres ou de docteur ès sciences, correspondant à l'agrégation à laquelle ils se présentent, sont dispensés du diplôme d'études supérieures.

Art. 5. — Les dispositions du présent statut sont applicables :

Pour l'agrégation d'Histoire et de Géographie dès l'année 1905, sauf en ce qui concerne le certificat de stage qui ne sera exigible qu'à partir de 1907;

Pour les autres agrégations à partir de l'année 1907.

Art. 6. — *Disposition transitoire.* — Les candidats qui se seront présentés au concours avant 1907 seront dispensés, sauf à l'agrégation d'Histoire et de Géographie, de produire le diplôme d'études supérieures.

Art. 7. — Sont abrogées les dispositions antérieures contraires à celles du présent arrêté.

Fait à Paris, le 18 juin 1904. J. Chaumié.


Digitized by Google

Denso.	Densité.	Densità.	Dichtigkeit.	Density.

INTERRESPONDAJ ĈEFAJ UNUOJ.

Linia metro, kvadrata metro, kuba metro, tonelo.

Tonelo (¹) (metra).	Tonne (métrique).	Tonnellata.	Tonne (Gewicht).	Ton.

OBLIGAJ PREFIKSOJ.

Mega (²), *miria, kilo, hekto, dek* (*a*).

ONIGAJ PREFIKSOJ.

Deci, centi, mili, decimili, centimili, mikro (²).

MEZURILOJ.

Metrilo, dumetrilo, duonmetrilo, dekmetrilo, ..

KOMBINATORIKO (sciencο de la ordaĵoj).

Kombinatoriko.	Combinatoire (analyse).	Analisi combinatoria.	Kombinatorik.	
Ordaĵo (³).	Disposition en ordre.	Disposizione.	Anordnung.	Order.
Permuti.	Permuter.		Permutieren.	To exchange.
Permutaĵo.	Permutation.	Permutazione.	Permutation.	Permutation.
Faktorialo : m!	Factorielle.	Fattoriale.	Faktorielle.	Factorial.
Kunŝanĝi (cikle (⁴) aŭ alie).	Échanger (permuter).	Scambiare.	Vertauschen (permutieren).	To exchange.
Renverso (de du indicoj).	Inversion.	Spostamento.	Vertauschung.	Inversion.

(¹) T. e. mil kilogramoj (*megagramo*). La *martonelo,* pri la ŝipoj, respondas al 1026 *kilogramoj.*

(²) De la internacia sistemo C.G.S. de la elektristoj : *mega* obligas kaj *mikro* onigas per 10^6.

(³) Ripeta aŭ neripeta. Linia (rekta, cirkola, ...), dudimensia.

(⁴) *Ciklo* estas cirkolo aŭ rondo *direktata.*

(*Daŭrigota.*)

Digitized by Google

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 5. *SUPPLÉMENT.* SEPTEMBRE 1904.

CHRONIQUE.

Programme de la classe de Mathématiques spéciales.

(*Extrait du « Journal officiel » du 27 juillet* 1904.)

MATHÉMATIQUES.

I. — Algèbre et analyse.

Nombres incommensurables. — Notion de coupure.

Division des polynomes entiers. — Plus grand commun diviseur de deux polynomes. — La condition nécessaire et suffisante pour que deux polynomes $f(x)$ et $g(x)$ de degrés respectifs p et q aient un diviseur commun de degré n est qu'il existe deux polynomes A et B de degrés respectifs pn et qn tels que l'on ait

$$A\,g(x) + B\,f(x) = 0.$$

Arrangements, permutations, combinaisons sans répétition.
Formule du binome dans le cas de l'exposant entier et positif.

Calcul des valeurs arithmétiques des radicaux. — Exposants fractionnaires et négatifs. (On réservera pour la définition de a^x le cas de l'exposant incommensurable.)

Déterminants. — Définition, développement suivant les éléments d'une même ligne. — Échange des lignes avec les colonnes. — Permutation de deux colonnes ou de deux lignes. — Addition de lignes ou de colonnes. — Produit de deux déterminants. — Résolution d'un système d'équations linéaires [1].

Formes linéaires et homogènes à deux, trois ou quatre variables. — Conditions d'indépendance.

Nombres complexes. — Formule de Moivre.

Séries. — Séries à termes positifs : caractères de convergence ou de divergence tirés de l'étude des expressions $\frac{u_n+1}{u_n}$, $\sqrt[n]{u_n}$, $n^p u_n$. — Séries absolument convergentes. — Convergence des séries à termes alterna-

[1] Les élèves devront être exercés à la résolution des équations numériques sans employer les déterminants.

Digitized by Google

tivement positifs et négatifs dont le terme général décroît constamment en valeur absolue et tend vers zéro.

Exemples numériques.

Fonctions. — Fonctions d'une variable réelle, représentation graphique, continuité. — Définition et continuité de la fonction exponentielle et de la fonction logarithmique. Limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ quand m grandit indéfiniment en valeur absolue. — Dérivée d'une fonction : pente de la courbe représentative. — Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une puissance entière, d'une fonction de fonction. — Dérivées des fonctions circulaires directes et inverses. — Dérivées de a^x et de $\log x$ (logarithmes vulgaires et logarithmes népériens). — Usage des tables de logarithmes et de la règle à calcul.

Théorème de Rolle, formule des accroissements finis, représentation graphique.

Fonctions de plusieurs variables indépendantes, dérivées partielles, formule des accroissements finis. — Dérivée d'une fonction composée. — Dérivée d'une fonction implicite. (On admettra sans démonstration l'existence de cette fonction et de sa dérivée.)

Emploi de la dérivée pour l'étude de la variation d'une fonction : maxima et minima.

Fonctions primitives d'une fonction donnée, leur représentation par l'aire d'une courbe.

Fonction définie par une série entière en x à coefficients réels. — Intervalle de convergence. — Addition et multiplication. — A l'intérieur de l'intervalle de convergence, on obtient la dérivée ou les fonctions primitives de la fonction en prenant la série des dérivées ou des fonctions primitives. (On ne s'occupera pas de ce qui se passe aux extrémités de l'intervalle.)

Exemples : Développements en série de $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x^2}$, arc tang x, $L(1-x)$, $L\frac{1-x}{1+x}$. — Série exponentielle, série du binome; les équations $y'=y$ et $y'(1+x)=my$ permettent de déterminer les sommes de ces deux séries. — Développements en série de a^x; arc sin x.

Formules de Mac Laurin et de Taylor

$$f(a+z)=f(a)+\frac{x}{1}f'(a)+\frac{x^2}{1.2}f''(a)+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(a+\theta x).$$

Développements en série de $\sin x$ et de $\cos x$.

Application de la formule de Taylor à l'étude du quotient de deux fonctions de x dans le voisinage d'une valeur donnée de x: cas où les deux fonctions de x s'annulent pour cette valeur. — Diverses formes d'indétermination,

Croissances de e^x et Lx comparées à celle de x^m. Application à la recherche de la limite de $\frac{e^x}{x^m}$ pour x infini et de $x^m Lx$ pour $x=0$.

Digitized by Google

Fonctions e^z, $\cos z$, $\sin z$ pour z complexe. — Égalités :

$$e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}, \qquad e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Sinus et cosinus hyperboliques, leurs relations avec le sinus et le cosinus ordinaires.

Propriétés générales des équations algébriques. — Nombre des racines d'une équation. — Relations entre les coefficients et les racines. — Toute fonction rationnelle et symétrique des racines s'exprime rationnellement en fonction des coefficients. — Élimination d'une inconnue entre deux équations au moyen des fonctions symétriques.

Propriétés spéciales des équations à coefficients réels. — Racines imaginaires conjuguées. — Indications que fournissent les signes des résultats de la substitution de deux nombres réels.

Conditions pour qu'une équation ait des racines égales. — Recherche des racines commensurables.

Théorème de Descartes.

Infiniment petits. — Infiniment petits équivalents. — Ordre relatif de deux infiniment petits. — Valeur principale. — Exemples.

Différentielle première d'une fonction d'une variable.

Différentielle totale d'une fonction $f(x, y, \ldots)$ définie par la formule

$$df = f'_x\, dx + f'_y\, dy + \ldots.$$

Transformation de cette expression lorsqu'on remplace x, y, ... par des fonctions d'autres variables.

Intégrales. — L'aire d'un segment de courbe est la limite de la somme des rectangles inscrits; emploi des symboles

$$\int f(x)\, dx, \qquad \int_a^b f(x)\, dx.$$

Valeur moyenne d'une fonction dans un intervalle. — Changement de la variable. — Intégration par parties.

Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples. — Intégration des différentielles rationnelles en x et de celles qui s'y ramènent.

Application des quadratures à la rectification des courbes, au calcul d'un volume décomposé en tranches par des plans parallèles, à l'évaluation de l'aire d'une surface de révolution et au calcul des moments d'inertie du cylindre de révolution, de la sphère, et du parallélépipède par rapport à leurs axes de symétrie. — Aires et volumes des solides de la géométrie élémentaire.

Intégration des équations différentielles du premier ordre :

1° Dans le cas où les variables se séparent immédiatement;
2° Dans le cas où l'équation est linéaire.

Intégration de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre; cas où le second membre est un polynome ou une somme d'exponentielles de la forme Ae^{ax}.

Digitized by Google

Résolution numérique des équations algébriques ou transcendantes. — Méthode d'approximation de Newton et méthode des parties proportionnelles établies par des considérations géométriques. — Extension de la méthode de Newton à la résolution numérique de deux équations simultanées que l'on remplacera par deux équations linéaires approchées.

Calcul approché d'une intégrale définie par la méthode des trapèzes.

II. — Trigonométrie.

Fonctions circulaires. — Angles correspondant à une fonction circulaire.

Théorème des projections.

Relations entre les fonctions circulaires d'un même angle. — Formules relatives à l'addition, à la soustraction, à la multiplication et à la division des angles.

Divisions sexagésimale et centésimale de la circonférence. (On fera usage de tables trigonométriques centésimales à cinq décimales.)

Résolution des triangles rectilignes.

Résolution trigonométrique de l'équation binome.

Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

(*A suivre.*)

Digitized by Google

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 6. *SUPPLÉMENT.* Octobre 1904.

CHRONIQUE.

Les **candidats à l'École Polytechnique** sont informés que le programme des connaissances exigées pour le concours d'admission en 1905 (Mathématiques, Physique et Chimie) est celui de la classe des Mathématiques spéciales des lycées, arrêté le 26 juillet 1904 par M. le Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts, et inséré au numéro du 27 juillet du *Journal officiel de la République française.*

★

Programme de la classe de Mathématiques spéciales,

(*Extrait du « Journal officiel » du 27 juillet* 1904.)

(SUITE.)

III. — Géométrie analytique.

1° Géométrie plane. — Constructions d'expressions algébriques. — Homogénéité.

Coordonnées rectilignes. — Représentation d'une ligne par une équation. — Formules de transformation des coordonnées rectilignes. Ordre d'une courbe algébrique. Distance de deux points.

Ligne droite. — Équation de la ligne droite. Problèmes simples relatifs à sa détermination. — Formules donnant la distance d'un point à une droite et la tangente de l'angle de deux droites, en supposant les axes rectangulaires. Applications. — Notions succinctes sur les points à l'infini au moyen des coordonnées homogènes et sur les éléments imaginaires. — Relation homographique; relation involutive; rapport anharmonique de quatre points en ligne droite et de quatre droites appartenant à un même faisceau linéaire.

Cercle. — Lieux géométriques.

Courbes dont l'équation est résolue ou résoluble par rapport à l'une des coordonnées. Tracé. — Équation de la tangente en un point; sous-tangente. — Normale; sous-normale. — Concavité; convexité; points d'inflexion. — Asymptotes. — Application à des exemples simples et en particulier à des coniques et à des courbes dont l'équation est du second degré par rapport à l'une des coordonnées.

Courbes définies par l'expression des coordonnées d'un de leurs points en fonction d'un paramètre. — Tracé. — Exemples numé-



riques. — Les courbes du second ordre et celles du troisième ordre à point double sont unicursales.

Courbes définies par une équation implicite. — Équation de la tangente et de la normale en un point. — Tangentes à l'origine dans le cas où l'origine est un point simple ou un point double. Recherche des asymptotes sur des exemples *numériques* de courbes du second et du troisième ordre.

Courbure. Enveloppes. Développées. — Intersection d'une courbe algébrique donnée, définie par une équation entière et homogène : $f(x, y, z) = 0$, avec une droite arbitraire menée par un point quelconque donné sur cette courbe; point simple; tangente en ce point. Cas particulier où le point est rejeté à l'infini : asymptote définie comme tangente à la courbe en ce point.

Courbes du second ordre. — Division en trois genres d'après la nature des points à l'infini; asymptotes. — Établir les différentes formes réduites que peut prendre l'équation d'une conique en appliquant la méthode de décomposition en carrés à des exemples numériques; figurations géométriques correspondantes. — Condition pour que deux points soient conjugués par rapport à une conique; polaire d'un point. — Condition pour que deux droites soient conjuguées; pôle d'une droite.

Centres; diamètres; directions conjuguées; diamètres conjugués. — Directions principales et axes de symétrie en supposant les coordonnées rectangulaires. — Recherche des formes réduites; calcul des coefficients des formes réduites dans le cas où les coordonnées sont rectangulaires.

Foyers d'une courbe du second ordre. — Directrices. — Excentricité. — Paramètre. — Recherche des foyers et des directrices sur les équations réduites en coordonnées rectangulaires.

Équation trinome : $y^2 = 2px + qx^2$, commune aux trois courbes du second ordre.

Étude des courbes du second ordre sur les équations réduites. — Intersection avec une droite; condition de contact; problèmes simples relatifs aux tangentes. — Propriétés focales et tracés qui en résultent; tangente et normale. — Questions relatives à l'ellipse et à l'hyperbole: diamètres; cordes supplémentaires; diamètres conjugués; théorèmes d'Apollonius. Tracés spéciaux pour l'ellipse considérée comme projection orthogonale du cercle. — Propriétés spéciales de l'hyperbole relativement aux asymptotes. — Propriétés spéciales de la parabole relativement aux diamètres, à la sous-tangente et à la sous-normale.

Homothétie : *Rapport anharmonique de quatre points ou de quatre tangentes sur une conique.* — Divisions homographiques et divisions en involution sur une conique.

Deux coniques ont, en général, quatre points communs réels ou imaginaires à distance finie ou infinie. — Notions succinctes sur les coniques appartenant au faisceau linéaire ponctuel défini par deux coniques

Digitized by Google

données; les coniques de ce faisceau découpent sur une droite quelconque deux divisions en involution.

Coordonnées polaires. — Leur transformation en coordonnées rectilignes.

Équation de la ligne droite.

Construction des courbes; tangentes. — Asymptotes. — Applications (on se bornera au cas où l'équation est résolue par rapport au rayon vecteur). — Cas des coniques.

2° Géométrie dans l'espace : *Coordonnées rectilignes.* — Représentation d'une surface par une équation; représentation d'une ligne par deux équations simultanées. — Formule qui donne le cosinus de l'angle de deux directions en supposant les coordonnées rectangulaires. — Formules de transformation des coordonnées rectilignes; formules d'Euler. — Ordre d'une surface algébrique. — Distance de deux points.

Ligne droite et plan. — Équation du plan; équations de la droite. — Problèmes simples relatifs à leur détermination et à leurs intersections.

Formules donnant le cosinus de l'angle de deux droites ou de deux plans; la distance d'un point à un plan, d'un point à une droite et la plus courte distance de deux droites, en supposant les axes rectangulaires. — Applications. — Notions succinctes sur les points à l'infini à l'aide des coordonnées homogènes et sur les éléments imaginaires. — Rapport anharmonique de quatre plans appartenant à un même faisceau linéaire.

Sphère. — (Coordonnées rectangulaires.)

Courbes gauches. — Tangente. — Plan osculateur. — Courbure. — Applications à l'hélice circulaire.

Surfaces en général. — Plan tangent; normale. Marche à suivre pour trouver l'équation d'une surface définie géométriquement. Application aux cylindres, aux cônes et aux surfaces de révolution.

Surfaces du second ordre. — Intersection d'une surface du second ordre donnée avec une droite arbitraire menée par un point quelconque donné sur cette surface; point simple; plan tangent en ce point; son intersection avec la surface. — Cas où le point est à l'infini; plan asymptote défini comme plan tangent en ce point. — Classification des surfaces du second ordre d'après la nature des points à l'infini.

Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface du second ordre possède un ou plusieurs points doubles à distance finie ou infinie.

Établir les différentes formes réduites que peut prendre l'équation d'une surface du second degré en appliquant la méthode de décomposition en carrés à des exemples numériques; formes géométriques des surfaces correspondantes. — Condition pour que deux points soient conjugués par rapport à une surface du second ordre; plan polaire d'un point. — Condition pour que deux plans soient conjugués; pôle d'un plan. — Droites conjuguées. — Centres; plans diamétraux; directions

Digitized by Google

conjuguées; diamètres, diamètres conjugués. (Toutes les discussions relatives à la distribution des plans asymptotes, des centres, des plans diamétraux et des diamètres seront faites sur les formes réduites.)

Démontrer que dans toute surface du second ordre il existe au moins trois directions conjuguées rectangulaires (en coordonnées rectangulaires); calcul des coefficients des carrés des variables lorsqu'on prend des axes parallèles à ces directions; calcul des autres coefficients des formes réduites par la translation de ces axes.

Homothétie : *Étude des surfaces du second ordre sur les équations réduites.* — Condition de contact d'un plan avec la surface; problèmes simples relatifs aux plans tangents. — Normale. — Propriétés des diamètres conjugués; théorèmes d'Apollonius pour l'ellipsoïde et les hyperboloïdes. — Sections circulaires. — Génératrices rectilignes. — Les surfaces du second ordre sont unicursales.

Variation de la courbure des sections normales en un point simple d'une surface (on supposera le point à l'origine et la surface tangente au plan xOy). — Indicatrice. — Courbure d'une section plane quelconque au même point. — Théorème de Meusnier. — Surfaces convexes, surfaces à courbures opposées en un point.

(*A suivre.*)

*

Sadi Carnot (Nicolas-Léonard), fils aîné de Lazare Carnot, est né le 1er juin 1796 et a été enlevé à la Science dans le plein exercice de ses puissantes facultés. Il avait 36 ans quand il succomba à une atteinte de l'épidémie cholérique de 1832.

Fondateur de la Théorie mécanique de la chaleur, son Mémoire aujourd'hui si célèbre, intitulé *Réflexions sur la puissance motrice du feu*, était à peine connu quand il est mort. Dans cette œuvre, qui remonte à 1824, c'est-à-dire à une époque où rien dans le passé ne permettait de pressentir l'avènement d'une science nouvelle, Sadi Carnot a, en moins de 60 pages, établi et développé ce que nous appelons aujourd'hui le *second principe de la Thermodynamique* ou *principe de Carnot*. Quant au premier, celui de la conservation de l'énergie, il l'a connu aussi avant la fin de sa vie. Ses papiers posthumes, publiés en 1878, nous l'ont appris, trop tard malheureusement pour lui en laisser la gloire exclusive devant la postérité.

Digitized by Google

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 7. *SUPPLÉMENT.* Novembre 1904.

CHRONIQUE.

Programme de la classe de Mathématiques spéciales.

(*Extrait du « Journal officiel » du 27 juillet* 1904.)

(SUITE ET FIN.)

IV. — Mécanique.

Cinématique du point. — Mouvement rectiligne d'un point. — Relativité du mouvement. — Vitesse, accélération. — Mouvement uniforme, uniformément varié, vibratoire simple.

Mouvement curviligne. — Vitesse. — Hodographe. — Vecteur accélération.

Accélérations tangentielle et centripète. — Diagrammes des espaces, des vitesses, des accélérations tangentielles.

Mouvement rapporté à des axes de coordonnées rectangulaires ou obliques et à des coordonnées semi-polaires.

Cinématique d'un système invariable. — Translation. — Rotation autour d'un axe fixe. — Mouvement hélicoïdal.

Changement du système de comparaison. — Composition des vitesses; composition des accélérations bornée au cas où le mouvement du système de comparaison est un mouvement de translation.

Dynamique : I. *Point matériel libre.* — Principe de l'inertie. — Définition de la force et de la masse ([1]). — Relation entre la masse et le poids. — Invariabilité de la masse. — Unités fondamentales. — Unités dérivées. — Mouvement d'un point sous l'action d'une force constante en grandeur et en direction ou sous l'action d'une forme issue d'un centre fixe : 1° proportionnelle à la distance; 2° en raison inverse du carré de la distance.

Composition des forces appliquées à un point matériel ([2]).

([1]) On admettra qu'une force appliquée à un point matériel est égale géométriquement au produit de la masse du point par l'accélération qu'elle lui imprime.

([2]) On admettra que, si plusieurs forces agissent sur un point, l'accélération qu'elles lui impriment est la somme géométrique des accélérations que chacune d'elles lui imprimerait si elle agissait seule.

Digitized by Google

Travail d'une force, travail de la résultante de plusieurs forces, travail d'une force pour un déplacement résultant. — Théorème de la force vive. — Surfaces de niveau. — Champs et lignes de force. — Énergie cinétique et énergie potentielle d'un point placé dans un champ de force.

II. *Point matériel non libre.* — Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné avec et sans frottement, la vitesse initiale étant dirigée suivant une ligne de plus grande pente. — Pression totale sur le plan; réaction du plan. — Petites oscillations d'un pendule simple sans frottement; isochronisme.

Homogénéité. — Dimensions d'une vitesse, d'une accélération, d'une force, d'un travail, d'une quantité de mouvement, d'une force vive.

STATIQUE : *Statique du point.* — Équilibre d'un point matériel libre, d'un point matériel assujetti à rester sur une courbe fixe ou sur une surface fixe, avec ou sans frottement.

Moments. — Moment vectoriel par rapport à un point. — Moment par rapport à un axe.

Statique des systèmes de points matériels. — Démontrer qu'il existe six conditions nécessaires d'équilibre indépendantes des forces intérieures. — Démontrer que, pour les systèmes invariables, ces six conditions sont suffisantes. Cas particuliers.

Équivalence de deux systèmes de forces appliquées à un corps solide. — Application à la réduction d'un système de forces. — Composition des couples. — Centre des forces parallèles; centre de gravité; moments des forces parallèles par rapport à un plan.

Équilibre d'un solide invariable qui n'est pas libre. — Cas d'un point fixe, d'un axe fixe avec ou sans glissement le long de cet axe, de un, deux ou trois points de contact avec un plan fixe. — Réactions.

Machines simples. — Levier, poulie fixe avec ou sans frottement; bascule, treuil, cabestan, poulie mobile, moufle sans frottement.

Vérifier sur chacune de ces machines que, pour un déplacement élémentaire à partir d'une position d'équilibre, la somme algébrique des travaux élémentaires de la puissance et de la résistance est nulle, si l'on fait abstraction du frottement.

V. — *Géométrie descriptive.*

Problèmes sur la droite et le plan.

Représentation et intersection de prismes et de pyramides.

Sphère. — Section plane. — Intersection avec une droite. — Plan tangent; cône circonscrit; ombres.

Résolution des trièdres.

Cônes et cylindres. — Plans tangents; contours apparents et ombres. — Intersection avec une droite. — Sections planes. — Développement.

Digitized by Google

Surfaces de révolution. — Plans tangents; contours apparents et ombres. — Sections planes. — Intersection avec une droite.

Surfaces réglées du second ordre. — Hyperboloïde de révolution et paraboloïde hyperbolique. — Mode de génération. — Intersection avec une droite.

Plans tangents; contours apparents et ombres. — Sections planes.

Intersections de surfaces. — Deux cônes ou cylindres, cône ou cylindre, et surface de révolution; deux surfaces de révolution dont les axes sont dans un même plan.

Projections cotées. — Problèmes sur la droite et le plan. — Surfaces topographiques — Lignes de niveau et de plus grande pente; ligne d'égale pente; sommet; fond; col; ligne de faîte; ligne de thalweg.

Sections planes; profils; intersection avec une droite. Intersection de deux surfaces

Applications de géométrie projective. (Prog. de math. I.)

Plan du tableau. — Perspective d'un point, d'une droite, d'une ligne.

Rapport anharmonique de quatre points en ligne droite. — Sa conservation par projections. — Rapport harmonique.

Point de fuite d'une droite. — Perspective de deux droites parallèles. — Ligne de fuite d'un plan. — Conception de la droite de l'infini d'un plan.

Nota. — Le professeur de géométrie descriptive devra se servir des notions de géométrie projective qui figurent au programme de géométrie analytique.

*

Médaille Guccia.

A l'occasion du IVe Congrès international des Mathématiciens, qui se tiendra à Rome en l'année 1908, le *Circolo Matematico di Palermo* décernera un prix international de Géométrie. Ce prix, qui sera appelé *Médaille Guccia* (du nom de son fondateur), consistera en une petite médaille portative en or et une somme de 3000^{fr}.

On sait que, depuis les travaux auxquels a donné lieu le Prix Steiner décerné en 1882, la théorie des courbes gauches algébriques a été plutôt délaissée, et que même les grands progrès de la Géométrie moderne, obtenus par les méthodes synthétiques, ou algébriques, ou fonctionnelles, ont laissé de côté cette théorie; de sorte que les questions fondamentales, que l'on avait abordées dans les travaux cités, et d'autres questions encore qu'on pourrait se poser, n'ont pas fait l'objet de travaux ultérieurs. Si d'ailleurs on passe de l'espace ordinaire aux espaces supérieurs, on rencontre pour les courbes algébriques (en particulier

Digitized by Google

pour leur classification, pour l'étude des courbes canoniques de genre donné, etc.) une foule de questions importantes dont personne encore ne s'est occupé. D'autre part, l'on connaît bien peu de propositions sur les courbes gauches algébriques obtenues en se limitant au champ réel, ou bien à un champ rationnel donné.

C'est en s'inspirant de ces considérations (mais sans vouloir d'ailleurs limiter d'avance, en aucune manière, les problèmes et les méthodes de recherche) que le *Circolo Matematico di Palermo,* conformément aux intentions du fondateur du prix, décernera la ***Médaille Guccia*** à un ***Mémoire qui fera faire un progrès essentiel à la Théorie des courbes gauches algébriques.***

Dans le cas où, parmi les travaux envoyés au concours, aucun Mémoire relatif à la Théorie ci-dessus ne serait trouvé digne du prix, celui-ci pourrait être adjugé à un ***Mémoire qui fera faire un progrès essentiel à la Théorie des surfaces, ou autres variétés, algébriques.***

Les Mémoires destinés au concours devront être : inédits, rédigés en italien, ou français, allemand, anglais, et écrits (sauf les formules) avec la machine à écrire. Munis d'une épigraphe, ils devront parvenir, en trois exemplaires, au Président du *Circolo Matematico di Palermo* avant le 1er juillet 1907, accompagnés d'un pli cacheté contenant sur l'enveloppe l'épigraphe adoptée et à l'intérieur le nom et l'adresse de l'auteur. Le Mémoire couronné sera inséré dans les *Rendiconti,* ou autre publication, du *Circolo Matematico di Palermo.* L'auteur en recevra 200 tirages à part.

Dans le cas où aucun des Mémoires présentés au concours ne serait trouvé digne du prix, celui-ci pourra être adjugé à un Mémoire, sur les Théories ci-dessus, qui aura été publié après la publication de ce programme et avant le 1er juillet 1907.

Le prix sera décerné par le *Circolo Matematico di Palermo* conformément à la décision d'une Commission internationale de trois membres, composée de :

MM. Max Noether, Professeur à l'Université d'Erlangen;
Henri Poincaré, Professeur à l'Université de Paris;
Corrado Segre, Professeur à l'Université de Turin.

La lecture du rapport de la Commission, ainsi que la proclamation du nom du savant couronné et l'attribution du prix, auront lieu à Rome, en 1908, dans une des séances du IVe Congrès international des Mathématiciens.

Palerme, le 1er novembre 1904.

Le Président du *Circolo Matematico di Palermo,*
M.-L. Albeggiani.


Digitized by Google

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES.

N° 8. *SUPPLÉMENT.* Décembre 1904.

CHRONIQUE.

Il s'est constitué en Autriche un Comité pour élever un monument en souvenir de **Georges de Vega** (1754-1804). S'adresser à M. *Michel von Savenburg* à Laibach.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

RECUEILS PÉRIODIQUES RÉCENTS.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CXXXVII, nos 7 à 26. — Sur le rapport des travaux de S. Lie à ceux de Liouville; par M. *Saltykow.* — Les fonctions entières d'ordre zéro; par M. *Maillet.* — Sur les intégrales de Fourier-Cauchy; par M. *Störmer.*

Sur les problèmes de S. Lie; par M. *Saltykow.* — Sur les intégrales de Fourier-Cauchy; par M. *Carl Störmer.*

Sur les équations aux différences qui possèdent un système fondamental d'intégrales; par M. *Guldberg.*

Sur les fonctions monodromes et les équations différentielles; par M. *Maillet.*

Sur une classe d'équations différentielles linéaires; par M. *Chessin.*

Sur les équations linéaires aux différences finies; par M. *Guldberg.*

Sur les groupes de transformations des équations linéaires aux différences finies; par M. *Guldberg.* — Sur la résolution pratique des équations; par M. *Rabut.*

Sur les courbes gauches à torsion constante; par M. *de Tannenberg.* — Sur la détermination des classes singulières des séries de Taylor; par M. *E. Borel.* — Sur quelques points de la théorie des ensembles; par M. *Lindelöf.*

Sur la détermination des figures invariantes des transformations cycliques; par M. *Rabut.* — Sur l'approximation des fonctions par les irrationnelles quadratiques; par M. *Pincherle.* — Généralisation de la propriété fondamentale du potentiel.

Sur la nature analytique des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre; par M. *Bernstein.* — Sur les équations fonctionnelles et la théorie des séries divergentes; par M. *Fejer.* — Sur un système de trois fonctions de variables réelles; par M. *Pompeiu.*

Du problème de Cauchy relatif à une classe particulière de surfaces; par M. *de Tannenberg.* — Sur la représentation effective de certaines fonctions

Digitized by Google

discontinues; par M. *Borel*. — Sur une classe d'équations fonctionnelles: par M. *Lattès*.

Un théorème sur les ensembles mesurables; par M. *E. Borel*. — Généralisation d'un théorème de Laguerre; par M. *Auric*. — Sur les équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre; par M. *Hadamard*. — Sur une généralisation de la théorie des fractions continues algébriques; par M. *E. Goursat*. — Sur l'équation différentielle de Riccati du second ordre; par M. *Wallenberg*.

Sur une propriété des fonctions; par M. *H. Lebesgue*. — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles; par M. *J. Le Roux*. — Convergence des radicaux superposés périodiques; par M. *P. Wiernsberger*.

Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences, t. CXXXVIII. nos 1 à 26. — Sur l'étude asymptotique des fonctions méromorphes; par M. *Borel*. — Sur la résolution nomographique des triangles sphériques; par M. *d'Ocagne*.

Sur une propriété caractéristique des familles de Lamé; par M. *Demoulin*. — Un théorème sur les systèmes complètement intégrables d'équations aux différentielles totales d'ordre supérieur; par M. *Pascal*. — Sur le genre de la dérivée d'une fonction entière et sur le cas d'exception de M. Picard; par M. *Wiman*.

Sur certaines solutions doublement périodiques de quelques équations aux dérivées partielles; par M. *E. Picard*.

Sur les systèmes de deux surfaces dont les lignes de courbure se projettent sur un plan suivant les mêmes courbes; par M. *Guichard*. — Sur les fonctions entières; par M. *Pellet*. — Sur les fonctions monodromes et les nombres transcendants; par M. *E. Maillet*.

Remarques sur les équations différentielles dont l'intégrale est une fonction entière; par M. *Émile Borel*. — Sur certaines fonctions thêta et sur quelques-unes des surfaces hyperelliptiques auxquelles elles conduisent; par M. *Traynard*. — Sur les séries entières à coefficients entiers; par M. *Fatou*. — Sur les zéros d'une classe de transcendantes multiformes; par M. *G. Remoundos*.

Sur les nombres quasi-rationnels et les fractions arithmétiques ordinaires ou continues quasi-périodiques; par M. *Ed. Maillet*.

Sur quelques points de la théorie des fonctions algébriques de deux variables et de leurs intégrales; par M. *Émile Picard*. — Sur un groupe de problèmes de Géométrie; par M. *C. Guichard*. — Sur les suites de fonctions analytiques; par M. *P. Montel*. — Sur la représentation des fonctions par des suites de fractions rationnelles; par M. *R. de Montessus de Ballore*.

Sur les formes quadratiques invariantes par une substitution linéaire donnée (mod p); par M. *Camille Jordan*. — D'une condition nécessaire pour la stabilité initale d'un milieu élastique quelconque; par M. *P. Duhem*. — Sur la déformation continue des surfaces; par M. *G. Tzitzéica*. — Sur le frottement de pivotement; par M. *L. Lecornu*.

Sur les ensembles parfaits et les fonctions uniformes; par M. *Zoretti*.

Sur les groupes hypo-abéliens; par M. *Camille Jordan*. — Sur les formes décomposables en facteurs linéaires; par M. *F. Hocevar*.

Sur les propriétés des courbes figuratives des états indifférents; par M. *E. Ariès*.

Sur une classe de transcendantes multiformes: par M. *P. Boutroux*.

Sur une classe particulière de systèmes conjugués persistants; par M. *D.-Th. Egorov*. — Sur les groupes d'opérations; par M. *G.-A. Miller*. — Sur les équations de la Géométrie et la théorie des substitutions; par M. *Ed. Maillet*.

Sur certaines équations différentielles ordinaires du second ordre; par M. *S. Bernstein*. — Sur une série analogue aux fonctions modulaires; par M. *Lerch*. — Sur la théorie des systèmes d'équations différentielles linéaires; par M. *L. Schlesinger*.

Digitized by Google

Sur les singularités des fonctions analytiques; par M. *L. Zoretti*.

Sur le connexe linéaire dans l'espace à $n-1$ dimensions; par M. *Autonne*.

Sur les fondements d'une théorie systématique des fonctions sphériques; par M. *Niels Nielsen*. — Sur le rendement du joint universel; par M. *Lecornu*.

Sur les expressions formées de radicaux superposés; par M. *P. Wiernsberger*. — Sur les mouvements de solides aux trajectoires sphériques; par M. *J. Andrade*. — Sur une variante du joint universel; par M. *L. Lecornu*.

Sur une classe d'équations différentielles à intégrales multiformes; par M. *P. Boutroux*.

Sur la stabilité de l'équilibre; par M. *Paul Painlevé*. — Sur la théorie générale des fonctions fondamentales; par M. *W. Stekloff*. — Sur la théorie des fonctions sphériques; par M. *Niels Nielsen*. — Sur le cas d'exception de M. Picard et les fonctions multiformes; par *G. Remoundos*.

Sur certaines classes de surfaces isothermiques; par M. *L. Raffy*. — Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre; par M. *J. Clairin*.

Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences. t. CXXXIX, n°ˢ 1 à 19. — Sur certaines équations fonctionnelles et sur une classe de surfaces algébriques; par M. *Émile Picard*. — Sur les fonctions représentables analytiquement; par M. *H. Lebesgue*. — Sur la théorie générale des réseaux et des congruences; par M. *E. Martin*. — Sur une égalité générale commune à toutes les fonctions fondamentales; par M. *Stekloff*.

Sur deux problèmes relatifs aux surfaces isothermiques; par M. *L. Raffy*.

Sur une équation fonctionnelle; par M. *Émile Picard*. — Sur les singularités de l'équation $y' = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 \ldots$; par M. *P. Boutroux*.

Sur les zéros des fonctions entières d'ordre entier; par M. *P. Boutroux*.

Sur l'emploi d'un tétraèdre de référence mobile en Géométrie cayleyenne: par M. *A. Demoulin*. — Sur les groupes d'ordre p^m (p premier) dont tous les sous-groupes d'ordre p^{m-2} sont abéliens; par M. *Potron*. — Sur un théorème de M. Borel dans la théorie des fonctions entières; par M. *Rémoundos*.

Sur la résolution approchée de certaines congruences; par M. *Frédéric Riesz*.

Sur les fonctions entières de genre fini; par M. *L. Leau*. — Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre; par M. *S. Bernstein*. — Sur une surface hyperelliptique; par M. *Traynard*.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Vol. XIII, 1° semestre, n° 1 à . — *Mittag-Lefler*. Sopra la funzione $E_\alpha(x)$. — *Pizzetti*. Casi particolari del problema dei tre corpi.

Nielsen. Sur la multiplication de deux séries de factorielles.

Bianchi. Sulle coppie di superficie applicabili con assegnata rappresentazione sferica.

Fubini. Sulle coppie di superficie applicabili nello spazio ellitico.

Levi-Civita. Sopra la equazione di Kepler.

Somigliono. Sull' applicazione del metodo delle immagini alle equazioni dell' elasticità.

Bortolotti. Alcuni teoremi di calcolo infinitario.

Pincherle. Sugli sviluppi assintotici e le serie sommabili.

Capelli. Sulle relazioni algebriche fra le funzioni $\mathfrak{S}$ di una variabile e sul teorema di addizione.

De Franchis. I piani doppi dotati di due o più differenziali totali di prima specie. — *Barbieri*. Sulla representazione in modo conforme, coniugato di una superficie su di un' oltra.

Severi. Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della secondo specie.

Fubini. Sui gruppi di projettivita.

Digitized by Google

Dell' Agnola. Sulla distribuzione delle radici della derivata di una funzione razionale intiera.

American Journal of Mathematics, janvier 1904. — *H.-L. Rietz.* On primitive groups of odd order. — *A.-N. Whitehead.* Theorems on cardinal numbers. — *T.-J. Bromwich.* The caustic, by reflection, of a circle. — *H.-W. Kuhn.* On imprimitive substitution groups.

J. Eiesland. On nullsystems in space of five dimensions and their relation to ordinary space. — *P. Field.* On the forms of unicursal quintic curves. — *Edw. Kasner.* Determination of the algebraic curves whose polar conics are parabolas. — *B. Basset.* On certain conics connected with trinodal quartics. — *Lasker.* A geometric proposition. — *Eisenhart.* Congruences of tangents to a surface and derived congruences.

E. Landau Bemerkungen zu Hernn D. N. Lehmer's Abhandlung in Bd. dieses Journal. — *Hawkes.* On hypercomplex number systems units. — *L.-E. Dickson.* Memoir on abelian transformations.

Wilezynski. Invariants of a system of linear partial differential equations, and the theory of congruences of rays. — *De Polignac.* On elements connected each to each by one or the other of two reciprocal relations.

Digitized by Google

MARTIN (**Emile**) et **PERNOT** (**Félix**), Anciens élèves de l'Ecole Polytechnique, Professeurs à l'Ecole Sainte-Geneviève. — **Cours de Géométrie descriptive** à l'usage des candidats au Baccalauréat et aux Ecoles du Gouvernement : Saint-Cyr, Navale, Centrale, Mines, Normale et Polytechnique.

Ire partie : Droite et plan. — Sphère. — Trièdre. — Cônes et cylindres. — Surfaces topographiques. Gr. in-8° (25 × 16) de 450 p. avec 394 fig.; 1902 .... 10 fr.

IIe partie : Surfaces de révolution. — Intersection des surfaces. — Surfaces de second ordre. Gr. in-8° (25 × 16) de 500 p. avec 318 fig.; 1902 .... 10 fr.

MICHEL (**François**), ancien Élève de l'École Polytechnique, Inspecteur de l'exploitation aux chemins de fer du Nord. — **Recueil de problèmes de Géométrie analytique**, à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales. *Solution des problèmes donnés au concours d'admission à l'Ecole Polytechnique* depuis 1860 jusqu'à 1900. In-8, avec 70 fig.; 1900 .... 6 fr.

PETERSEN (**Julius**), Professeur à l'Université de Copenhague. — **Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques**, avec application *à plus de 400 problèmes*. Traduit par O. Chemin, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Ecole des Ponts et Chaussées. 2e édition. Petit in-8, avec fig.; 1892 .... 4 fr.

ROUCHÉ (**Eugène**), Membre de l'Institut, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, Examinateur de sortie à l'Ecole Polytechnique, et **DE COMBEROUSSE** (**Charles**), Professeur à l'Ecole Centrale et au Conservatoire des Arts et Métiers. — **Traité de Géométrie.** 7e édition, revue et augmentée par Eugène Rouché. Fort in-8 de LX-1212 pages, avec 703 fig. dans le texte et 1175 questions proposées; 1900.. 17 fr.

Ire Partie. — *Géométrie plane;* 1900 .... 7 fr. 50 c.

IIe Partie. — *Géométrie de l'espace; Courbes et Surfaces usuelles* .... 9 fr. 50 c.

ROUCHÉ (**Eug.**) et **COMBEROUSSE** (**Ch. de**). — **Éléments de Géométrie.** 7e édition conforme aux derniers programmes (Classes de Mathématiques A et B), revue et complétée par Eugène Rouché, Membre de l'Institut, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers. Examinateur de sortie à l'École Polytechnique. In-8 de XL-611 pages, avec 485 figures et 543 questions proposées; 1904 .... 6 fr.

SAUVAGE (**P.**), Professeur de Mathématiques au Lycée de Montpellier. — **Les lieux géométriques ou Géométrie élémentaire.** In-8, avec figures, 1893 .... 3 fr.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Décembre 1904.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6ᵉ).

BRISSE (Ch.), Professeur à l'École Centrale et au Lycée Condorcet, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Recueil de problèmes de Géométrie analytique**, à l'usage des classes de Mathématiques spéciales. *Solution des problèmes donnés au concours d'admission à l'École Centrale depuis* 1862. 2ᵉ édition. In-8, avec figures; 1892..... 5 fr.

CLEBSCH (Alfred). — **Leçons sur la Géométrie**, recueillies et complétées par FERDINAND LINDEMANN, Professeur à l'Université de Fribourg en Brisgau, et traduites par ADOLPHE BENOIST, Docteur en droit. 3 vol. grand in-8, avec figures; 1880-1883-1902.

TOME I : *Traité des sections coniques et Introduction à la théorie des formes algébriques*. 2ᵉ édition..... 12 fr.

TOME II : *Courbes algébriques en général et courbes du troisième ordre*..... 14 fr.

TOME III : *Intégrales abéliennes et connexes*..... 16 fr.

34577 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Le Gérant : GAUTHIER-VILLARS.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google


Digitized by Google